



Leseprobe

Robert Galata, Sandro Scheid

Deskriptive und Induktive Statistik für Studierende der BWL

Methoden - Beispiele - Anwendungen

Herausgegeben von Robert Galata, Markus Wessler

ISBN (Buch): 978-3-446-43255-0

ISBN (E-Book): 978-3-446-43376-2

Weitere Informationen oder Bestellungen unter

<http://www.hanser-fachbuch.de/978-3-446-43255-0>

sowie im Buchhandel.

5

Das Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten

In nahezu allen Anwendungsgebieten der Wirtschaftswissenschaften werden häufig Vorgänge beobachtet oder Versuche durchgeführt, die zufallsabhängig sind. Beispiele sind etwa Staus im Straßenverkehr, Warteschlangen vor Bedienschaltern, das Zustandekommen der Aktienkurse, die Durchführung einer Meinungsumfrage sowie die Qualitätskontrolle einer laufenden Produktion. Von besonderer Bedeutung für die Statistik ist das Experiment der zufälligen Ziehung einer Stichprobe aus einer Grundgesamtheit. Mit derartigen Zufallssituationen werden wir uns in diesem Kapitel auseinandersetzen. Da das Verständnis der Wahrscheinlichkeitsrechnung anhand realer Entscheidungssituationen aus dem Wirtschaftsleben jedoch oft schwer fällt, erläutern wir die Regeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung häufig an einfacheren Zufallsvorgängen aus dem Bereich der Glücksspiele, wie etwa Würfel- oder Kartenspiele.

■ 5.1 Zufallsvorgänge und deren Beschreibung

Die Wahrscheinlichkeitstheorie beschäftigt sich mit der Beschreibung von Vorgängen, deren Ergebnis ungewiss ist.

- Wirft man einen Würfel, so weiß man zwar vorab, dass er eine Augenzahl zwischen eins und sechs zeigen wird. Welche Augenzahl dies aber ist, ist erst nach dem Wurf bekannt.
- Ein Versicherer für Kraftfahrzeuge kann zu Beginn des Jahres nicht sagen, wie viele Schadensmeldungen im anstehenden Jahr auf ihn zukommen, es wird aber in jedem Fall eine endliche, ganze Zahl sein.
- Einem Anleger, der in Aktien investiert, ist seine Rendite im nächsten Monat unbekannt. Die möglichen Ergebnisse sind nach unten durch -100% beschränkt und nach oben hin offen.

Zufallsvorgang

Ein Zufallsvorgang führt zu einem von mehreren sich gegenseitig ausschließenden Ergebnissen. Es ist vor der Durchführung ungewiss, welches Ergebnis eintreten wird.

Beispiel 5.1 Würfeln mit einem Würfel

Es ist naheliegend, diesen Zufallsvorgang oder Versuch durch die überhaupt möglichen Versuchsergebnisse – die 6 verschiedenen Augenzahlen – modellmäßig zu kennzeichnen, also etwa durch die 6 verschiedenen Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6. ■

Die Menge dieser möglichen Versuchsergebnisse wird im Folgenden immer mit dem griechischen Buchstaben Ω bezeichnet; sie dient als Ausgangspunkt für die mathematische Erfassung eines zufälligen Geschehens. Die Elemente von Ω stellen also die möglichen Versuchsausgänge dar und werden kurz als Elementarereignisse bezeichnet.

Elementarereignis

Die einzelnen – nicht weiter zerlegbaren – möglichen Ergebnisse eines Zufallsvorgangs, die sich gegenseitig ausschließen, werden als Elementarereignisse ω bezeichnet.

Ergebnisraum

Die Menge Ω aller Elementarereignisse eines Zufallsvorgangs nennen wir Ergebnisraum.

Beispiel 5.2 Münzwurf

Bezeichnen wir das Elementarereignis, dass die Münze nach dem Wurf „Kopf“ zeigt mit K , und dass sie „Zahl“ zeigt mit Z , ergibt sich der Ergebnisraum

$$\Omega = \{K, Z\}.$$

Beispiel 5.3 Zweimaliger Münzwurf

Hier sind die Elementarereignisse geordnete Paare (i, j) , wobei i das Ergebnis des ersten Wurfes und j das Ergebnis des zweiten Wurfes darstellt. Der Ergebnisraum ist damit

$$\Omega = \{(K, K), (K, Z), (Z, K), (Z, Z)\} \quad \text{bzw. kürzer} \quad \Omega = \{KK, KZ, ZK, ZZ\}.$$

