



Leseprobe

Kerstin Rjasanowa

Mathematik für Bauingenieure 2

Ausgewählte Kapitel für Ingenieure im Master-Studium

ISBN (Buch): 978-3-446-44950-3

ISBN (E-Book): 978-3-446-44951-0

Weitere Informationen oder Bestellungen unter

<http://www.hanser-fachbuch.de/978-3-446-44950-3>

sowie im Buchhandel.

## Vorwort

*„Jede Wissenschaft ist so weit Wissenschaft, wie  
Mathematik in ihr ist.“*

Immanuel Kant (1724 - 1804)

Mit Einführung der Bachelor- und Masterstudiengänge an den deutschen Hochschulen haben sich gleichzeitig neue Anforderungen für deren inhaltliche Gestaltung ergeben. Das vorliegende Buch, das auf der Basis meiner Vorlesungen in Mathematik im Masterstudiengang Bauingenieurwesen an der Hochschule Kaiserslautern entstanden ist, trägt dieser aktuellen Entwicklung Rechnung. Kapitel 1 beschäftigt sich mit Funktionen mehrerer Veränderlicher sowie deren Differenzialrechnung und Integralrechnung, die u. a. die Ermittlung von Extremwerten bzw. die Berechnung von Momenten für Flächen und Volumina auch bei inhomogener Dichteverteilung ermöglicht. Gleichzeitig ist es Voraussetzung für das Kapitel 2, das Grundlagen für das Lösen gewöhnlicher Differenzialgleichungen bzw. von Systemen gewöhnlicher Differenzialgleichungen enthält. Die Fallstudien hierzu zeigen, dass viele physikalische Modelle im Bauingenieurwesen auf Differenzialgleichungen führen, deren Lösung somit eine zentrale Rolle spielt. In Kapitel 3 werden Grundbegriffe der Finanzmathematik wie Zinsrechnung, Wirtschaftlichkeits- und Investitionsrechnung, Abschreibungs- und Rentenrechnung vermittelt, auf denen betriebswirtschaftliche Kenntnisse basieren. Diese gewinnen in zunehmendem Maß Bedeutung bei der Planung, Realisierung und Erhaltung von Bauvorhaben, beim Management von Immobilien oder bei der erfolgreichen Leitung von Unternehmen auch im Baubereich. Kapitel 4 ist der Statistik gewidmet, deren Gegenstand die Analyse und zahlenmäßige Erfassung zufälliger, d. h. nicht vorhersehbarer, Experimente ist. Diese hat im Bauingenieurwesen zunehmend Eingang gefunden, z. B. bei der Aus- und Bewertung von Messungen, bei der Vorhersage von Wahrscheinlichkeiten bestimmter Ereignisse, die als Grundlage für die Bemessung von Bauwerken benutzt werden, oder sogar bei der Bewertung von Immobilien.

Die Darstellung der Inhalte orientiert sich am Vorgänger „Mathematik für Bauingenieure 1 - Grundlagen für das Bachelor-Studium“, was das Studium dieses Buches erleichtern soll. Eine zielgerichtete, mathematisch korrekte und für das Bauingenieurwesen geeignete Darlegung steht dabei im Mittelpunkt. Kleingedruckte Ergänzungen wie z. B. Beweise erhöhen das mathematische Verständnis, sind aber für die Anwendung der Ergebnisse nicht zwingend erforderlich. Die überwiegende Mehrheit der Beispiele zur Illustration getroffener Aussagen bzw. zur Lösung praktischer Probleme ist aus dem Erfahrungsbereich Bauingenieurwesen entnommen. Fallstudien am Ende der Kapitel enthalten dafür typische Situationen, die Ableitung geeigneter mathematischer Modelle und die Lösung mit den dargestellten Methoden. Besonderer Wert ist auf eine strukturierte Gestaltung des mathematischen Textes gelegt. Zahlreiche Schlagwörter auf der Marginalienspalte erhöhen die Übersicht, gestatten bessere logische Nachvollziehbarkeit und helfen beim Nachschlagen. Die farbliche Gestaltung, insbesondere das Unterlegen resultierender Formeln und Ergebnisse sowie zahlreiche Grafiken und Bilder, dienen ebenfalls einem vertiefenden Verständnis. Ein ausführliches Sachwortverzeichnis soll die Arbeit mit dem Buch erleichtern. Zahlreiche Übungsaufgaben mit Lösungen stehen dem Leser unter der Internet-Adresse [www.hanser-fachbuch.de/9783446449503](http://www.hanser-fachbuch.de/9783446449503) zur Verfügung.

