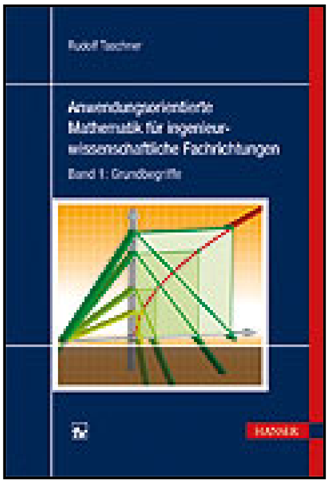
HANSER



Leseprobe

Rudolf Taschner

Anwendungsorientierte Mathematik für ingenieurwissenschaftliche Fachrichtungen

Band 1: Grundbegriffe

ISBN (Buch): 978-3-446-43967-2

ISBN (E-Book): 978-3-446-43978-8

Weitere Informationen oder Bestellungen unter

http://www.hanser-fachbuch.de/978-3-446-43967-2

sowie im Buchhandel.

1 Zahlen

1.1 Babylonisches Wurzelziehen

Mathematik – das Wort ist sprachverwandt mit dem deutschen Begriff „munter“ – leitet sich aus dem griechischen máthema her, das „die Kenntnis“ oder „das Gelernte“ bedeutet. Hermann Weyl, der geistreichste Mathematiker der 20. Jahrhunderts, definierte Mathematik als „die Wissenschaft vom Unendlichen“. Wir werden bald erfahren, wie recht er damit hat.

Mathematik lässt sich weit in die Vorgeschichte, bis auf Kerbzeichen urzeitlicher Nomadenstämme zurückverfolgen. Das Wort „Zahl“ stammt nämlich von der indogermanischen Sprachwurzel del, die „Kerbe“ bedeutet; unser Wort Delle rührt ebenfalls davon her, wie auch das englische Verb „to tell“, das sowohl „erzählen“ wie auch ursprünglich „zählen“ bedeutet. Ein „teller“ ist ein Bankkassier.

Und sobald Menschen sesshaft wurden, lernten sie sehr schnell die elementarsten Begriffe der Geometrie. Sie wollten wissen, wie groß der Grund ist, den sie bebauen. Ein Bauer sieht vor sich eine Strecke. Um sie messen zu können, vergleicht er sie mit einer Längeneinheit, zum Beispiel einem Klafter, der bei ausgestreckten Armen von der einen Spitze der Hand zur anderen reicht. Wenn die Strecke ein bestimmtes Vielfaches, zum Beispiel das Fünffache des Klafters, lang ist, nennt der Bauer – und auch wir wollen uns an diese Sprechweise halten – dieses Vielfache, in unserem Beispiel die Zahl 5, die Seitenlänge der Strecke. Denn er bezieht sich dabei auf die ein für allemal festgelegte Einheitsstrecke eines Klafters.

Wir nehmen an, der Bauer misst sein rechteckiges Feld ab und stellt fest: Es ist 7 lang und 1 breit. Sein Nachbar bewirtschaftet ein rechteckiges Feld, das 6 lang und 2 breit ist. Und dessen Nachbar ein quadratisches Feld, dessen Länge und Breite jeweils 4 beträgt. Dem Umfange nach sind die drei Felder gleich groß. Aber der Nachbar des Bauern erntet mehr als er, und dessen Nachbar sogar mehr als doppelt so viel wie er. Weil es nicht auf den Umfang, sondern auf den Flächeninhalt der Felder ankommt. Diesen Flächeninhalt gilt es zu berechnen.

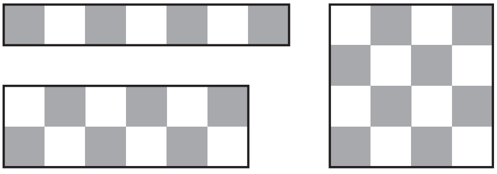


Bild 1.1 Drei rechteckige Felder: Alle drei besitzen gleichen Umfang, aber verschiedene Flächeninhalte.

Das über der Einheitsstrecke errichtete Quadrat definiert zugleich die Flächeneinheit. Wenn der Bauer sagt, dass eine bestimmte Zahl den Flächeninhalt seines rechteckigen Feldes bezeichnet, meint er, dass exakt so viele Einheitsquadrate in das Rechteck passen, wie diese Zahl angibt. So teilen Zahlen der Grund und Boden bearbeitenden Bevölkerung mit, wie groß ein Acker ist, den sie bewirtschaftet.

