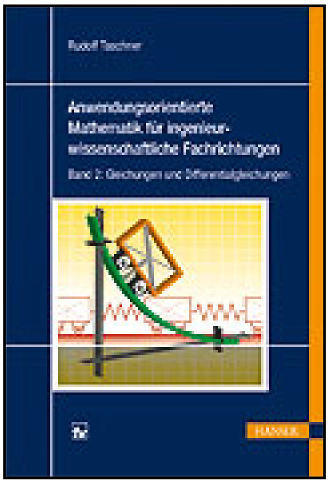
HANSER



Leseprobe

Rudolf Taschner

Anwendungsorientierte Mathematik für ingenieurwissenschaftliche Fachrichtungen

Band 2: Gleichungen und Differentialgleichungen

ISBN (Buch): 978-3-446-44056-2

ISBN (E-Book): 978-3-446-43980-1

Weitere Informationen oder Bestellungen unter

http://www.hanser-fachbuch.de/978-3-446-44056-2

sowie im Buchhandel.

5.9 Gekoppelte Schwingungen

Ein weiteres Beispiel belegt den Anwendungscharakter dieser Rechnungen. Wir gehen von einer geradlinigen Schiene aus, die zwei Prellböcke verbindet. Auf ihr befinden sich drei Wagen: Der linke Wagen ist links mit einer Feder an den linken Prellbock und rechts mit einer Feder an den mittleren Wagen gebunden und der rechte Wagen ist rechts mit einer Feder an den rechten Prellbock und links mit einer Feder an den mittleren Wagen gebunden. Alle drei Wagen besitzen die gleiche Masse und alle vier Federn besitzen die gleiche Steifigkeit. Um die Bewegungsgleichungen dieser drei Wagen zu erhalten, legen wir parallel zur geradlinigen Schiene, stets von links nach rechts weisend, eine x-, eine y- und eine z-Achse. Wenn alle Federn gleich gespannt sind, die Wagen also in ihren Ruhepositionen verharren, soll sich der erste Wagen bei $x = 0$, der zweite Wagen bei $y = 0$ und der dritte Wagen bei $z = 0$ befinden. Somit bezeichnen x, y, z jeweils die Auslenkungen des ersten, des zweiten, des dritten Wagens von der Ruhelage.

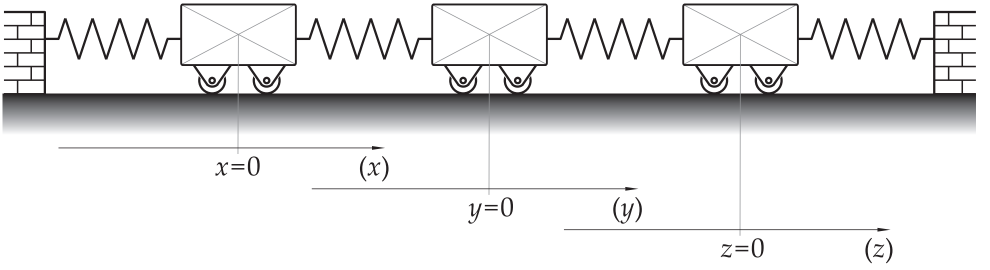


Bild 5.12 Drei Wagen mit vier Federn aneinander und an zwei Prellböcke gebunden

Diese Auslenkungen bewirken Dehnungen oder Stauchungen der vier Federn. Bei der ersten Feder beträgt sie x, bei der zweiten Feder $y - x$, bei der dritten Feder $z - y$ und bei der vierten Feder z. Nach dem von Hooke aufgestellten Gesetz und seiner Deutung durch Émilie du Châtelet lautet das Potential dieses physikalischen Systems

$$\Phi = \frac{1}{2}\omega^2 x^2 + \frac{1}{2}\omega^2 \left(y - x\right)^2 + \frac{1}{2}\omega^2 \left(z - y\right)^2 + \frac{1}{2}\omega^2 z^2 \,.$$

Weil $\dot{x}$, $\dot{y}$, und $\dot{z}$ die Geschwindigkeiten des ersten, zweiten und dritten Wagens bezeichnen, bekommen wir die Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned}
\ddot{x} &= -\frac{\partial\Phi}{\partial x} = -\omega^2 x + \omega^2\left(y - x\right) = -2\omega^2 x + \omega^2 y \\
\ddot{y} &= -\frac{\partial\Phi}{\partial y} = -\omega^2\left(y - x\right) + \omega^2\left(z - y\right) = \omega^2 x - 2\omega^2 y + \omega^2 z \\
\ddot{z} &= -\frac{\partial\Phi}{\partial z} = -\omega^2\left(z - y\right) - \omega^2 z = \omega^2 y - 2\omega^2 z
\end{aligned}$$

Kürzen wir mit L die zweite Ableitung nach der Zeit ab, also $L = \partial^2/\partial t^2$, entsteht hieraus das Differentialgleichungssystem

$$L\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\omega^2 & \omega^2 & 0 \\ \omega^2 & -2\omega^2 & \omega^2 \\ 0 & \omega^2 & -2\omega^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} .$$

Die Eigenwertgleichung der dabei auftretenden symmetrischen Matrix lautet

$$-\begin{vmatrix} -2\omega^2-\lambda & \omega^2 & 0 \\ \omega^2 & -2\omega^2-\lambda & \omega^2 \\ 0 & \omega^2 & -2\omega^2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^3+6\omega^2\lambda^2+10\omega^4\lambda+4\omega^6 = 0\,.$$

