



Leseprobe

Arnold Führer, Klaus Heidemann, Wolfgang Nerreter

Grundgebiete der Elektrotechnik

Band 2: Zeitabhängige Vorgänge

ISBN: 978-3-446-43038-9

Weitere Informationen oder Bestellungen unter

<http://www.hanser.de/978-3-446-43038-9>

sowie im Buchhandel.

2 Kraft und Energie in elektromagnetischen Feldern

2.1 Energie im elektrostatischen Feld

Ziele: Sie können

- den Zusammenhang zwischen Energie und Spannung an einem Kondensator mit $C = \text{const.}$ nennen.
- die Gleichung für die Energie eines geladenen Kondensators herleiten, dessen Kapazität von der Spannung abhängig ist.
- den Begriff Energiedichte erläutern.
- den Zusammenhang zwischen der Energiedichte eines Feldgebietes und der elektrischen Feldstärke angeben.

2.1.1 Energie eines Kondensators

Im elektrostatischen Feld eines Kondensators ist elektrische Energie gespeichert. Diese Energie kann bei der Entladung des Kondensators wiedergewonnen werden.

Zur Ermittlung der Energie schließen wir einen zum Zeitpunkt $t = 0$ ungeladenen Kondensator an eine Konstantstromquelle mit $I_q = \text{const.}$ an.

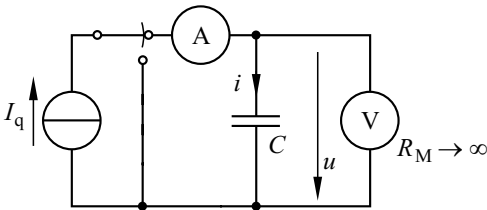


Bild 2.1 Aufladung eines Kondensators

In dem Zeitintervall dt wird dem Kondensator die Energie dW zugeführt:

$$dW = u i dt \quad (2.1)$$

Die Energie W_1 , die der Kondensator zum Zeitpunkt t_1 enthält, berechnen wir durch Integration:

$$W_1 = \int_0^{t_1} dW = \int_0^{t_1} u i dt \quad (2.2)$$

Kann man den Kondensator näherungsweise als idealen kapazitiven Zweipol ansehen, so erhält man mit der Gl. (1.5):

$$W_1 = \int_0^{u_1} u C du \quad (2.3)$$

Dabei ist u_1 die Spannung zum Zeitpunkt t_1 . Für $C = \text{const.}$ lässt sich die Lösung der Gl. (2.3) direkt angeben:

$$W_1 = \frac{1}{2} C u_1^2 \quad (2.4)$$

Die Energie W_1 ist offensichtlich vom Strom unabhängig. Man erhält daher für jeden Wert der Spannung u unabhängig vom Zeitverlauf des Stromes i bei der Aufladung des Kondensators mit konstanter Kapazität:

$$W = \frac{1}{2} C u^2 \quad (2.5)$$

Für einen Kondensator mit spannungsabhängiger Kapazität verwenden wir zweckmäßig die differentielle Kapazität $c = dQ/dU$ (s. Gl. (6.44), Band 1). Wir setzen sie mit der Gl. (1.4) in die Gl. (2.2) ein:

$$W_1 = \int_0^{u_1} u c du \quad (2.6)$$

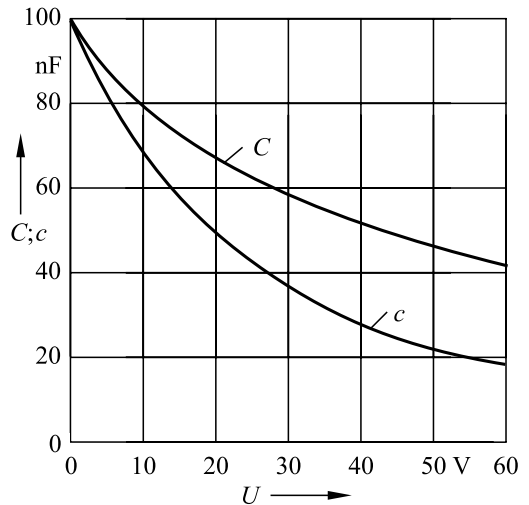


Bild 2.2 Kapazität C und differentielle Kapazität c eines Keramikcondensators

Da bei einer spannungsabhängigen Kapazität $C(U)$ auch die differentielle Kapazität c von der Spannung abhängt (Bild 2.2), ist eine analytische Lösung der Gl. (2.6) nicht möglich; es können numerische Verfahren angewendet werden.

Beispiel 2.1

Wir wollen die Energie berechnen, die in einem Kondensator mit der Kennlinie nach Bild 2.2 bei 60 V enthalten ist.

Wir zerlegen den Bereich 0 ... 60 V in sechs Intervalle. Mit einem Mathematikprogramm berechnen wir für jedes Intervall die differentielle Kapazität c als kubische Spline-Funktion.

Bei den kubischen Spline-Funktionen wird für jedes Intervall eine kubische Parabel angesetzt. An jeder Intervallgrenze haben die beiden Parabeln gleiche Funktionswerte und gleiche Steigung. Dadurch ergibt sich insgesamt eine Kurve minimaler Krümmung.