Ihre eigentliche Geburtsstunde erlebte die Mathematik in den Hochkulturen des alten Ägypten und des Zweistromlandes. Bereits Babylonier beherrschten ein höchst anspruchsvolles Verfahren, aus Zahlen Wurzeln zu ziehen. Sie gingen dabei folgendermaßen vor:

Wenn man die Seitenlänge eines Quadrates kennt, sei sie 1, 2, 3, 4 oder irgendeine andere Zahl, erhält man den Inhalt der Quadratfläche, indem man diese Seitenlänge mit sich selbst multipliziert: $1^2 = 1$, $2^2 = 4$, $3^2 = 9$, $4^2 = 16$, und so fort. Wie aber geht man vor, so fragten die babylonischen Gelehrten, wenn man den Inhalt der Quadratfläche kennt? Wie lässt sich daraus die Seitenlänge des Quadrates zurückermitteln? Wenn a den Inhalt der Quadratfläche symbolisiert, schreibt man, in moderner Notation, für die zugehörige Seitenlänge $\sqrt{a}$ und nennt dies die *Wurzel* von a. Das eigenartige, sich über das Symbol a erstreckende Wurzelzeichen ist ein stilisierter Kleinbuchstabe r, der das lateinische Wort radix, das „Wurzel“ bedeutet, abkürzt.

Es ist klar, dass man von Quadratzahlen sofort die Wurzel „ziehen“ kann: $\sqrt{1} = 1$, $\sqrt{4} = 2$, $\sqrt{9} = 3$, $\sqrt{16} = 4$, und so weiter. Wie aber berechnet man zum Beispiel $\sqrt{10}$, also die Seitenlänge jenes Quadrates, dessen Fläche den Inhalt 10 besitzt?

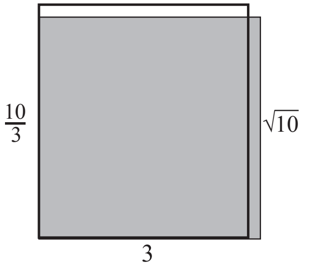


Bild 1.2 Das graue Quadrat hat 10 als Flächeninhalt und $\sqrt{10}$ als Seitenlänge. Das Rechteck mit 3 und mit 10/3 als Länge und Breite besitzt den gleichen Flächeninhalt.

Offensichtlich symbolisiert $x = 3$ die Seitenlänge eines etwas zu kleinen Quadrates, denn es ist $x^2 = 9$, eine kleinere Zahl als 10. Doch allzu weit entfernt von der wahren Lösung ist man damit nicht: Die Rechnung $4^2 = 16$ zeigt, dass $\sqrt{10}$ wohl näher bei 3 als bei 4 zu vermuten ist. Zwar hat, so der nächste Gedanke, nicht das Quadrat mit $x = 3$ als Seitenlänge den Flächeninhalt 10, wohl aber jenes Rechteck, das $x = 3$ als die eine und das $y = 10/3$ als die andere Seite besitzt. Denn in der Tat ist mit diesen Setzungen $x \cdot y = 10$. Die kürzere Rechteckseite mit der Länge $x = 3$ ist kleiner als $\sqrt{10}$, hingegen ist die längere Rechteckseite mit der Länge $y = 10/3$ größer als $\sqrt{10}$. Den wahren Wert, so vermuteten die babylonischen Gelehrten voreilig, bekommt man wohl, wenn man das arithmetische Mittel von x und y bildet, also

$$\frac{x+y}{2} = \frac{1}{2}\left(3 + \frac{10}{3}\right) = \frac{19}{6} .$$

Tatsächlich zeigt die Rechnung

$$\left(\frac{19}{6}\right)^2 = \frac{19^2}{6^2} = \frac{361}{36} = 10 + \frac{1}{36} ,$$

dass das Quadrat dieses Mittels den gewünschten Wert 10 – wenn auch nur knapp, so aber doch – verfehlt.