Beispiel 5.4 Zweimaliger Wurf eines Würfels

Ein Würfel wird zweimal hintereinander geworfen. Jedes Ergebnis ω dieses Zufallsexperimentes besteht aus einem Zahlenpaar (i, j) , wobei i und j jeweils eine der 6 Augenzahlen sind. Bei $i = 1, \dots, 6$ und $j = 1, \dots, 6$ ergeben sich $6 \cdot 6 = 36$ Elementarereignisse und der folgende Ergebnisraum:

$$\begin{aligned} \Omega = \{ & (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), \\ & (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), \\ & (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), \\ & (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), \\ & (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), \\ & (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6), \}. \end{aligned}$$

Allgemein: Das Zufallsexperiment „ n -maliger Wurf eines Würfels“ besitzt einen Ergebnisraum, der aus 6^n Elementarereignissen besteht. Jedes Elementarereignis ist ein n -Tupel von Augenzahlen.

Beispiel 5.5 Abzählbar unendliche Anzahl von Münzwürfen

Eine Münze wird so oft geworfen, bis zum ersten Mal „Zahl“ erscheint. Man kann die Anzahl der Elementarereignisse in Ω durch keine noch so große Zahl n beschränken, denn es ist möglich, dass n mal hintereinander „Kopf“ erscheint. Im Unterschied zu den bisherigen Beispielen besteht hier Ω aus unendlich vielen Elementarereignissen, die man jedoch noch abzählen kann.

$$\Omega = \{Z, KZ, K K Z, K K K Z, K K K K Z, \dots\}$$

Beispiel 5.6 Bedienschalter

Ein Kunde will bei der Post ein Paket versenden. Er interessiert sich für die Wartezeit, die er vor dem Schalter bis zu seiner Bedienung verbringen muss. Seine Wartezeit kann zwischen 0 (falls keine Kunde vor dem Schalter steht) und einer maximalen Zeit T (z. B. Schalterschluss) schwanken. Misst er seine Wartezeit in Minuten, so lautet der Ergebnisraum dieses Zufallsexperiments $\Omega = \{0, 1, \dots, T\}$. Lässt man Fragen der Messgenauigkeit außer Acht und betrachtet man die Zeit als stetige Größe, so ergibt sich als Ergebnisraum

$$\Omega = \{x | 0 \leq x \leq T, x \text{ reell}\}.$$

Neben den einzelnen möglichen Elementarereignissen eines Zufallsexperimentes betrachtet man vor allem gewisse Ereignisse, die aus einer Menge von Elementarereignissen bestehen. Wir bezeichnen solche Ereignisse mit großen lateinischen Buchstaben.

Ereignis

Ein zufälliges Ereignis ist eine Teilmenge von Ω . Man sagt, das Ereignis A tritt ein, wenn das Zufallsexperiment ein Ergebnis ω liefert, das zu A gehört.

Beispiel 5.7 Ereignisse

Beim Zufallsexperiment „Würfeln mit einem Würfel“ mit $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ sind folgende Ereignisse denkbar:

- A_1 : „Die geworfene Augenzahl ist gerade“, d. h. $A_1 = \{2, 4, 6\}$
- A_2 : „Die 1 wird gewürfelt“, d. h. $A_2 = \{1\}$

Mögliche Ereignisse beim Zufallsexperiment „Zweimaliger Wurf eines Würfels“ (siehe *Beispiel 5.4*):

- A_1 : „Die Summe der Augenzahlen ist mindestens 11“, d. h. $A_1 = \{(5, 6), (6, 5), (6, 6)\}$
- A_2 : „Es wird zweimal die 6 gewürfelt“, d. h. $A_2 = \{(6, 6)\}$
- A_3 : „Die zuerst gewürfelte Zahl ist eine 1“,
d. h. $A_3 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6)\}$

Im Zufallsexperiment „Abzählbar unendliche Anzahl von Münzwürfen“ (siehe *Beispiel 5.5*) lässt sich folgendes Ereignis betrachten:

- A : „Die Münze wird mindestens zweimal und höchstens fünfmal geworfen“, d. h. $A = \{KZ, KKZ, KKKZ, KKKKZ\}$

Im *Beispiel 5.6* „Bedienschalter“ interessiert man sich für folgendes Ereignis:

- A_1 : „Die Wartezeit beträgt zwischen 2 und 4 Minuten“, d. h. $A_1 = \{x | 2 \leq x \leq 4, x \text{ reell}\}$
- A_2 : „Die Wartezeit liegt unter 3 Minuten“, d. h. $A_2 = \{x | 0 \leq x < 3, x \text{ reell}\}$ ■

Sicheres Ereignis

Ein Ereignis wird als sicheres Ereignis bezeichnet, wenn das Ereignis mit dem Ergebnisraum Ω identisch ist. Da Ω alle Elementarereignisse ω enthält, tritt es bei jedem Ausführen des Zufallsvorgangs immer ein.

