HANSER

Rhena Krawietz, Wilfried Heimke

Physik im Bauwesen

Grundwissen und Bauphysik

ISBN-10: 3-446-40276-4
ISBN-13: 978-3-446-40276-8

Leseprobe

Die Eigenfrequenzen eines lufterfüllten, *quaderförmigen Raumes* ergeben sich entsprechend (4.22) zu

$$f_n = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{n_x}{\ell_x}\right)^2 + \left(\frac{n_y}{\ell_y}\right)^2 + \left(\frac{n_z}{\ell_z}\right)^2} \cdot \sqrt{\frac{\kappa p}{\rho}} \qquad (4.23)$$

mit ℓ_x, ℓ_y, ℓ_z als den Raumabmessungen und n_x, n_y, n_z als beliebige ganze Zahlen 0, 1, 2, ...

An die Stelle des Elastizitätsmoduls E tritt bei Gasen das Produkt aus Adiabatenexponent κ und Druck p (vgl. Abschnitt 5.2.3, Gleichung (5.17)). Für $n_x = n$, $n_y = 0$, $n_z = 0$ ergibt sich aus (4.23) wieder die Gleichung (4.22) für den eindimensionalen Schwinger.

4.2 Mechanische Wellen

4.2.1 Wellengleichung

In einem ausgedehnten Medium können sich Störungen ausbreiten, die von einer lokalen Anregung herrühren; die Kopplung zwischen den lokalen Anregungen und den Teilchen des Mediums ermöglicht die Ausbreitung einer **Welle**. Sie wird beschrieben durch die Anregung oder Störung u als Funktion des Ortes $\vec{r}$.

Beispiel 4.9 Wellen

Wellenarten

- eindimensionale *Seilwelle*, Störung entspricht seitlicher Auslenkung des Seils
- *Oberflächenwelle* auf Flüssigkeiten oder Kristallen, Störung ist die Auslenkung der Teilchen oder Atome aus der Ruhelage
- *Schallwelle* oder *akustische Welle* in festen Körpern, Flüssigkeiten oder Gasen, Störung ist die lokale Druckänderung, verknüpft mit einer Verschiebung der Atome oder Moleküle
- *elektromagnetische Welle* (Licht) im dreidimensionalen Vakuum oder in festen, flüssigen oder gasförmigen Stoffen, Störung in zeitlich veränderlichen elektrischen und magnetischen Feldern.

Die Ausbreitung einer Störung $u = u(\vec{r}, t)$ lässt sich im eindimensionalen Fall

$$u = u(x,t)$$

mit der Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (4.24)$$

beschreiben. Diese Gleichung hat die allgemeine Lösung

$$u(x,t) = f(x - ct) + g(x + ct) \qquad (4.25)$$

mit f und g als beliebige Funktionen. Die Argumente dieser Funktionen bezeichnet man als *Phasen* $x \mp ct = \text{const.}$ der Störung, und Differenziation nach t liefert $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \pm c$ als *Phasengeschwindigkeit*, mit der sich die Störungen in x-Richtung (oder entgegengesetzt) ausbreiten (*Bild 4.18*).

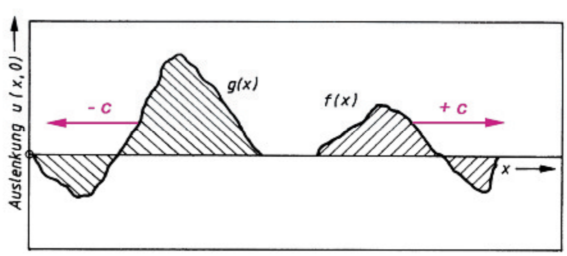

Bild 4.18 Vorwärts- und rückwärtslaufende Welle

Die eindimensionale, ebene harmonische Welle ist eine spezielle Lösung von (4.24) und wird durch

$$u(x,t) = \hat{u}\cos(\omega t - k^* x + \varphi_0) \qquad (4.26)$$

beschrieben. Die komplexe Darstellung der harmonischen Welle ergibt sich zu

$$u_k = \hat{u}\mathrm{e}^{j(\omega t - k^* x - \varphi_0)} \qquad (4.27)$$

und demnach $u(x,t) = \mathrm{Re}\{u_k(x,t)\}$ (vgl. Abschnitt 4.1.1, Gleichung (4.5)).