An dieser Stelle entwickelt ein uns namentlich nicht bekannter babylonischer Mathematiker einen sehr raffinierten Gedanken. Das gleiche Verfahren, das uns von 3 über 10/3 zu 19/6 geführt hat, kann man noch einmal zur Anwendung bringen. Das Quadrat mit $x_1 = 19/6$ als Seitenlänge hat eine geringfügig zu große Fläche. Aber jenes Rechteck, das

$$x_1 = \frac{19}{6}$$

als die eine und das

$$y_1 = \frac{10}{\frac{19}{6}} = \frac{60}{19}$$

als die andere Seite besitzt, stimmt in seiner Fläche mit dem Flächeninhalt des Quadrates überein. Denn in der Tat ist mit diesen Setzungen $x_1 \cdot y_1 = 10$. Die längere Rechteckseite mit der Länge $x_1 = 19/6$ ist ein wenig größer als $\sqrt{10}$, hingegen ist die kürzere Rechteckseite mit der Länge $y_1 = 60/19$ ein wenig kleiner als $\sqrt{10}$. Wieder liegt es nahe, das arithmetische Mittel, diesmal von x_1 und y_1, zu bilden:

$$\frac{x_1 + y_1}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{19}{6} + \frac{60}{19}\right) = \frac{721}{228}.$$

Nun scheint der wahre Wert für $\sqrt{10}$ gefunden zu sein. Allerdings wieder nur scheinbar. Denn es zeigt die Rechnung

$$\left(\frac{721}{228}\right)^2 = \frac{721^2}{228^2} = \frac{519\,841}{51\,984} = 10 + \frac{1}{51\,984}\,,$$

dass auch diesmal der gesuchte Wert 10 – wenn auch nur haarscharf – verfehlt wurde.

Wer besessen davon ist, dem wahren Wert auf die Spur zu kommen, wird das Verfahren noch einmal anzuwenden versuchen: Wir wissen, dass

$$x_2 = \frac{721}{228}$$

nur hauchdünn größer als $\sqrt{10}$ ist, dementsprechend wird

$$y_2 = \frac{10}{\frac{721}{228}} = \frac{2280}{721}$$

nur um Haaresbreite kleiner als $\sqrt{10}$ sein. Wie ist es dann mit

$$\frac{x_2 + y_2}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{721}{228} + \frac{2280}{721}\right) = \frac{1\,039\,681}{328\,776}$$

bestellt? Auch hier ist $\sqrt{10}$ nicht völlig präzise erfasst, aber wegen

$$\left(\frac{1\,039\,681}{328\,776}\right)^2 = \frac{1\,039\,681^2}{328\,776^2} = \frac{1\,080\,936\,581\,761}{108\,093\,658\,176} = 10 + \frac{1}{108\,093\,658\,176}$$

ist der Abstand zum wahren Wert $\sqrt{10}$ geradezu lächerlich gering.

Aber auch wenn man das Verfahren noch einmal, diesmal mit

$$x_3 = \frac{1\,039\,681}{328\,776}$$

als einen nur hauchdünn zu großen und mit

$$y_3 = \frac{10}{\frac{1\,039\,681}{328\,776}} = \frac{3\,287\,760}{1\,039\,681}$$

als einen nur hauchdünn zu kleinen Wert anwendet, auch der bereits dick angeschwollene Bruch

$$\frac{x_3 + y_3}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1\,039\,681}{328\,776} + \frac{3\,287\,760}{1\,039\,681}\right) = \frac{2\,161\,873\,163\,521}{683\,644\,320\,912}$$

verfehlt – wenn auch nur extrem knapp – den wahren Wert von $\sqrt{10}$.

Um die hohe Qualität des babylonischen Wurzelziehens würdigen zu können, empfiehlt es sich, die hier erhaltenen Näherungen an $\sqrt{10}$ in der modernen Schreibweise mit Dezimalpunkt und Nachkommastellen anzugeben. (Wir schreiben das „Komma" als Dezimalpunkt, um den Beistrich für Aufzählungen zur Verfügung zu haben. Trotzdem sprechen wir von „Nachkommastellen", wenn wir Stellen rechts vom Dezimalpunkt meinen.) Wir begannen mit $x = 3$ und $y = 10/3 = 3.333\ldots$ Danach erhielten wir als erstes Paar

$$x_1 = \frac{19}{6} = \mathbf{3.1}66\,666\,666\,666 \quad \text{und} \quad y_1 = \frac{60}{19} = \mathbf{3.1}57\,894\,736\,842\,.$$