Unmögliches Ereignis

Ein Ereignis tritt sicher nie ein und gilt als unmöglich, wenn es gleich der sog. leeren Menge \emptyset ist. Da $\emptyset = \{\}$ kein Element enthält, tritt dieses Ereignis niemals ein.

■ 5.2 Die Verknüpfung von Ereignissen

Im Zusammenhang mit Ereignissen stehen Fragen wie „Treten zwei bestimmte Ereignisse ein?“ oder „Tritt zumindest eines von mehreren Ereignissen ein?“. Solche Fragen werden durch die Verknüpfung von Ereignissen behandelt. Betrachtet man die Mengen der Elementarereignisse, die die Ereignisse repräsentieren, so entspricht die Verknüpfung den Mengenoperationen.

Ereignisse und Ergebnisraum sowie die Verknüpfung von Ereignissen lassen sich im sog. Venn-Diagramm anschaulich darstellen. Die Ereignisse werden dabei als Flächen dargestellt, die sich überlappen können.

Vereinigung

Die Vereinigung zweier Ereignisse A und B ist definiert als die Menge der Elementarereignisse ω , die entweder zu A allein oder zu B allein oder sowohl zu A und zu B gemeinsam gehören.

$$A \cup B = \{\omega | \omega \in A \text{ oder } \omega \in B\}$$

Das Ereignis $A \cup B$ tritt somit genau dann ein, wenn A oder B allein oder gemeinsam eintreten. Wir sagen kurz „ A oder B “ treten ein.

Durchschnitt

Der Durchschnitt zweier Ereignisse A und B ist definiert als die Menge der Elementarereignisse ω , die sowohl zu A als auch zu B gehören.

$$A \cap B = \{\omega | \omega \in A \text{ und } \omega \in B\}$$

Das Ereignis $A \cap B$ tritt somit genau dann ein, wenn Ereignis A und Ereignis B gemeinsam eintreten. Wir sagen kurz „ A und B “ treten ein.

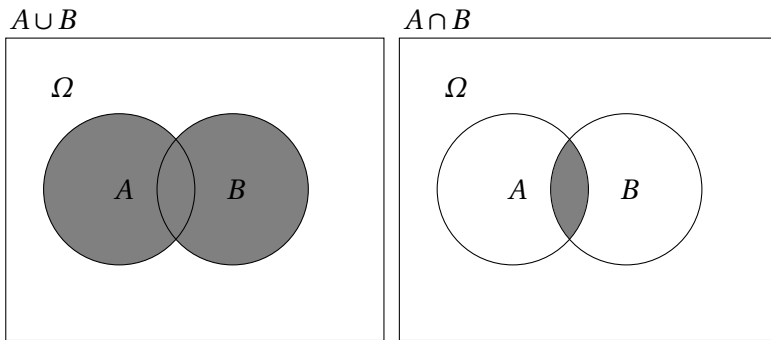


Bild 5.1 Venn-Diagramm Vereinigung und Durchschnitt

Differenz

Ein Ereignis, welches sich dadurch ergibt, dass die Elemente, die die Ereignisse A und B gemeinsam haben, von den Elementen des Ereignisses A abgezogen werden, heißt Differenz von A und B .

$$A \setminus B = \{\omega | \omega \in A \text{ und } \omega \notin B\}$$

Das Ereignis $A \setminus B$ tritt somit genau dann ein, wenn zwar A , aber nicht B eintritt.

Komplement

Ein Ereignis, das genau dann eintritt, wenn sich ein ω ergibt, das nicht zu dem Ereignis A gehört, heißt Komplement von A .

$$\bar{A} = \Omega \setminus A = \{\omega | \omega \in \Omega \text{ und } \omega \notin A\}$$

Wir sagen kurz, das Ereignis nicht A tritt ein.

Disjunkte Ereignisse

Zwei Ereignisse heißen disjunkt oder unvereinbar, wenn gilt

$$A \cap B = \emptyset.$$

Bemerkung:

Zwei Mengen sind also disjunkt, wenn sie keine Elementarereignisse gemeinsam haben. Damit gilt speziell, dass Elementarereignisse paarweise disjunkt sind, d. h. $\{\omega_i\} \cap \{\omega_j\} = \emptyset$ für $i \neq j$. Die Vereinigung und der Durchschnitt von abzählbar unendlich vielen Ereignissen $A_1, A_2, A_3, A_4, \dots$ werden analog wie oben definiert.