Neben der *Kreisfrequenz* $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{\tau}$ (4.3) tritt hier die *Wellenzahl k**

$$k^* = \frac{2\pi}{\lambda} \qquad (4.28)$$

auf, die sich aus der die räumliche Periodizität beschreibenden *Wellenlänge* λ analog (4.3) berechnen lässt,

Einheit der Wellenlänge $[\lambda]$ = m,

Einheit der Wellenzahl $[k^*] = [\lambda]^{-1} = \mathrm{m}^{-1}$.

Im *Bild 4.19* sind die zeitliche Periodizität

$u(x_0, t+\tau) = u(x_0, t)$ *Bild 4.19 (a)*

und die räumliche Periodizität

$u(x+\lambda, t_0) = u(x, t_0)$ *Bild 4.19 (b)*

(bei jeweils festgehaltener anderer Variabler) dargestellt. *Bild 4.19* (*c*) zeigt das Wellenbild zu zwei festen Zeiten t_0 und $t_0 + \Delta t$. Die Phase der Welle hat sich um $x = c\cdot\Delta t$ nach rechts weiterbewegt. Das Argument von (4.26) liefert nämlich für $(\omega t - k^* x + \varphi_0)$ = const.

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = c = \frac{\omega}{k^*} = f \cdot \lambda \tag{4.29}$$

als **Phasengeschwindigkeit** c. Neben der Phasengeschwindigkeit c wird die **Gruppengeschwindigkeit** c_g durch

$$c_\mathrm{g} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k^*} \tag{4.30}$$

definiert. Beide Geschwindigkeiten c und c_g unterscheiden sich nur, wenn ω und k^* nicht proportional zueinander sind, sondern ein komplizierterer funktioneller Zusammenhang $\omega = \omega(k^*)$ besteht.

Die Phasengeschwindigkeit hängt dann von der Frequenz ab: $c = c(\omega)$. Diese Erscheinung heißt **Dispersion**. Für normale bzw. fehlende Dispersion gilt

$c_\mathrm{g} \le c$.

Die Gruppengeschwindigkeit c_g ist diejenige Geschwindigkeit der Welle, mit der sich im dispergierenden (zerstreuenden) Stoff die Energie (das Signal) ausbreitet.

Für eine *Kugelwelle*, deren Phasen konzentrische Kugelflächen (Radius r) um das Störungszentrum beschreiben, folgt aus der dreidimensionalen Erweiterung der Gleichung (4.24) als Lösung

$$u(r,t) = \frac{a}{r}\cos(\omega t - k^* r + \varphi_0). \tag{4.31}$$

Die *Zylinderwellen* werden durch

$$u(r,t) = \frac{b}{\sqrt{r}}\cos(\ \omega t - k^* r + \varphi_0) \tag{4.32}$$

dargestellt.

Als *Wellenfläche* bezeichnet man den geometrischen Ort aller Punkte gleicher Phase, das sind entsprechend den Gln. (4.26), (4.31) und (4.32) Ebenen, Kugel- und Zylinderflächen (*Bild 4.20*).

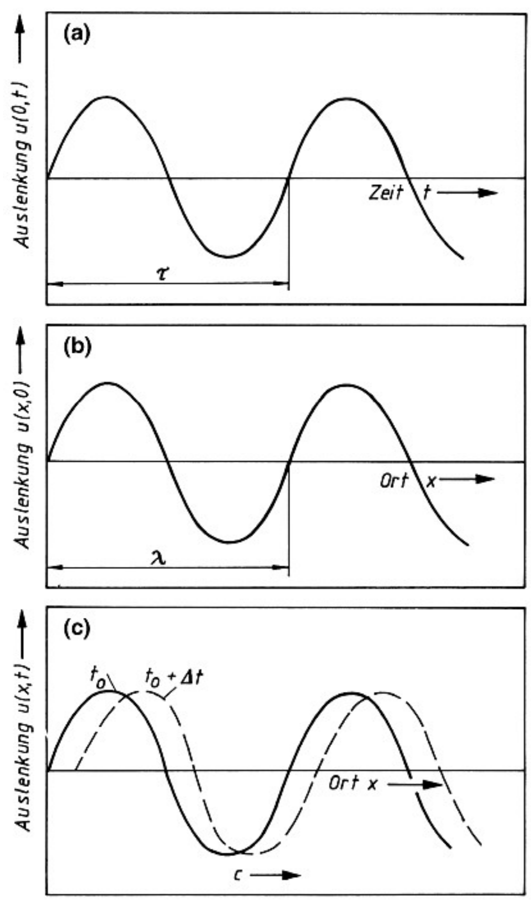

Bild 4.19 Periodizität einer harmonischen Welle ($\varphi_0 = -\pi/2$)
(a) zeitlich, **(b)** räumlich, **(c)** fortlaufende Welle