Die Folge der Spannungswerte in der Einheit Volt (V) ist:

[0; 10; 20; 30; 40; 50; 60]

Die Folge der Kapazitätswerte in der Einheit Nanofarad (nF) ist:

[100; 80; 67,8; 59; 51,9; 46,2; 41,7]

Die Folge der differentiellen Kapazitäten in der Einheit nF ist:

[100; 68,4; 49,3; 37; 27,5; 21,7; 18,8]

Die Integration ergibt, dass der Kondensator bei der Spannung 60 V die Energie enthält:

$W = 55,9 \mu\text{J}$

wir das homogene Feld eines Plattenkondensators mit der Fläche A und dem Plattenabstand l .

Zunächst setzen wir die Gl. (1.4) in die Gl. (2.1) ein:

$$dW = u dQ \quad (2.7)$$

Die Ladungsänderung dQ ist mit einer Änderung der elektrischen Flussdichte D verbunden:

$$dQ = A dD \quad (2.8)$$

Setzen wir dies und die Beziehung $u = E l$ in die Gl. (2.7) ein, so erhalten wir:

$$dW = A l \cdot E dD \quad (2.9)$$

Dabei ist $A l = V$ das Volumen des Feldgebietes. Der Quotient aus Energie und Volumen wird als **elektrische Energiedichte** w_{el} bezeichnet:

$$w_{\text{el}} = \frac{W}{V} = \int_0^{D_1} E dD \quad (2.10)$$

$$[w_{\text{el}}] = 1 \frac{\text{J}}{\text{m}^3}$$

Ist bei einem Kondensator mit spannungsabhängiger Kapazität die Funktion $D = f(E)$ grafisch gegeben, so kann die Energiedichte z. B. mit einem numerischen Rechenverfahren bestimmt werden.

Für ein Dielektrikum mit konstanter Permittivität ε kann das Integral in der Gl. (2.10) analytisch berechnet werden und man erhält mit $D = \varepsilon E$:

$$w_{\text{el}} = \frac{1}{2} \varepsilon E^2 = \frac{D^2}{2\varepsilon} \quad (2.11)$$

Mit der Energiedichte w_{el} können wir die Teilenergie dW berechnen, die in einem kleinen Teilvolumen dV eines Feldgebietes gespeichert ist:

$$dW = w_{\text{el}} dV \quad (2.12)$$

Die gesamte Energie W eines Feldgebietes mit dem Volumen V ist

- im homogenen Feld: $W = w_{\text{el}} V$
- im inhomogenen Feld: $W = \int_V w_{\text{el}} dV$

2.1.2 Elektrische Energiedichte

Wir wollen nun den Zusammenhang zwischen der in einem Feldgebiet gespeicherten Energie und den Feldgrößen formulieren. Hierzu betrachten

Beispiel 2.2

Ein Plattenkondensator hat die Fläche $0,8 \text{ m}^2$ und den Plattenabstand $l = 1 \text{ cm}$. Wir wollen abschätzen, wie viel elektrische Energie sich im Dielektrikum Luft bei Normalbedingungen speichern lässt.

Die Feldstärke muss kleiner sein als die Anfangsfeldstärke E_A . Wir entnehmen dem Bild 8.62, Band 1 für den gegebenen Plattenabstand den Wert $E = 30 \text{ kV/cm}$.

Mit $\varepsilon = \varepsilon_0$ und dem Feldvolumen $V = A l = 8 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$ erhalten wir mit der Gl. (2.11) für das homogene Feld die Energie:

$$W_{\text{el}} = \frac{1}{2} \varepsilon E^2 V = 0,319 \text{ J}$$

In 1 cm^3 Luft ist dabei die Energie $39,8 \mu\text{J}$ enthalten.

Fragen

- Leiten Sie den Zusammenhang zwischen der Spannung an einem Kondensator ($C = \text{const.}$) und der gespeicherten Energie her.
- Was versteht man unter dem Begriff Energiedichte? Welche Einheit hat sie?
- Zeigen Sie, wie man die Energie eines Feldraumes mit Hilfe der Energiedichte berechnen kann, wenn ein homogenes bzw. inhomogenes Feld vorliegt.

Aufgaben

2.1⁽¹⁾ Ein Kondensator mit konstanter Kapazität soll an 20 V Gleichspannung die Energie 4 mJ speichern. Welche Kapazität muss er haben?

2.2⁽¹⁾ Ein Wickelkondensator (Fläche $A = 225 \text{ cm}^2$; Dielektrikum Polystyrol) trägt die Ladung 120 nC . Das inhomogene Randfeld soll unberücksichtigt bleiben. Welche Energiedichte liegt im Feld vor?

2.3⁽²⁾ Welchen Wert hat die Energie des Kondensators mit der Kennlinie nach Bild 2.2 bei der Spannung 40 V ?

2.4⁽²⁾ Für einen Kondensator mit $C = f(U)$ gilt folgende Gleichung für die differenzielle Kapazität: $c = 100 \text{ nF} - 60 \text{ nF} \cdot (U/6 \text{ V}) + 30 \text{ nF} \cdot (U/6 \text{ V})^2$. Welche Energie hat dieser Kondensator bei der Spannung 6 V ?

2.2 Kräfte im elektrostatischen Feld

Ziele: Sie können

- die Gleichung für die Kräfte herleiten, die zwei Punktladungen aufeinander ausüben.
- die Ursache für das Drehmoment auf einen Dipol beschreiben und die Gleichung für das Drehmoment im homogenen Feld herleiten.
- die Gleichung für die Kraft auf die Platten eines Plattenkondensators herleiten.
- den Begriff Dipolmoment erläutern.