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \dots$$

besteht aus genau den Elementarereignissen von Ω , die zumindestens zu einem der Ereignisse A_i gehören und

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \dots$$

aus genau den Elementarereignissen von Ω , die zu jedem dieser Ereignisse A_i gehören.

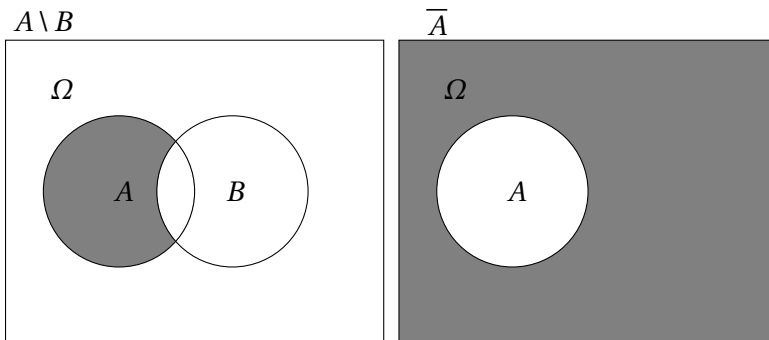


Bild 5.2 Venn-Diagramm Differenz und Komplement

Beispiel 5.8 Zweimaliger Wurf eines Würfels (Fortsetzung)

Wir betrachten in *Beispiel 5.4* (siehe auch *Beispiel 5.7*) die Ereignisse

A_1 : „Die Summe der Augenzahlen ist mindestens 11“

A_2 : „Es wird zweimal die 6 gewürfelt“

A_3 : „Die zuerst gewürfelte Zahl ist eine 1“

A_2 und A_3 sind unvereinbare Ereignisse, d. h. es gilt $A_2 \cap A_3 = \emptyset$. Weiter gilt:

$$A_1 \cap A_1 = \{(6, 6)\}$$

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (5, 6), (6, 5), (6, 6)\}$$

$$A_1 \setminus A_2 = \{(5, 6), (6, 5)\}$$



Beispiel 5.9 Roulette

Ein Roulettespieler setzt stets auf die Farbe rot (Ereignis A) und auf den Zahltyp „gerade“ (Ereignis B). Er interessiert sich für das Ereignis, dass die Kugel auf einem roten Feld mit gerader Zahl zum Stehen kommt. Dies entspricht dem Ereignis $A \cap B$. Weiter interessiert er sich für das Ereignis, dass rot oder eine gerade Zahl kommt, also für $A \cup B$ und schließlich für den Fall, dass weder rot noch eine gerade Zahl kommt. Das entspricht dem Ereignis, dass A oder B nicht eintritt, also $\overline{A \cup B}$. ■

Jedem Ereignis A eines Zufallsvorganges oder Zufallsexperimentes soll nun eine Wahrscheinlichkeit zugeordnet werden, welche die Chance für das Eintreten von A beschreibt.

Dazu wird zu jedem Zufallsexperiment stets eine Ereignisalgebra angegeben. Eine Ereignisalgebra ist ein Mengensystem bzw. ein System von Ereignissen. Man verlangt, dass alle Ereignisse, die in praktischen Anwendungen auftreten können, in der Ereignisalgebra enthalten sind. Darüber hinaus sollen die vorher genannten Verknüpfungen innerhalb des Mengensystems durchführbar sein, d. h. genauer: Mit dem Ereignis A soll auch sein Komplement \overline{A} und mit endlich oder abzählbar unendlich vielen Ereignissen sollen stets auch alle daraus herstellbaren Durchschnitte und Vereinigungen zur Ereignisalgebra gehören.

Im Falle von endlich oder abzählbar vielen Elementarereignissen verwendet man die Menge aller Teilmengen des Ergebnisraums Ω , die Potenzmenge $\mathfrak{P}(\Omega)$ von Ω . Auch für überabzählbare Ergebnismengen Ω lassen sich Ereignisalgebren konstruieren. Sie sind in der Regel kleiner als die Potenzmenge von Ω , pathologische Teilmengen werden entfernt, aber doch groß genug, um alle in Theorie und Praxis benötigten Ereignisse zu enthalten. Ist Ω z. B. die Menge der reellen Zahlen, so bildet die Menge aller denkbaren Zahlenintervalle eine Ereignisalgebra.

