



Leseprobe

Michael Knorrenschild

Vorkurs Mathematik

Ein Übungsbuch für Fachhochschulen

ISBN (Buch): 978-3-446-43798-2

ISBN (E-Book): 978-3-446-43628-2

Weitere Informationen oder Bestellungen unter

<http://www.hanser-fachbuch.de/978-3-446-43798-2>

sowie im Buchhandel.

mit obigem Satz auf Umkehrbarkeit und berechnen Sie ggf. damit die Umkehrfunktion.

$$\text{a) } f_1(x) := \frac{1}{x^2} \quad \text{b) } f_2(x) := \frac{3}{x^2 + 4} \quad \text{c) } f_3(x) = \frac{2}{(x+2)^2 + 4}$$

3.4 Translationen, Skalierungen und Spiegelungen

Wir werden nun einige ganz einfache Funktionen betrachten, die für sich selbst gesehen keine große Rolle spielen, jedoch sehr häufig verknüpft mit anderen Funktionen auftreten.

Definition

Die Abbildung $t_c : x \mapsto x + c$ heißt **Translation** (Verschiebung) um (die Konstante) c .

Sei f eine beliebige Funktion und c und d Konstanten. Dann ist $t_c \circ f : x \mapsto f(x) + c$ und $f \circ t_d : x \mapsto f(x + d)$. In $t_c \circ f$ sind die Funktionswerte von f um c verschoben, in $f \circ t_d$ werden die x -Werte verschoben um d gegenüber f . Man kann auch beides kombinieren und erhält: $t_c \circ f \circ t_d : x \mapsto f(x + d) + c$. Der Graph von $t_c \circ f$ ist gegenüber dem von f um c in y -Richtung verschoben – im Falle $c > 0$ ist dies eine Verschiebung nach oben, im Falle $c < 0$ eine nach unten. Der Graph von $f \circ t_d$ ist gegenüber dem von f um d in x -Richtung verschoben – im Falle $d > 0$ ist dies eine Verschiebung nach links, im Falle $d < 0$ eine nach rechts. Bild 3.7 zeigt ein Beispiel mit $d = 2$ und $c = -5$. Der Graph von $t_c \circ f \circ t_d : x \mapsto f(x + 2) - 5$ ist also gegenüber dem von f um 2 nach links und um 5 nach unten verschoben.

Definition

Die Abbildung $s_c : x \mapsto c \cdot x$ heißt **Skalierung** mit (der Konstanten) c .

Mit der Skalierung ist es wie mit der Translation – sie erhält ihre Bedeutung in der Komposition mit anderen Funktionen. Eine Skalierung bedeutet nichts anderes als eine Änderung der Skala, man kann auch sagen, des Maßstabs. Je nachdem wie eine Skalierung mit einer Funktion komponiert wird, wird der Maßstab auf der x - oder auf der y -Achse geändert.

Sei f eine beliebige Funktion und c und d Konstanten. Dann ist $s_c \circ f : x \mapsto c \cdot f(x)$ und $f \circ s_d : x \mapsto f(d \cdot x)$. In $s_c \circ f$ sind die Funktionswerte von f mit dem Faktor c skaliert, in $f \circ s_d$ sind die x -Werte skaliert gegenüber f . Wiederum kann man auch beides kombinieren und erhält: $s_c \circ f \circ s_d : x \mapsto c \cdot f(d \cdot x)$. Der