2.2.1 Kräfte auf Punktladungen

Befindet sich eine Ladung Q in einem elektrischen Feld, so wirkt auf sie die Kraft:

$$\vec{F} = Q \vec{E} \quad (2.13)$$

Dabei ist \vec{E} die Feldstärke des äußeren Feldes; das von der Ladung Q erzeugte Feld ist für die Berechnung der Kraft ohne Bedeutung.

Die Gl. (2.13) darf nur dann angewendet werden, wenn die Feldstärke \vec{E} am Ort der Ladung überall gleich ist; dies ist z. B. bei einer Punktladung oder im homogenen Feld der Fall.

Wir wollen nun die Kraft berechnen, die zwei Punktladungen Q_1 und Q_2 im Abstand a innerhalb eines Nichtleiters mit der Permittivität ε aufeinander ausüben.

Die Punktladung Q_1 erzeugt im Abstand a die Feldstärke:

$$E_1 = \frac{|Q_1|}{\varepsilon_0 \cdot 4 \pi a^2} \quad (2.14)$$

Damit berechnen wir den Betrag der Kraft auf die Punktladung Q_2 , die sich im Feld der Punktladung Q_1 befindet:

$$F = |Q_2| \cdot E_1 = \frac{|Q_1| \cdot |Q_2|}{\varepsilon_0 \cdot 4 \pi a^2} \quad (2.15)$$

Eine Kraft von gleichem Betrag wirkt aufgrund des Feldes von Q_2 auf die Ladung Q_1 . Für die Richtungen der Kräfte gilt, dass Ladungen gleichen Vorzeichens einander abstoßen und Ladungen ungleichen Vorzeichens einander anziehen.

2.2.2 Kräfte auf einen Dipol

Bei einem **Dipol** weisen die Schwerpunkte zweier Ladungen $+Q$ und $-Q$ den Abstand s auf (s. Abschn. 6.5.2, Band 1). Das Produkt aus Ladung Q und Wegvektor \vec{s} wird als Dipolmoment \vec{p} bezeichnet:

$$\vec{p} = Q \cdot \vec{s}; \quad [p] = 1 \text{ C m} \quad (2.16)$$

Die Richtungen von \vec{p} und \vec{s} sind vom Schwerpunkt der negativen Ladung zum Schwerpunkt der positiven Ladung definiert. Wird der Dipol von einem äußeren elektrischen Feld \vec{E} erzeugt, so stimmen die Richtungen von \vec{p} , \vec{s} und \vec{E} überein.

Viele Moleküle wie z. B. H_2O sind auch im feldfreien Raum Dipole. Befindet sich ein solcher Dipol in einem *homogenen* elektrischen Feld, so werden auf die Ladungen gleich große, aber entgegengesetzt gerichtete Kräfte vom Betrag $F = QE$ ausgeübt.

Stimmt die Richtung des Dipolmoments nicht mit der Feldrichtung überein (Bild 2.3), so können die Kräfte \vec{F} und $-\vec{F}$ jeweils in eine Komponente $F_d = F \cdot \cos \varphi$ in Richtung der Dipolachse und eine Komponente $F_q = F \cdot \sin \varphi$ senkrecht zur Dipolachse zerlegt werden.

Die Kraftvektoren \vec{F}_d und $-\vec{F}_d$ verändern das Dipolmoment p ; die Kraftvektoren \vec{F}_q und $-\vec{F}_q$ erzeugen ein Drehmoment:

$$M = s F \cdot |\sin \varphi| = p E \cdot |\sin \varphi| \quad (2.17)$$

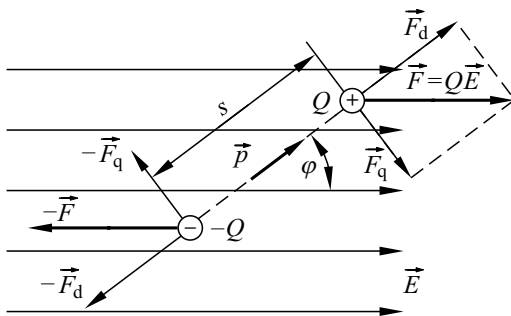


Bild 2.3 Dipol im homogenen elektrischen Feld

Die Richtung des Vektors \vec{M} ergibt sich aus den Richtungen von \vec{p} und \vec{E} nach der Rechtsschraubenregel:

$$\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E} \quad (2.18)$$

Bei einem in Feldrichtung ausgerichteten Dipol bewirken die Kräfte wegen $\varphi = 0$ und $M = 0$ nur eine *Verschiebung* der Ladungen.

Im *inhomogenen* Feld wirkt auf jeden Dipol ebenfalls ein Drehmoment, das den Dipol auszurichten sucht. Zusätzlich wird auf jeden Dipol eine Kraft ausgeübt.

Diese Kraft ist umso stärker, je größer die örtliche Änderung der elektrischen Feldstärke und je höher der Betrag p des Dipolmoments ist. Der Dipol wird von dieser Kraft in das Gebiet höherer Feldstärke gezogen.

Jeder Leiter wird im elektrostatischen Feld infolge der Influenz zu einem Dipol und kann – je nach Lage und Geometrie – in die Feldrichtung gedreht werden. In einem inhomogenen Feld wird er außerdem in das Gebiet höherer Feldstärke gezogen.

