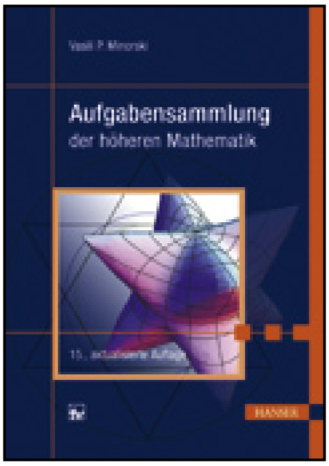
HANSER



Leseprobe

Vasili P. Minorski

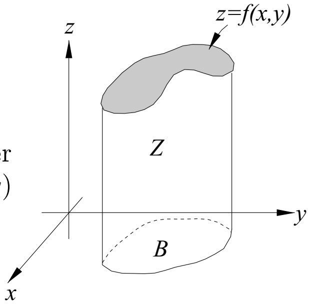
Aufgabensammlung der höheren Mathematik

ISBN: 978-3-446-41616-1

12 Bereichs- und Mehrfachintegrale

12.1 Integrale über ebene Bereiche (Flächenintegrale)

$$\boxed{\int\limits_B f(x,y)\,\mathrm{d}b = \iint\limits_B f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y}$$



Betrachtet wird der Zylinder Z. Der Bereich B der x,y-Ebene bildet den Boden, die Fläche $z = f(x,y)$ den Deckel.

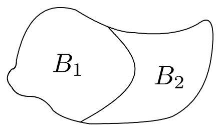
Sonderfälle

- $f(x,y) \geq 0: \quad V = \int\limits_B f(x,y)\,\mathrm{d}b$ ist das Volumen von Z.
- $f(x,y) \equiv 1: \quad A = \int\limits_B \mathrm{d}b$ ist der Flächeninhalt von B.

Eigenschaften:

1. $\int\limits_B \big(\alpha f(x,y) + \beta g(x,y)\big)\,\mathrm{d}b = \alpha \int\limits_B f(x,y)\,\mathrm{d}b + \beta \int\limits_B g(x,y)\,\mathrm{d}b\,, \quad \alpha,\beta \in \mathbb{R}$

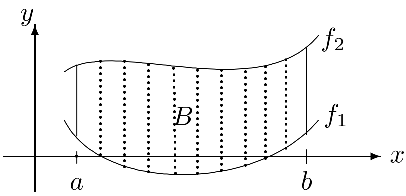
2. $B = B_1 \cup B_2$; B_1 und B_2 haben höchstens Randpunkte gemeinsam.
   $\int\limits_B f(x,y)\,\mathrm{d}b = \int\limits_{B_1} f(x,y)\,\mathrm{d}b + \int\limits_{B_2} f(x,y)\,\mathrm{d}b$



Berechnen über Doppelintegrale:

1. B ist *Normalbereich bez. x-Achse*

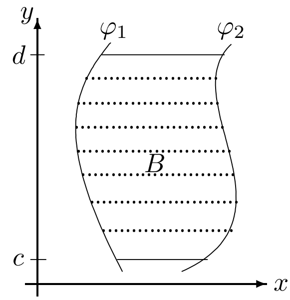
   $B: \qquad a \leq x \leq b$
   $\qquad\quad f_1(x) \leq y \leq f_2(x)$



   Dann kann das Bereichsintegral über folgendes Doppelintegral berechnet werden:

$$\int\limits_B f(x,y)\,\mathrm{d}b = \int\limits_{x=a}^{b} \left[\,\int\limits_{y=f_1(x)}^{f_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x = \int\limits_{x=a}^{b}\int\limits_{y=f_1(x)}^{f_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \quad (12.1)$$

2. B ist *Normalbereich bez. y-Achse*



$$B: \quad c \le y \le d$$
$$\varphi_1(y) \le x \le \varphi_2(y)$$

Dann kann das Bereichsintegral über folgendes Doppelintegral berechnet werden:

$$\int_B f(x,y)\,\mathrm{d}b = \int_{y=c}^{d} \int_{x=\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \quad (12.2)$$

Anwendungen:

Die Fläche B der x,y-Ebene sei mit einer Masse der Massendichte $\varrho = \varrho(x,y)$ belegt. *Masse, Schwerpunktskoordinaten* und *Trägheitsmomente* werden nach Tabelle 12.1 berechnet. Dabei ist zu beachten, dass die Integranden nur Funktionen der zwei Veränderlichen x und y sind $\big(\varrho = \varrho(x,y)\,,\ r_A = r_A(x,y)\big)$.