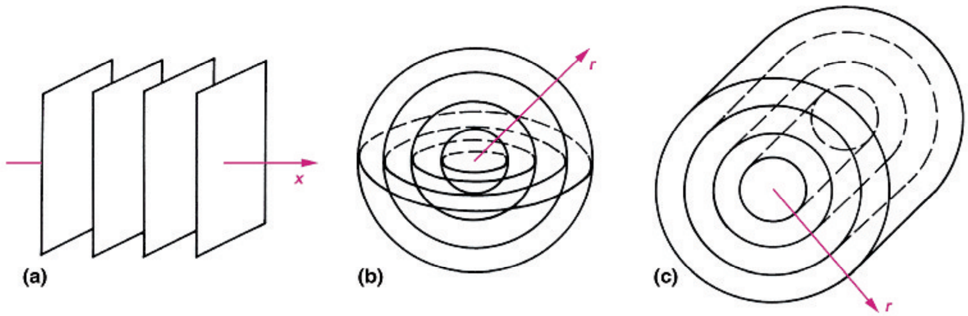

Bild 4.20 Wellenflächen harmonischer Wellen **(a)** ebene Welle, **(b)** Kugelwelle, **(c)** Zylinderwelle

4.2.2 Wellenarten

Untersucht man die Schwingungsrichtung der Störung u (4.26), so kann man zwischen zwei Wellenarten unterscheiden. Erfolgt die Schwingung (von Teilchen oder Feldgrößen) quer zur Ausbreitungsrichtung x bzw. r der Welle, so spricht man von **Transversal-** oder **Querwellen,** geschieht sie parallel dazu, dann heißen die Wellen **Longitudinal-** oder **Längswellen**.

In *Transversalwellen*, wie z. B. bei Seilwellen, elektromagnetischen Wellen (im Vakuum), Oberflächenwellen gibt es für die transversale Schwingung verschiedene Möglichkeiten, was zu den Erscheinungen der **Polarisation** führt.

Beispiel 4.10 Polarisation

Schwingt der Vektor einer Störung $\vec{u}$ einer harmonischen Welle immer in einer Ebene des Raumes, so heißt die Querwelle *linear polarisiert* (*Bild 4.21*).

Die Überlagerung zweier linear polarisierten Wellen mit aufeinander senkrecht stehenden Schwingungsrichtungen $\vec{u}_1 \perp \vec{u}_2$ und gleicher Frequenz ergibt eine *elliptisch polarisierte* Welle $\vec{u}$ (*Bild 4.22*).

In *Longitudinalwellen,* wie z. B. Schallwellen in Flüssigkeiten und Gasen, ist die Schwingungsrichtung durch die Ausbreitungsrichtung vorgegeben, es gibt keine Polarisation.

4.2.3 Reflexion, Brechung und Beugung

Trifft eine ebene harmonische Welle, aus einem Stoff 1 kommend, auf die Grenzfläche eines Stoffes 2, so wird sie zum Teil reflektiert und zum Teil „gebrochen“ weitergeleitet. Entsprechend *Bild 4.23* gilt für die **Reflexion**

$$\alpha = \alpha' \tag{4.33}$$

(Einfallswinkel = Reflexionswinkel)