2.2.3 Kräfte auf die Platten eines Plattenkondensators

Bei der Berechnung der Kräfte gehen wir vom homogenen Feld eines Plattenkondensators aus, der geladen und von der Quelle getrennt ist, und lassen das inhomogene Randfeld unberücksichtigt. Die entgegengesetzten Ladungen auf den Platten der Fläche A ziehen einander an. Da die Ladungen die Elektroden nicht verlassen können, wirken diese Kräfte auf die Platten.

Wir stellen uns nun vor, dass sich eine der Platten unter dem Einfluss der Anziehungskraft \vec{F} um die infinitesimal kleine Strecke $d\vec{s}$ verschiebt. Hierbei wird die mechanische Arbeit verrichtet:

$$dW_{\text{mech}} = F \cdot ds \quad (2.19)$$

Da keine Ladung Q zu- oder abfließen kann, bleiben die Feldgrößen $D = Q/A$ und $E = \epsilon D$ konstant. Die mechanische Energie entsteht durch die

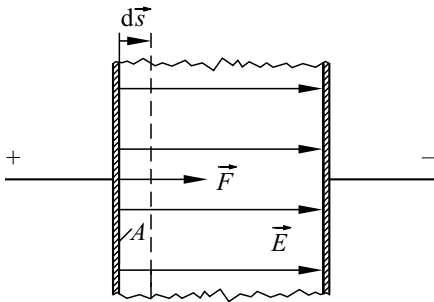


Bild 2.4 Kraft auf eine Kondensatorplatte

Verkleinerung des Feldraumes um das Volumen $dV = A \cdot ds$. Mit den Gln. (2.11 und 2.12) berechnen wir die hierdurch bewirkte Verringerung der elektrischen Feldenergie:

$$dW_{\text{el}} = -\frac{1}{2} \varepsilon E^2 A ds \quad (2.20)$$

Nach dem Energiesatz bleibt die Gesamtenergie unverändert und es gilt:

$$dW_{\text{mech}} + dW_{\text{el}} = 0 \quad (2.21)$$

Wir setzen die Gln. (2.19 und 2.20) in die Gl. (2.21) ein und erhalten die Kraft auf eine Kondensatorplatte:

$$F = \frac{A}{2} \varepsilon E^2 \quad (2.22)$$

Auf die andere Platte wirkt eine gleich große Kraft in entgegengesetzter Richtung.

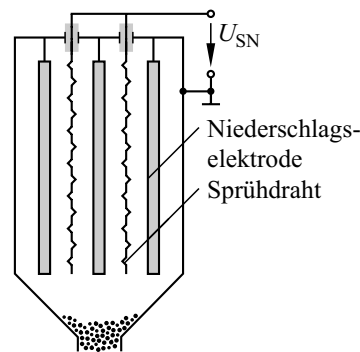
Da sich die Verschiebung ds bei der Berechnung heraushebt, kann sie beliebig klein sein. Die Kraft wirkt auch *ohne* jede Verschiebung; man bezeichnet die angewandte Methode deshalb als Prinzip der **virtuellen Verschiebung**.

Praxisbezug 2.1

In Kohlekraftwerken werden die Rauchgase vor der Entschwefelung von Staub- und Ascheteilchen im **Elektrofilter** gereinigt. In diesem Filter besteht ein elektrisches Gleichfeld zwischen den sog. *Sprühdrähten* und den Niederschlagselektroden, in dem die Staubteilchen zunächst ionisiert werden. Anschließend wandern sie infolge der durch

die Gl. (2.13) beschriebenen Kraft zu den geerdeten Niederschlagselektroden, von denen sie fortlaufend mit Hilfe eines Hammerwerks abgeklöpft werden.

Die Spannung $U_{\text{SN}} < 0$ zwischen den Sprühdrähten und den Niederschlagselektroden wird so eingestellt, dass sie knapp unterhalb der Durchschlagsspannung bleibt. Die Sprühdrähte haben voneinander einen Abstand $0,1 \dots 0,2$ m und der Abstand der Niederschlagselektroden, der *Gassenweite* genannt wird, liegt im Bereich $0,1 \dots 0,2$ m. Bei einem großen Kohlekraftwerk 700 MW hat der Elektrofilter etwa das Volumen eines Einfamilienhauses.



Als **Trenngrad** des Elektrofilters bezeichnet man die ausgefilterte Staubmenge, die auf die gesamte, dem Filter zugeführte Staubmenge bezogen wird. Unter optimalen Bedingungen wird bei Kohlekraftwerken ein Trenngrad über 99 % erreicht. Allerdings wird Feinstaub mit Partikelgrößen unter $1 \mu\text{m}$ relativ schlecht ausgefiltert, weshalb weitere Verbesserungen angestrebt werden. \square

Fragen

- Leiten Sie die Gleichung für die Kraft her, die zwei Punktladungen aufeinander ausüben.
- Warum wirkt auf einen Dipol im inhomogenen Feld eine Kraft? Welche Richtung hat sie?
- Warum wird ein langgestreckter Leiter im elektrischen Feld in die Feldrichtung gedreht?
- Wovon hängt die Kraft auf die Platten eines Plattenkondensators ab?
- Erläutern Sie das Prinzip der virtuellen Verschiebung bei der Berechnung der Kraft auf die Platten eines Plattenkondensators.

Aufgaben

2.5⁽¹⁾ Berechnen Sie die Kraft auf die 1 m² großen Platten eines Plattenkondensators mit dem Dielektrikum Luft, in dem die elektrische Feldstärke 20 kV/cm herrscht.