Beispiel 5.10 Ereignisalgebra Münzwurf

Der Ergebnisraum beim Münzwurf besteht aus den zwei Elementarereignissen „Kopf“ und „Zahl“, d. h. $\Omega = \{K, Z\}$. Die dem Münzwurf zugeordnete Ereignisalgebra ist die Potenzmenge von Ω

$$\mathfrak{P}(\Omega) = \{\{K\}, \{Z\}, \Omega, \emptyset\}.$$

Die Ereignisalgebra besteht hier aus vier Ereignissen. ■

Bemerkung:

Besteht eine Menge aus n Elementen, so schreiben wir dafür kurz: $|A| = n$. Enthält der Ergebnisraum Ω n Elementarereignisse, d. h. $|\Omega| = n$, so besteht die Ereignisalgebra von Ω aus 2^n Ereignissen, d. h. $|\mathfrak{P}(\Omega)| = 2^n$.

Beispiel 5.11 Ereignisalgebra beim Würfeln mit einem Würfel

Der Ergebnisraum beim Würfeln besteht aus 6 Elementarereignissen: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Da Ω endlich ist, ist die Ω zugeordnete Ereignisalgebra die Potenzmenge von Ω . $|\mathfrak{P}(\Omega)| = 2^6 = 64$, d. h. die Ereignisalgebra besteht aus 64 Ereignissen. Die ein- und zweielementigen Ereignisse sind nachfolgend vollständig aufgelistet. Das Ereignis $\{1, 3, 5\}$ bedeutet eine 1 oder eine 3 oder eine 5 zu werfen.

$$\mathfrak{P}(\Omega) = \left\{ \begin{array}{cccccc} \{1\}, & \{2\}, & \{3\}, & \{4\}, & \{5\}, & \{6\}, \\ \{1,2\}, & \{1,3\}, & \{1,4\}, & \{1,5\}, & \{1,6\}, & \{2,3\}, \\ \{2,4\}, & \{2,5\}, & \{2,6\}, & \{3,4\}, & \{3,5\}, & \{3,6\}, \\ \{4,5\}, & \{4,6\}, & \{5,6\}, & & & \\ \{1,2,3\}, & \{1,2,4\}, & \{1,2,5\}, & \{1,2,6\}, & \{1,3,4\}, & \{1,3,5\}, \\ \{1,3,6\}, & \dots & \dots & \dots & \Omega, & \emptyset \end{array} \right\}$$

Wir setzen im Folgenden voraus, dass einem Zufallsexperiment mit seiner Ergebnismenge auch stets eine geeignete Ereignisalgebra zugeordnet ist, ohne dies eigens zu erwähnen.

■ 5.3 Die Axiome von Kolmogoroff

Das Ergebnis eines Zufallsexperimentes ist nicht vorhersehbar. Es ist höchstens möglich, den Ereignissen gewisse Wahrscheinlichkeiten zuzuordnen. Während es sich bei den Ereignissen um Mengen handelt, sind Wahrscheinlichkeiten reelle Zahlen. Eine Wahrscheinlichkeit ist also nichts anderes als ein Maß zur Quantifizierung des Grades der Sicherheit oder Unsicherheit des Eintretens eines bestimmten Ereignisses im Rahmen eines Zufallsexperimentes.

Jede Funktion P , die einem Ereignis A eine Wahrscheinlichkeit $P(A)$ zuordnet, wird als Wahrscheinlichkeitsfunktion und $P(A)$ als Wahrscheinlichkeit von A bezeichnet, wenn sie die drei folgenden, von A. N. Kolmogoroff 1933 formulierten Axiome erfüllt:

Axiome der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Axiom 1 Jedem Ereignis A wird eine nichtnegative reelle Zahl $P(A)$, genannt die Wahrscheinlichkeit von A , zugeordnet mit der Eigenschaft:
 $P(A) \geq 0$.

Axiom 2 Die Wahrscheinlichkeit des sicheren Ereignisses Ω ist gleich eins:
 $P(\Omega) = 1$.

Axiom 3 Additivität: Für abzählbar unendlich viele, paarweise disjunkte Ereignisse A_1, A_2, A_3, \dots gilt stets:
 $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \dots$

Das Axiom 3 in der obigen Gestalt ist nur für unendliche Ergebnismengen von Bedeutung. Für endliche Ω reduziert sich das Axiom 3 auf die Form

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n),$$

falls $A_i \cup A_j = \emptyset$ für alle $i \neq j$ mit $i, j = 1, 2, 3, \dots, n$.