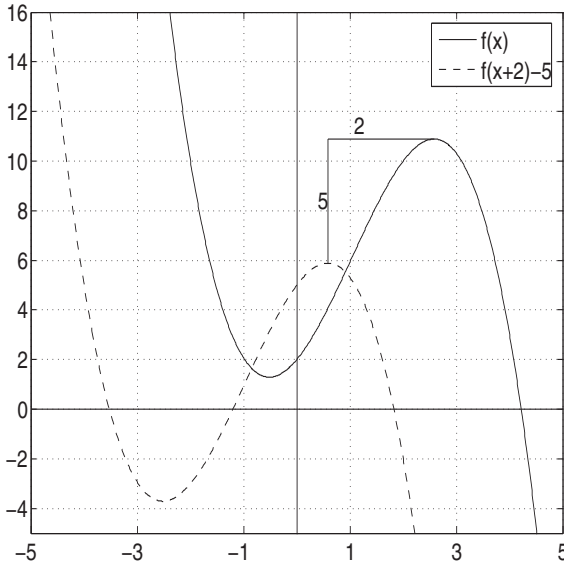


Bild 3.7

Graph von $s_c \circ f$ ist gegenüber dem von f um den Faktor c in y -Richtung gedehnt – im Falle $|c| < 1$ spricht man aber meist von einer Stauchung (unter einer Dehnung im engeren Sinne stellt man sich eine Verlängerung vor). Der Graph von $f \circ s_d$ ist gegenüber dem von f um den Faktor $\frac{1}{d}$ in x -Richtung gedehnt (auch hier liegt eine Stauchung vor, falls $\frac{1}{d} < 1$ gilt). Bild 3.8 zeigt ein Beispiel, wobei $d = 2$ und $c = 3$ vorliegt. Der Graph von $s_c \circ f \circ s_d : x \mapsto 3f(2x)$ ist also gegenüber dem von f um den Faktor 0.5 in x -Richtung gedehnt (gestaucht) und in y -Richtung um den Faktor 3 gedehnt.

Bemerkungen:

1. Skalierungen treten sehr häufig auf, beispielsweise dann, wenn man eine Funktion (oder ihren Graphen) in einer anderen physikalischen Einheit verwenden will. Angenommen, wir haben eine Funktion $f : t \mapsto f(t)$ vorliegen, wobei t der Zeit entspricht. t solle dabei in der Einheit Minuten verwendet werden, wir schreiben daher $f : t_{Min} \mapsto f(t_{Min})$. Welche Funktion erhalten wir, wenn wir f mit der Einheit Sekunden für die x -Variable verwenden wollen? Wir suchen also etwas wie $g : t_{Sek} \mapsto ?$. Da $t_{Sek} = \frac{1}{60} t_{Min}$ ist, haben wir also $g(t_{Sek}) = f(\frac{1}{60} t_{Min})$. Wir erhalten also den Graphen von g , indem wir den Graphen von f um den Faktor 60 in x -Richtung dehnen. Hier setzen wir voraus, dass der Maßstab auf der x -Achse unverändert bleibt. Wir könnten

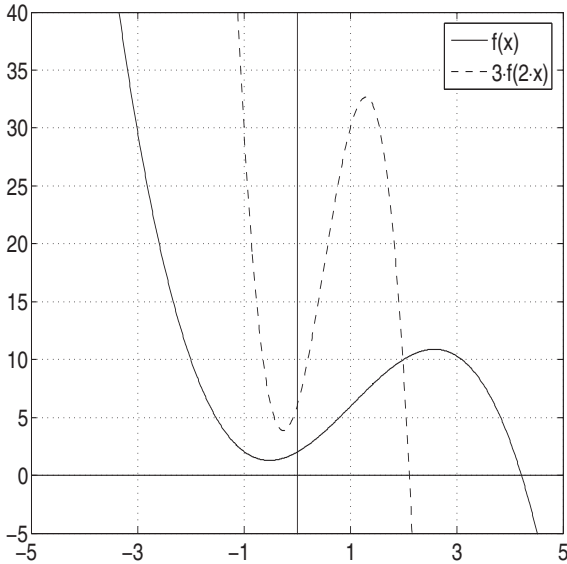


Bild 3.8

natürlich auch den Maßstab auf der x -Achse ändern, und genau dort, wo auf der x -Achse 1 Min., 2 Min., ... steht, einfach 60 Sek., 120 Sek., ... notieren, dann würde der Graph von f unverändert bleiben.

2. Es gibt auch Skalierungen, die sich nicht durch eine Multiplikation mit einem konstanten Faktor beschreiben lassen. Wir werden später den Logarithmus als eine solche kennenlernen.

Ist der Skalierungsfaktor negativ, so entspricht das einer Umkehrung der Achsen. Für den Graphen bedeutet das eine Spiegelung an einer der Achsen.

Definition

Die Skalierung $s : x \mapsto -x$ heißt **Spiegelung**.

Bemerkung: Sei $s : x \mapsto -1 \cdot x$, f eine Funktion. Dann gilt:

1. Der Graph der Funktion $g := f \circ s$, also $g : x \mapsto f(-x)$, entsteht aus dem Graphen von f durch Spiegelung an der y -Achse.

2. Der Graph der Funktion $g := s \circ f$, also $g : x \mapsto -f(x)$, entsteht aus dem Graphen von f durch Spiegelung an der x -Achse.