2.6⁽²⁾ Welchen Betrag hat das Drehmoment auf ein H₂O-Molekül ($p = 6,17 \cdot 10^{-30}$ C m), dessen Dipolmoment im Winkel 45° zur Richtung eines homogenen Feldes ($E = 4$ kV/cm) steht?

2.7⁽²⁾ Im elektrostatischen Feld einer geladenen Kugel ($Q_K = 2,5 \cdot 10^{-8}$ C) befindet sich ein ausge richteter Dipol ($Q = 4 \cdot 10^{-9}$ C; $s = 0,01$ mm), dessen Abstand vom Kugelmittelpunkt 8 mm beträgt. Das Feldmedium ist Luft. Welche Kraft wird auf den Dipol ausgeübt?

2.3 Energie im magnetischen Feld

Ziele: Sie können

- die magnetische Energie einer Leiteranordnung aus der zugeführten elektrischen Energie herleiten.
- die Gleichung für die Energiedichte eines Magnetfeldes angeben und für $\mu = \text{const.}$ lösen.
- die Energiedichte eines ferromagnetischen Körpers aus der Magnetisierungskurve ermitteln.
- die innere Induktivität eines Leiters mit Hilfe der magnetischen Energie berechnen.
- den Begriff Hysteresearbeit erläutern.
- beschreiben, wie ein Dauermagnet als Energiewandler wirkt.

In jedem Magnetfeld ist **magnetische Energie** enthalten; dies gilt sowohl für stromdurchflossene Leiteranordnungen als auch für Dauermagnete. Wird z. B. ein Eisenstück von einem Magneten angehoben, so gewinnt es potenzielle Energie, die nur aus dem Magnetfeld stammen kann.

2.3.1 Energie einer Leiteranordnung

Die magnetische Energie W_m einer Leiteranordnung (z. B. einer Spule) stammt aus der Quelle, welche die Leiteranordnung speist. Wir berechnen deshalb die magnetische Energie mit der elektrischen Energie W_{el} , die der Leiteranordnung zugeführt wird. Dabei wird ein Teil der elektrischen Energie irreversibel in Wärme W_W umgewandelt:

$$W_{el} = W_W + W_m \tag{2.23}$$

Die Ersatzschaltung hierfür ist eine Reihenschaltung aus einem idealen OHMSchen Zweipol R und einem idealen induktiven Zweipol L ; dabei setzen wir voraus, dass sich u und i langsam ändern.

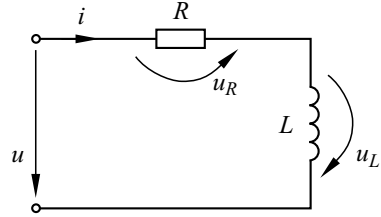


Bild 2.5 Ersatzschaltung der Leiteranordnung

In die Gleichung für die elektrische Energie, die der Leiteranordnung von der Quelle in der Zeitspanne $0 \leq t \leq t_1$ zugeführt wird, setzen wir die Maschengleichung $u = u_R + u_L$ ein:

$$W_{el} = \int_0^{t_1} u i \, dt = \int_0^{t_1} u_R i \, dt + \int_0^{t_1} u_L i \, dt \tag{2.24}$$

Die am idealen OHMSchen Zweipol R in Wärme umgewandelte Energie hängt vom Widerstand R und von der Zeitspanne t_1 ab:

$$W_W = \int_0^{t_1} u_R i \, dt = R \int_0^{t_1} i^2 \, dt \tag{2.25}$$

Unter der Voraussetzung, dass die Leiteranordnung zum Zeitpunkt $t = 0$ stromlos war, ist die magnetische Energie zum Zeitpunkt $t = t_1$:

$$W_m = \int_0^{t_1} u_L i \, dt \tag{2.26}$$

Ist die Umgebung der stromführenden Leiter frei von ferromagnetischen Materialien, so erhalten wir mit der Gl. (1.59) für $L = \text{const.}$:

$$W_m = \int_0^{t_1} L \frac{di}{dt} \cdot i \, dt = L \int_0^{i_1} i \, di = \frac{1}{2} L i_1^2 \tag{2.27}$$

Die Voraussetzung $L = \text{const.}$ ist näherungsweise erfüllt, wenn sich die Kennlinie $\Psi_m = f(I)$ durch eine Gerade durch den Nullpunkt annähern lässt.

Die Gl. (2.27) zeigt, dass die magnetische Energie W_m weder von der Zeit noch vom Zeitverlauf des Stromes abhängt, sondern nur vom Augenblickswert i_1 des Stromes i zum Zeitpunkt t_1 . Allgemein gilt:

$$W_m = \frac{1}{2} L i^2 \quad (2.28)$$

Wächst die Stromstärke an ($di/dt > 0$), so wird der Quelle elektrische Energie entnommen und im Magnetfeld als magnetische Energie gespeichert. Sinkt die Stromstärke ab, so wird magnetische Energie als elektrische Energie an den Stromkreis zurückgegeben.

Bei einem Gleichstrom wird die magnetische Energie $W_m = 0,5 L I^2$ der Leiteranordnung beim Einschalten des Stromes zugeführt.