Wir einigen uns dabei darauf, dass die genannten Dezimalbrüche auf zwölf Stellen nach dem Dezimalpunkt angegeben werden. Die fett gedruckten Ziffern sind jene, welche bei beiden Näherungen übereinstimmen, sodass wir bereits jetzt von $\sqrt{10} = 3.1\ldots$ ausgehen können. Das nächste Paar von Näherungen liefert

$$x_2 = \frac{721}{228} = \mathbf{3.162\,2}80\,701\,754 \quad \text{und} \quad y_2 = \frac{2280}{721} = \mathbf{3.162\,2}74\,618\,585\,,$$

woraus man $\sqrt{10} = 3.1622\ldots$ ersieht. Das nächste Paar von Näherungen liefert schließlich

$$x_3 = \frac{1\,039\,681}{328\,776} = \mathbf{3.162\,277\,660\,16}9 \quad \text{und} \quad y_3 = \frac{3\,287\,760}{1\,039\,681} = \mathbf{3.162\,277\,660\,16}7\,,$$

worin bis auf die letzte alle angegebenen Nachkommastellen übereinstimmen und man mit Fug und Recht

$$\sqrt{10} = 3.162\,277\,660\,16\ldots$$

schreiben kann. Die drei Punkte nach der zuletzt angeschriebenen Nachkommastelle bedeuten: Alle vor ihnen genannten Stellen stimmen so, wie sie angeschrieben sind; danach könnte man – wenn man wollte – noch beliebig viele weitere und genauso richtige Nachkommastellen anheften, würde man das Verfahren des babylonischen Wurzelziehens nur genügend lange vorantreiben.

Die Babylonier selbst kannten noch keine Dezimalbrüche. Sie teilten die Einheit in 60 gleich große Teile ein, die man als *Minuten* bezeichnet und mit einem Minutenstrich $'$ abkürzt. Die

Minuten selbst teilten sie ebenso in 60 gleich lange *Sekunden* ein, die man mit einem Sekundendoppelstrich $''$ bezeichnet. Um zum Beispiel einen Bruch wie 19/6 in Minuten und Sekunden umrechnen zu können, geht man folgendermaßen vor:

$$\frac{19}{6} = 3 + \frac{1}{6} = 3 + \frac{60'}{6} = 3 + 10' \,.$$

Ein wenig mühsamer ist es, den Bruch 60/19 in Minuten und Sekunden umzurechnen:

$$\frac{60}{19} = 3 + \frac{3}{19} = 3 + \frac{180'}{19} = 3 + 9' + \frac{9'}{19} = 3 + 9' + \frac{540''}{19} \approx 3 + 9' + 28'' \,,$$

wobei in der babylonischen Schreibweise der noch verbliebene Rest von 8/19 Sekunden generös weggerundet wurde. Trennt man, wie bei den Dezimalbrüchen, den ganzzahligen Teil und die Minuten mit einem tiefgestellten Punkt, kann man die Pluszeichen weglassen und bekommt so im babylonischen Sechziger- oder Hexagesimalsystem das Paar von Näherungen

$$x_1 = \frac{19}{6} = 3.10' \quad \text{und} \quad y_2 = \frac{60}{19} = 3.09'28'' \,.$$

Die Brüche $x_2 = 721/228$ und $y_2 = 2280/721$ ergeben im Hexagesimalsystem umgerechnet (und auf Sekunden gerundet)

$$\frac{721}{228} = 3 + \frac{37}{228} = 3 + \frac{185'}{19} = 3.09' + \frac{14'}{19} = 3.09' + \frac{840''}{19} \approx 3.09'44''$$

und

$$\frac{2280}{721} = 3 + \frac{117}{721} = 3 + \frac{7020'}{721} = 3.09' + \frac{531'}{721} = 3.09' + \frac{31\,860''}{721} \approx 3.09'44'' \,.$$

Somit war aus babylonischer Sicht klar, dass $\sqrt{10} = 3.09'44''$ ist. Eine Fortführung des Verfahrens erübrigt sich aus dieser Sicht der Dinge.

Weitaus eingehender und kritischer betrachteten erst die Mathematiker des antiken Griechenland diese Berechnungen. Doch bevor wir darauf zu sprechen kommen, sei erörtert, wozu man das Wurzelziehen eigentlich benötigt.

1.2 Satz des Pythagoras

Hermann und Dorothea – die Namen der beiden sind Goethes Epos geschuldet – gehen von einem gemeinsamen Ausgangspunkt in Richtung Osten. Hermann legt drei, Dorothea vier Kilometer zurück. Es ist klar, dass sie danach einen Kilometer voneinander entfernt sind.

Hermann und Dorothea gehen von einem gemeinsamen Ausgangspunkt weg, diesmal Hermann nach Osten und Dorothea nach Westen. Hermann legt wieder drei, Dorothea wieder vier Kilometer zurück. Auch in diesem Fall ist klar, dass sie danach sieben Kilometer voneinander entfernt sind.

Hermann und Dorothea gehen von einem gemeinsamen Ausgangspunkt weg, diesmal Hermann nach Norden und Dorothea nach Osten. Hermann legt wieder drei, Dorothea wieder