Trägheitsmomente

Bezugsachse A liegt in x,y-Ebene: äquatoriales Flächenträgheitsmoment
Bezugsachse $A \perp x,y$-Ebene: polares Flächenträgheitsmoment

1. Berechne das Bereichsintegral $\int_B x\,\mathrm{d}b$ für den Bereich B, der von den Kurven mit den Gleichungen $y = x^2$ und $y = x + 2$ begrenzt wird, durch Zurückführung auf ein Doppelintegral. Berechne das Doppelintegral, indem

   a) über x b) über y

   zwischen konstanten Grenzen integriert wird.

2. Berechne mit Hilfe des Doppelintegrals den Flächeninhalt der ebenen Bereiche, die von den folgenden Kurven begrenzt werden. Fertige zu jeder Aufgabe eine Skizze an.

   a) $y = x\,,\ \ xy = 4\,,\ \ x = 4$

   b) $y^2 = 4 + x\,,\ \ x + 3y = 0$

   c) $(x-2)(y-2) = 4$
   $(x+3)(y+3) = 4$

   d) $y = \ln x\,,\ \ x - y = 1\,,\ \ y = -1$

3. Skizziere die Bereiche, deren Flächeninhalte durch folgende Integrale dargestellt werden. Berechne den Inhalt dieser Flächen. Ändere die Reihenfolge der Integration.

   a) $I = \displaystyle\int_{x=-1}^{2} \int_{y=x^2}^{x+2} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

   b) $I = \displaystyle\int_{y=0}^{a} \int_{x=a-y}^{\sqrt{a^2-y^2}} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

   c) $I = \displaystyle\int_{x=0}^{1} \int_{y=x}^{2-x^2} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

d) $I = \int\limits_{y=0}^{a} \int\limits_{x=\sqrt{ay}}^{\sqrt{2a^2-y^2}} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

4. Berechne $\iint\limits_B xy^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, wenn B von der Parabel $y^2 = 2px$ und der Geraden $x = p$ begrenzt wird ($p > 0$).
5. Berechne die folgenden Bereichsintegrale, wenn B von den angegebenen Kurven begrenzt wird:

   a) $\int\limits_B xy\,\mathrm{d}b\,,\quad B:\ (x-2)^2 + y^2 = 1$

   b) $\int\limits_B (x^2+y^2)\,\mathrm{d}b$

   $B:\ y = x^2,\ y = 1$
6. Berechne das Bereichsintegral

   a) $\iint\limits_B \sqrt{xy - y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, wenn B ein Dreieck mit den Eckpunkten $O(0;0)$, $A(10;1)$ und $B(1;1)$ ist

   b) $\iint\limits_B \mathrm{e}^{x/y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, wenn B von der Parabel $y^2 = x$ ($y \geq 0$) und den Geraden $y = 1$ und $x = 0$ begrenzt wird

   c) $\iint\limits_B xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, wenn B von der x-Achse und dem oberen Halbkreis $(x-2)^2 + y^2 = 1$ begrenzt wird.
7. Berechne das Trägheitsmoment der Fläche, die von der Hyperbel $xy = 4$ und der Geraden $x + y = 5$ begrenzt wird, bezüglich der Geraden $y = x$ ($\varrho \equiv 1$).
8. Berechne $\int\limits_B \frac{x}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}b$, wenn B das Parabelsegment ist, das von der Parabel $y = \frac{1}{2}x^2$ und der Geraden $y = x$ begrenzt wird.
9. Berechne von dem Dreieck mit den Eckpunkten $(0;0)$, $(0;1)$, $(1;0)$ das polare Trägheitsmoment bezüglich des Nullpunktes, wenn $\varrho \equiv 1$ ist.
10. Bestimme die äquatorialen Trägheitsmomente J_x, J_y und das polare Trägheitsmoment J_p (bez. des Nullpunktes) der Fläche eines Rechtecks, das durch die Kurven $x = 0$, $x = a$, $y = 0$ und $y = b$ begrenzt wird ($\varrho \equiv 1$).
11. Bestimme den Schwerpunkt der Fläche, die durch folgende Kurven begrenzt wird ($\varrho \equiv 1$):

    a) $y = 0$ und eine Halbperiode der Sinuskurve $y = \sin x$

    b) $y = x^2$, $x = 4$, $y = 0$
12. Berechne $\int\limits_B xy\,\mathrm{d}b$, wenn B von den Koordinatenachsen und dem Asteroidenbogen $x = a\cos^3 t\,$, $y = a\sin^3 t\,,\ 0 \leq t \leq \pi/2$ ($a > 0$) begrenzt wird.

12.2 Integrale über räumliche Bereiche (Raumintegrale)

$$\boxed{\int\limits_B f(x,y,z)\,\mathrm{d}b = \iiint\limits_B f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}$$