Ist die Induktivität der Leiteranordnung stromabhängig, so berechnen wir die magnetische Energie mit der differentiellen Induktivität und setzen die Gl. (1.63) in die Gl. (2.26) ein:

$$W_m = \int_0^{i_1} l(i) i \, di \quad (2.29)$$

2.3.2 Energiedichte im Magnetfeld

Wir wollen nun einen allgemeinen Ausdruck suchen, mit dem wir die magnetische Energie eines Feldgebietes berechnen können. Dazu gehen wir von einer verlustlosen Spule aus, in der ein Strom i den Verkettungsfluss $\Psi_m = N \Phi$ hervorruft. Unter der Voraussetzung, dass die Spule zum Zeitpunkt $t = 0$ stromlos war, lässt sich die magnetische Energie für den Zeitpunkt t_1 mit der induktiven Spannung entsprechend Gl. (1.38) berechnen:

$$W_m = \int_0^{t_1} u_L i \, dt = \int_0^{\Phi_1} N i \, d\Phi \quad (2.30)$$

Dabei ist Φ_1 der Fluss zum Zeitpunkt t_1 . Wir nehmen zunächst an, dass das Feld der Spule homogen ist, und setzen $\Phi = B A$ an. Außerdem nehmen wir an, dass im magnetischen Kreis nur ein einziger magnetischer Widerstand vorhanden ist und für die Durchflutung $Ni = \Theta = H l$ gilt. Wir dividieren die magnetische Energie

$$W_m = \int_0^{B_1} H \cdot l \cdot A \cdot dB \quad (2.31)$$

durch das Volumen $V = A l$ des vom homogenen Magnetfeld erfüllten Raumes und erhalten die **magnetische Energiedichte** w_m in einem Punkt eines beliebigen magnetischen Feldes:

$$w_m = \int_0^{B_1} H \, dB \quad (2.32)$$

Die gesamte Energie eines von einem *inhomogenen* Magnetfeld erfüllten Feldraumes kann durch Integration berechnet werden:

$$W_m = \int_V w_m \, dV \quad (2.33)$$

In einem *homogenen* Magnetfeld gilt:

$$W_m = w_m V \quad (2.34)$$

Wenn die Permeabilität μ von der Feldstärke H bzw. von der Flussdichte B unabhängig ist, lässt sich die Gl. (2.32) für $\mu = \text{const.}$ direkt lösen:

$$w_m = \frac{1}{\mu} \int_0^{B_1} B \, dB = \frac{B_1^2}{2\mu} \quad (2.35)$$

Bei nicht konstanter Permeabilität kann die Energiedichte aus der Fläche zwischen der Magnetisierungskurve und der B -Achse ermittelt werden.

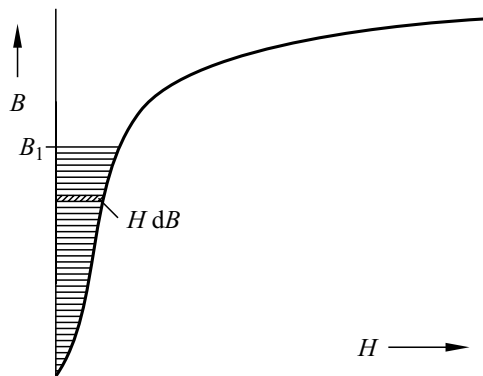


Bild 2.6 Zur Ermittlung der magnetischen Energiedichte bei nicht konstanter Permeabilität

Beispiel 2.3

Wir wollen die magnetische Energie im Eisen und im Luftspalt eines magnetischen Kreises für $B_L = B_{Fe} = 1,2 \text{ T}$ ermitteln (s. Beispiel 7.7, Band 1).

$A = 7,07 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$; $l_{Fe} = 942 \text{ mm}$; $l_L = 1 \text{ mm}$

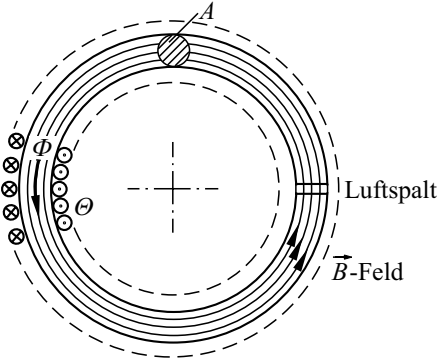


Bild 2.7 Magnetischer Kreis einer Kreisringspule mit Eisenkern und Luftspalt

Mit der Gl. (2.35) berechnen wir für $\mu = \mu_0$ die Energiedichte im Luftspalt:

$$w_{mL} = \frac{B_L^2}{2\mu_0} = 573 \frac{\text{kJ}}{\text{m}^3}$$

In 1 cm^3 Luft ist demnach bei $1,2 \text{ T}$ die magnetische Energie $0,57 \text{ J}$ enthalten. Die magnetische Energie ist wesentlich höher als die elektrische Energie im Beispiel 2.2.

Die magnetische Energiedichte im Eisen ist die Fläche zwischen der Magnetisierungskurve (Schmiedestahl, Kurve a im Anhang A7) und der B -Achse. Für $1,2 \text{ T}$ erhalten wir:

$$w_{mFe} = 115 \text{ J/m}^3$$

Damit ergibt sich für 1 cm^3 Eisen bei $1,2 \text{ T}$ die Energie $0,115 \text{ mJ}$.