Sie besitzt jedenfalls $\lambda = -2\omega^2$ als Lösung. Dividiert man $\lambda^3+6\omega^2\lambda^2+10\omega^4\lambda+4\omega^6$ durch $\lambda + 2\omega^2$, verbleibt das quadratische Polynom $\lambda^2+4\omega^2\lambda+2\omega^4$ mit $\lambda = -\left(2\pm\sqrt{2}\right)\omega^2$ als Nullstellen. Die drei Eigenwerte der Matrix sind somit:

$$\lambda = \lambda_1 = -\left(2+\sqrt{2}\right)\omega^2\,, \quad \lambda = \lambda_2 = -2\omega^2\,, \quad \lambda = \lambda_3 = -\left(2-\sqrt{2}\right)\omega^2\,.$$

Die erweiterte Matrix des linearen Gleichungssystems für die Komponenten des zu λ_1 gehörenden Eigenvektors lautet:

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2}\omega^2 & \omega^2 & 0 & 0 \\ \omega^2 & \sqrt{2}\omega^2 & \omega^2 & 0 \\ 0 & \omega^2 & \sqrt{2}\omega^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir kürzen alle Zeilen durch ω^2. Dann vertauschen wir die zweite mit der ersten Zeile und erhalten mit dem Eliminationsverfahren der Reihe nach

$$\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 & 0 \\ \sqrt{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Darum ist

$$\begin{pmatrix} 1/2 \\ -\sqrt{2}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

die Spalte der Komponenten eines zu λ_1 gehörenden Eigenvektors mit Länge 1. Die erweiterte Matrix des linearen Gleichungssystems für die Komponenten des zu λ_2 gehörenden Eigenvektors lautet:

$$\begin{pmatrix} 0 & \omega^2 & 0 & 0 \\ \omega^2 & 0 & \omega^2 & 0 \\ 0 & \omega^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir kürzen alle Zeilen durch ω^2. Dann erhalten mit dem Eliminationsverfahren der Reihe nach

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Darum ist

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ 0 \\ -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$$

die Spalte der Komponenten eines zu λ_2 gehörenden Eigenvektors mit Länge 1. Weil die drei zu λ_1, zu λ_2 und zu λ_3 gehörenden Eigenvektoren der Länge 1 ein Orthonormalsystem bilden, errechnet sich die Spalte der Komponenten des dritten, zu λ_3 gehörenden Eigenvektors aus dem Kreuzprodukt der ersten beiden:

$$\begin{pmatrix} 1/2 \\ -\sqrt{2}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ 0 \\ -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} .$$

Mit der aus diesen drei Spalten bestehenden orthogonalen Matrix

$$C = \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{2}/2 & 1/2 \\ -\sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \\ 1/2 & -\sqrt{2}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

definieren wir gemäß

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} , \qquad \text{also} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{\xi}{2} + \dfrac{\eta\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\zeta}{2} \\[2ex] y = -\dfrac{\xi\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\zeta\sqrt{2}}{2} \\[2ex] z = \dfrac{\xi}{2} - \dfrac{\eta\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\zeta}{2} \end{cases}$$

die sogenannten *Normalkoordinaten* $\xi = \xi(t), \eta = \eta(t), \zeta = \zeta(t)$ dieses schwingenden Systems, bezüglich derer die Differentialgleichungen *entkoppelt* sind: Für die Normalkoordinaten bestehen nämlich die drei Gleichungen

$$\begin{aligned} L\xi &= \ddot{\xi} = \lambda_1 \xi = -\left(2+\sqrt{2}\right)\omega^2 \xi \; , \\ L\eta &= \ddot{\eta} = \lambda_2 \eta = -2\omega^2 \eta \; , \\ L\zeta &= \ddot{\zeta} = \lambda_3 \zeta = -\left(2-\sqrt{2}\right)\omega^2 \zeta \; . \end{aligned}$$

Deren allgemeine Lösungen kennen wir:

$$\xi = 2A\sin\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\omega t + \varphi\right) , \quad \eta = 2B\sin\left(\sqrt{2}\omega t + \psi\right) , \quad \zeta = 2C\sin\left(\sqrt{2-\sqrt{2}}\omega t + \chi\right) .$$

In ihnen bezeichnen $2A$, $2B$, $2C$ die konstanten Amplituden und φ, ψ, χ die konstanten Phasen. Den Faktor 2 vor den Amplituden haben wir deshalb geschrieben, weil man sich danach beim Einsetzen in die ursprünglichen Koordinaten x, y, z das Schreiben von Brüchen erspart:

$$\begin{aligned} x &= A\sin\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\omega t + \varphi\right) + \sqrt{2}B\sin\left(\sqrt{2}\omega t + \psi\right) + C\sin\left(\sqrt{2-\sqrt{2}}\omega t + \chi\right) \\ y &= -\sqrt{2}A\sin\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\omega t + \varphi\right) + \sqrt{2}C\sin\left(\sqrt{2-\sqrt{2}}\omega t + \chi\right) \\ z &= A\sin\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\omega t + \varphi\right) - \sqrt{2}B\sin\left(\sqrt{2}\omega t + \psi\right) + C\sin\left(\sqrt{2-\sqrt{2}}\omega t + \chi\right) \end{aligned}$$

Dieses Beispiel verdeutlicht einen wichtigen Aspekt bei der Untersuchung schwingender Systeme. Einen anderen, mindestens ebenso wichtigen Aspekt sprechen wir im nächsten Abschnitt an.