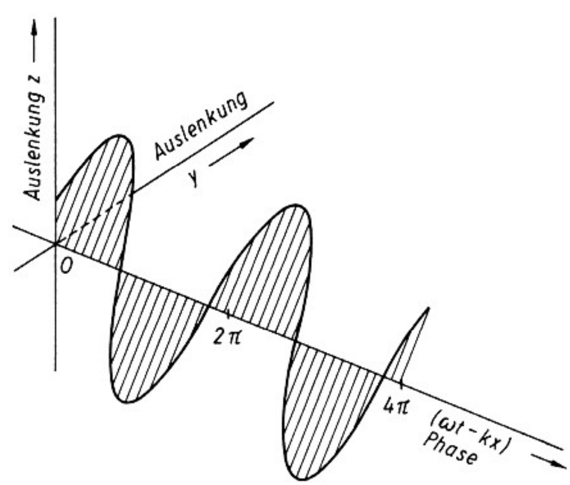

Bild 4.21 Linear polarisierte Welle

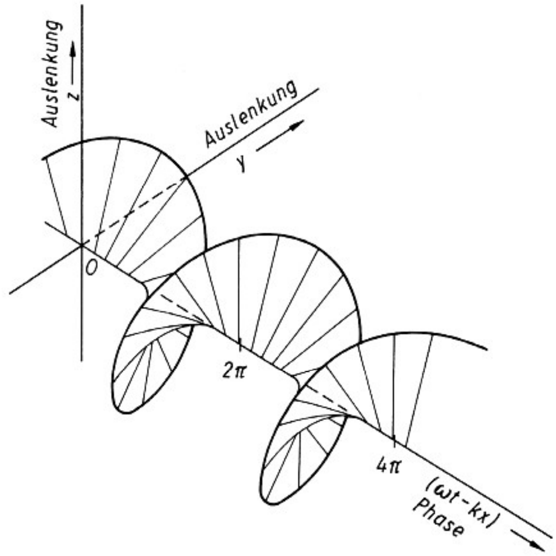

Bild 4.22 Elliptisch polarisierte Welle

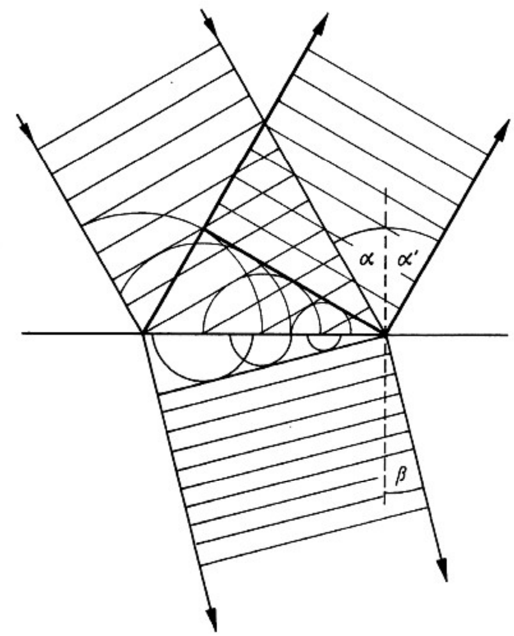

Bild 4.23 Reflexion und Brechung einer ebenen Welle
α Einfallswinkel, α' Reflexionswinkel, β Brechungswinkel

und für die **Brechung** nach SNELLIUS

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{c_1}{c_2}=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}=n=\frac{n_2}{n_1}. \qquad (4.34)$$

Das Verhältnis $\frac{n_2}{n_1}$ hat vor allem für elektromagnetische Wellen Bedeutung, wobei die *Brechzahlen* n_1, n_2 den Stoff gegenüber dem Vakuum charakterisieren:

$$n_1=\frac{c_0}{c_1},\ n_2=\frac{c_0}{c_2},\ \text{ vgl. 4.3.1.}$$

Verläuft die Welle in umgekehrter Richtung vom Stoff 2 in den Stoff 1 („Strahlenumkehr"), so ergibt sich mit $c_1 > c_2$ aus (4.34) für $\alpha = \frac{\pi}{2}$

$$\sin\beta_T=\frac{1}{n} \qquad (4.35)$$

der Grenzwinkel β_T der *Totalreflexion Bild 4.24*.

Das HUYGENSsche Prinzip, nach dem jeder Punkt einer Wellenfläche Ausgangspunkt für eine Elementar-(Kugel)-Welle ist, gestattet eine Erklärung der *Beugungs*erscheinungen hinter einem Spalt der Breite b.

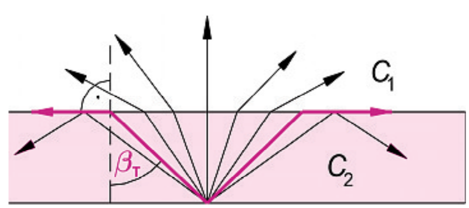

Bild 4.24 Totalreflexion

Für die Auslöschung der beiden Elementarwellen aus *Bild 4.25* durch *Interferenz* folgt

$$\sin\alpha_{\min}=n\frac{\lambda}{b}; \qquad n=\pm1;\ \pm2;\ \pm\ldots$$

Bei der Überlagerung von Elementarwellen hinter einem *Gitter* mit dem Gitterabstand d ergibt sich eine Verstärkung für die Winkellagen entsprechend

$$\sin\alpha_{\max}=n\frac{\lambda}{d} \qquad (4.36)$$

$n=\pm1;\ \pm2;\ \pm\ldots$ (Beugungsordnung).