Die magnetische Energie der Feldgebiete berechnen wir, indem wir die Energiedichte mit dem jeweiligen Volumen multiplizieren:

$$W_{mL} = w_{mL} \cdot l_L \cdot A = 405 \text{ mJ}$$

$$W_{mFe} = w_{mFe} \cdot l_{Fe} \cdot A = 76,4 \text{ mJ}$$

2.3.3 Innere Induktivität

Mit der Gl. (2.28) können wir die innere Induktivität L_i eines Leiters aus der magnetischen Energie W_m berechnen, die im Inneren des Leiters bei der Stromstärke i enthalten ist:

$$L_i = \frac{2 W_m}{i^2} \tag{2.36}$$

Als Beispiel wählen wir einen langen, geraden Leiter von kreisförmigem Querschnitt aus einem Material konstanter Permeabilität, der von einem Strom i durchflossen wird. Da das Magnetfeld inhomogen ist (s. Band 1, Abschn. 7.4.2), integrieren wir gemäß Gl. (2.33) die Energiedichte über dem Leitervolumen V :

$$W_m = \frac{\mu}{2} \int_V H^2 dV \tag{2.37}$$

In diese Gleichung setzen wir den Zusammenhang

$$H = \frac{i}{2\pi r_a^2} \cdot r \tag{s. Band 1, Gl. 7.34}$$

zwischen der Feldstärke H und dem Gesamtstrom i ein. Dabei setzen wir voraus, dass der Strom gleichmäßig über dem Querschnitt des Leiters verteilt ist; diese Voraussetzung ist z. B. bei Wechselströmen hoher Frequenz wegen des Skin-effektes nicht erfüllt.

Zur Durchführung der Integration denken wir uns den Leiter mit der Länge l in Röhren mit dem Radius r und der Dicke dr zerlegt.

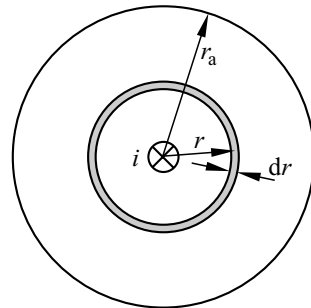


Bild 2.8 Zur Berechnung der inneren Induktivität eines langen, geraden Leiters

Wir setzen nun die Gleichungen für die Feldstärke H und das Volumen $dV = l \cdot 2 \pi r \cdot dr$ einer Röhre in die Gl. (2.37) ein und berechnen die im Leiter enthaltene magnetische Energie:

$$W_m = \frac{\mu l i^2}{4 \pi r_a^4} \int_0^{r_a} r^3 dr = \frac{\mu l i^2}{16 \pi} \quad (2.38)$$

Durch Einsetzen in die Gl. (2.36) erhalten wir die innere Induktivität L_i eines langen, geraden Leiters für $\mu = \text{const.}$:

$$L_i = \frac{\mu l}{8 \pi} \quad (2.39)$$

Bei einer Doppelleitung muss die magnetische Energie in *beiden* Leitern berücksichtigt werden. Die innere Induktivität L_i der Doppelleitung ist doppelt so groß wie die des langen Leiters.

2.3.4 Hysteresearbeit

Mit Hilfe der magnetischen Energiedichte können wir die Energie berechnen, die ein ferromagnetischer Körper beim Durchlaufen einer Hystereseschleife aufnimmt. Dieser technisch wichtige Vorgang läuft z. B. ab, wenn eine Spule mit Eisenkern von einem Wechselstrom durchflossen wird. Wir setzen im Folgenden voraus, dass der Eisenkern mit dem Volumen V von einem homogenen Magnetfeld durchsetzt wird.

Beim Durchlaufen des Kurvenstückes 1-2 der Hystereseschleife (Bild 2.9) nimmt der Eisenkern die Energie auf:

$$W_{12} = V w_{12} = V \int_1^2 H dB \quad (2.40)$$

Die Energie W_{12} entspricht der Fläche zwischen dem Kurvenstück 1-2 und der B -Achse. Da H und dB dort positiv sind, ist auch $W_{12} > 0$ und der Eisenkern nimmt magnetische Energie auf; er wirkt dabei als Verbraucher elektrischer Energie.

Beim Durchlaufen des Kurvenstückes 2-3 der Hystereseschleife ist H positiv, aber dB negativ, denn die Flussdichte B wird kleiner. Wegen $W_{23} < 0$ gibt der Eisenkern die magnetische Ener-

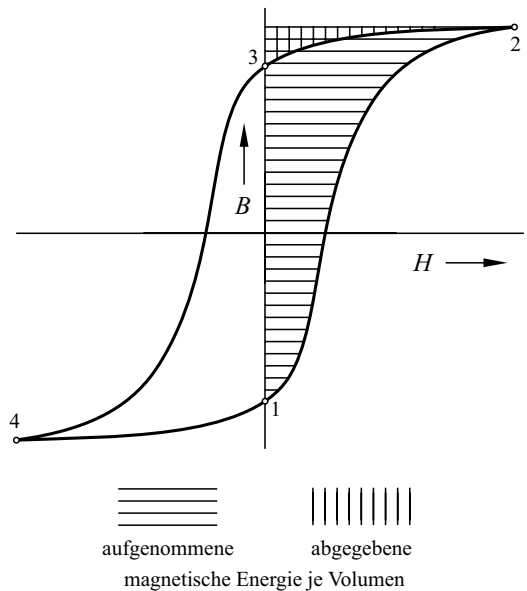


Bild 2.9 Hystereseschleife eines ferromagnetischen Körpers, Erläuterung der Hysteresefläche

gie ab, die der Fläche zwischen dem Kurvenstück 2-3 und der B -Achse entspricht:

$$W_{23} = V w_{23} = V \int_2^3 H dB \quad (2.41)$$

Beim Durchlaufen der halben Hystereseschleife auf dem Weg 1-2-3 wird dem Eisenkern letztlich die Energie zugeführt, die der nur waagrecht schraffierten Fläche im Bild 2.9 entspricht.