Beispiel 3.9

Zeichnen Sie den Graphen der Funktion $f : x \mapsto -x^3 + 2x^2 + 3x + 2$ für $x \in [-5, 5]$ sowie die Graphen der gespiegelten Funktionen $f \circ s$ und $s \circ f$.

Lösung: Wir erhalten Bild 3.9.

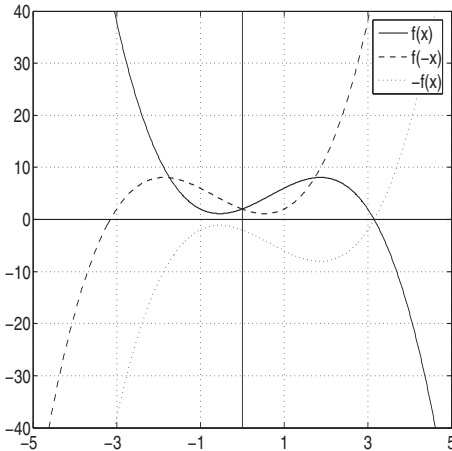


Bild 3.9

Die Graphen von f und $f \circ s$ liegen symmetrisch zur x -Achse; sie schneiden sich daher auch auf der x -Achse. Die Graphen von f und $s \circ f$ liegen symmetrisch zur y -Achse; sie schneiden sich daher auch auf der y -Achse. ■

Gerade und ungerade Funktionen

Eine Funktion f heißt **gerade**, wenn für alle x gilt: $f(x) = f(-x)$.

Eine Funktion f heißt **ungerade**, wenn für alle x gilt: $f(x) = -f(-x)$.

Beispiel 3.10

Prüfen Sie für die folgenden Funktionen, ob diese gerade, ungerade oder keines von beiden sind.

a) $f_1(x) := x^n \quad (n \in \mathbb{N})$ b) $f_2(x) := x + x^2$ c) $f_3(x) := |x|$

Lösung:

$$a) \quad f_1(-x) = (-x)^n = \begin{cases} x^n & \text{falls } n \text{ gerade} \\ -x^n & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases} = \begin{cases} f_1(x) & \text{falls } n \text{ gerade} \\ -f_1(x) & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Daraus erkennen wir: f ist gerade, falls n gerade ist. f ist ungerade, falls n ungerade ist.

b) f_2 ist weder gerade noch ungerade, denn beispielsweise ist $f_2(2) = 6$, aber $f_2(-2) = 2$, also $f_2(2) \neq f_2(-2)$ und $f_2(2) \neq -f_2(-2)$.

c) Für alle x gilt: $f_3(-x) = |-x| = |x| = f_3(x)$, also ist die Betragsfunktion eine gerade Funktion. ■

Bemerkung: Aus der Bemerkung zur Spiegelung können wir erkennen:

1. Der Graph einer geraden Funktion ist stets symmetrisch zur y -Achse (also gleich seinem eigenen Spiegelbild bezüglich der y -Achse).

2. Der Graph einer ungeraden Funktion ist stets punktsymmetrisch zum Nullpunkt (er ist gleich seinem eigenen Spiegelbild, wenn man erst an der einen Achse, dann an der anderen Achse spiegelt, was einer Punktspiegelung am Nullpunkt gleich kommt).

3.5 Die Wurzelfunktionen

In Beispiel 3.7 haben wir schon die Funktion $f(x) = x^2$ auf Umkehrbarkeit untersucht, und haben dabei die Wurzelfunktion $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ kennengelernt. Analog kann man auch für allgemeine Potenzfunktionen $f(x) = x^n$ vorgehen.

Wurzelfunktion

Für $n \in \mathbb{N}$ ist die Funktion $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, gegeben durch $f(x) = x^n$, umkehrbar. Die zugehörige Umkehrfunktion, $f^{-1}: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ wird als **Wurzelfunktion** bezeichnet und geschrieben als $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$.

Im Fall $n = 2$ schreibt man auch kurz \sqrt{x} anstelle von $\sqrt[2]{x}$. Ausdrücke unter dem Wurzelzeichen bezeichnet man als **Radikanden**.

Bemerkung: Man beachte, dass nach Definition stets $\sqrt[n]{x} \geq 0$ gilt. Insbesondere gilt für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$\sqrt{x^2} = |x|,$$

und nicht(!), wie leider vielfach angenommen wird, $\sqrt{x^2} = \pm x$ (es ist ohnehin schleierhaft, was hier unter \pm verstanden werden soll).