Im Punkt 3 hat die magnetische Energie des Eisenkerns ein Minimum, da der Eisenkern bei der Fortsetzung des Umlaufs wieder Energie aufnimmt; dies gilt aus Symmetriegründen auch für den Punkt 1.

Beim Durchlaufen des Kurvenstückes 3-4-1 wiederholen sich die Vorgänge, die für den Weg 1-2-3 beschrieben wurden.

Beim einmaligen Durchlaufen der gesamten Hystereseschleife wird die Fläche zwischen ihren Ästen umfahren; sie wird als **Hysteresefläche** bezeichnet und entspricht der **spezifischen Hysteresearbeit** w_H :

$$w_H = \oint H dB \quad (2.42)$$

Die spezifische Hysteresearbeit hat die Einheit J/m^3 und ist damit eine Energiedichte. Mit der Gl. (2.34) berechnen wir die **Hysteresearbeit** W_H :

$$W_H = V w_H = V \oint H dB \quad (2.43)$$

Die Hysteresearbeit ist die Energie, die bei einem Ummagnetisierungszyklus im Eisenkern in Wärme umgewandelt wird; sie hängt von der Form der Hystereseschleife und von der Flussdichte ab, die im Punkt 2 bzw. 4 erreicht wird.

Bei elektrischen Maschinen wird die Hystereseschleife häufig (z.B. 50-mal je Sekunde bei 50 Hz) durchlaufen. Damit die Erwärmung infolge der Hysteresearbeit gering bleibt, werden Werkstoffe mit kleiner Hysteresefläche verwendet.

2.3.5 Magnetischer Kreis mit Dauermagnet

Der Vorteil eines **Dauermagneten** gegenüber einem Elektromagneten liegt darin, dass bei der Aufrechterhaltung des Magnetfelds keine Wärmeenergie entsteht.

Ein Dauermagnet wird bei seiner Herstellung im Magnetfeld eines Elektromagneten magnetisiert. Befindet er sich dabei in einem geschlossenen magnetischen Kreis ohne Streufeld und ohne Luftspalt bei ideal magnetisch leitenden Weicheisenteilen, so stellt sich nach der Magnetisierung der Arbeitspunkt 3 bei der Remanenzflussdichte B_r ein. In

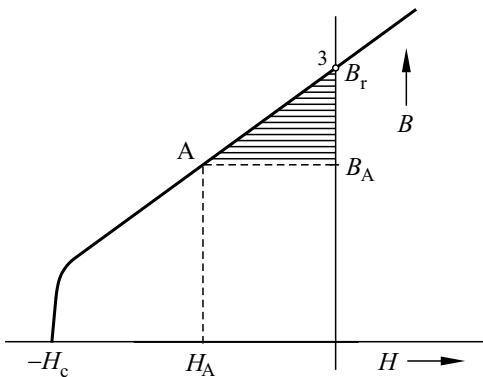


Bild 2.10 Entmagnetisierungskurve

diesem Punkt der **Entmagnetisierungskurve** (Bild 2.10) hat die magnetische Energie des Dauermagneten ein Minimum.

Wird der magnetische Kreis geöffnet, so stellt sich der Arbeitspunkt A ein. Dies kann z. B. dadurch erfolgen, dass der bewegliche Anker gegen die Zugkraft verschoben wird.

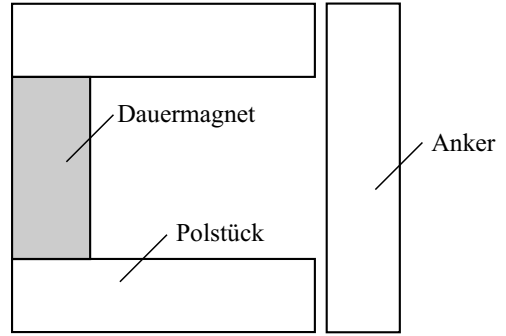


Bild 2.11 Geöffneter Kreis mit Dauermagnet

Bei der Untersuchung der Energie des magnetischen Kreises vernachlässigen wir die magnetischen Spannungen an den Weicheisenteilen, lassen die Streuung außer Betracht und nehmen an, dass sowohl im Dauermagnet als auch im Luftspalt ein homogenes Feld vorliegt.

Beim Durchlaufen des Kurvenstückes 3-A sind sowohl H als auch dB negativ. Die Energiedichte nach Gl. (2.32), die im Bild 2.10 als schraffierte Fläche dargestellt ist, ist daher positiv; der Dauermagnet nimmt magnetische Energie auf.

Der Luftspalt mit dem Volumen V_L nimmt bei der Öffnung des magnetischen Kreises die Energie $W_{mL} = V_L (B_L)^2 / (2 \mu_0)$ auf.

Die Summe der magnetischen Energien von Luftspalt und Dauermagnet wird dem magnetischen Kreis beim Öffnen als mechanische Energie durch die Verschiebung des Ankers zugeführt. Der Dauermagnet wirkt dabei als *Energiewandler*, der die zugeführte *mechanische* Energie in *magnetische* Energie umwandelt.

Die Anteile von Luftspalt und Dauermagnet an der gesamten magnetischen Energie hängen vom Verlauf der Entmagnetisierungskurve und von der Lage des Arbeitspunktes A ab.