Für die gewissenhafte Durchsicht des Buches danke ich sehr Herrn Dr. S. Steidel vom ITWM Fraunhofer in Kaiserslautern, Herrn R. Berweiler von der Universität Koblenz, Herrn Prof. Dr. J. Schanzbach von der HS Kaiserslautern sowie Herrn T. Seel, z. Zt. Master-Student im Studiengang Bauingenieurwesen der HS Kaiserslautern. Ein Dankeschön gilt ebenfalls vielen Studierenden des Studienganges Bauingenieurwesen der Hochschule Kaiserslautern, die Kontrollrechnungen der Übungsaufgaben vornahmen und so mithalfen, die angegebenen Lösungen zu verifizieren. Bei Herrn Ph. Thorwirth vom Fachbuchverlag Leipzig im Carl Hanser Verlag bedanke ich mich herzlich für die Unterstützung beim Entstehen des vorliegenden Buches und die gute Zusammenarbeit mit dem Verlag.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Funktionen mehrerer Veränderlicher</b>	<b>9</b>
1.1 Der Begriff der Funktion mehrerer Veränderlicher . . . . .	9
1.2 Grenzwerte, Stetigkeit, Partielle Ableitungen . . . . .	12
1.3 Gradient, partielles und totales Differenzial, Fehlerrechnung . . . . .	16
1.4 Extremwerte von Funktionen mehrerer Veränderlicher . . . . .	20
1.4.1 Definition lokaler Extrema . . . . .	20
1.4.2 Notwendige Bedingungen für die Existenz lokaler Extrema . . . . .	21
1.4.3 Hinreichende Bedingungen für die Existenz lokaler Extrema . . . . .	22
1.5 Integralrechnung für Funktionen mehrerer Veränderlicher . . . . .	24
1.5.1 Integration über ebene Bereiche . . . . .	25
1.5.2 Kurvenintegrale . . . . .	32
1.5.3 Der Satz von Green . . . . .	37
1.6 Anwendungen an Beispielen . . . . .	40
1.6.1 Ermittlung des Widerstandsmomentes . . . . .	40
1.6.2 Vermessung eines Dreiecks . . . . .	41
1.6.3 Wasserrinne mit Trapez-Querschnitt . . . . .	42
<b>2 Differenzialgleichungen</b>	<b>45</b>
2.1 Einführung . . . . .	45
2.2 Definitionen . . . . .	47
2.3 Differenzialgleichungen 1. Ordnung . . . . .	48
2.4 Trennung der Variablen . . . . .	49
2.5 Lineare Differenzialgleichungen 1. Ordnung . . . . .	50
2.6 Lineare Differenzialgleichungen höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten . . . . .	52
2.6.1 Sätze über die Lösungen . . . . .	53
2.6.2 Allgemeine Lösung von homogenen Differenzialgleichungen 2. Ordnung . . . . .	55
2.6.3 Homogene Differenzialgleichungen höherer Ordnung . . . . .	57
2.6.4 Allgemeine Lösung inhomogener Differenzialgleichungen höherer Ordnung . . . . .	58
2.7 Lineare Systeme von Differenzialgleichungen 1. Ordnung . . . . .	63
2.7.1 Definitionen, Beispiele . . . . .	63
2.7.2 Lineare homogene Systeme 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten . . . . .	67
2.8 Anwendungen an Beispielen . . . . .	71
2.8.1 Mechanische Schwingung . . . . .	71
2.8.2 Ausströmgeschwindigkeit einer Flüssigkeit . . . . .	73
2.8.3 Gleichung einer Seilkurve . . . . .	74

---

2.8.4	Knickkraft nach Euler . . . . .	76
2.8.5	Biegelinie eines Balkens . . . . .	78
2.8.6	Absenkung des Grundwasserspiegels mit einem vollkommenen Brunnen . . . . .	80
2.8.7	Schwingungssystem . . . . .	82
<b>3</b>	<b>Finanzmathematik</b>	<b>85</b>
3.1	Zinsen . . . . .	85
3.1.1	Lineare Verzinsung . . . . .	85
3.1.2	Regelmäßige Zahlungen . . . . .	87
3.1.3	Geometrische Verzinsung . . . . .	89
3.1.4	Unterjährige Verzinsung . . . . .	93
3.1.5	Stetige Verzinsung . . . . .	96
3.1.6	Zusammenfassung . . . . .	98
3.2	Tilgungsrechnung . . . . .	99
3.2.1	Tilgungsprozess . . . . .	99
3.2.2	Annuitätentilgung . . . . .	100
3.2.3	Ratentilgung . . . . .	103
3.2.4	Zinsschuldtilgung . . . . .	105
3.2.5	Zusammenfassung . . . . .	105
3.3	Investitionsrechnung . . . . .	106
3.3.1	Kapitalwertmethode . . . . .	107
3.3.2	Methode des internen Zinsfußes . . . . .	108
3.4	Abschreibungen . . . . .	111
3.4.1	Abschreibungsprozess . . . . .	111
3.4.2	Lineare Abschreibung . . . . .	112
3.4.3	Geometrisch degressive Abschreibung . . . . .	112
3.4.4	Übergang degressive - lineare Abschreibung . . . . .	114
3.4.5	Arithmetisch degressive Abschreibung . . . . .	115
3.4.6	Zusammenfassung . . . . .	117
3.5	Berechnung des effektiven Zinssatzes . . . . .	118
3.6	Rentenrechnung . . . . .	120
3.6.1	Konstante Rente . . . . .	120
3.6.2	Geometrisch wachsende Rente . . . . .	125
3.6.3	Arithmetisch wachsende Rente . . . . .	129
3.6.4	Zusammenfassung . . . . .	134
<b>4</b>	<b>Statistik</b>	<b>135</b>
4.1	Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung . . . . .	135

---

4.1.1	Kombinatorik . . . . .	135
4.1.2	Zufällige Ereignisse . . . . .	138
4.1.3	Definition der Wahrscheinlichkeit . . . . .	140
4.1.4	Eigenschaften der Wahrscheinlichkeit . . . . .	141
4.1.5	Bedingte und totale Wahrscheinlichkeit . . . . .	144
4.2	Zufallsvariablen . . . . .	147
4.2.1	Zufallsvariablen und Verteilungsfunktion . . . . .	147
4.2.2	Diskrete Verteilungen . . . . .	149
4.2.3	Stetige Verteilungen . . . . .	158
4.2.4	Grenzverteilungssätze . . . . .	172
4.3	Beschreibende Statistik . . . . .	177
4.3.1	Häufigkeitsverteilungen . . . . .	177
4.3.2	Maßzahlen einer Stichprobe . . . . .	181
4.4	Schließende Statistik . . . . .	186
4.4.1	Stichprobenfunktionen . . . . .	186
4.4.2	Statistische Schätzverfahren . . . . .	189
4.4.3	Statistische Testverfahren . . . . .	203
4.4.4	Der $\chi^2$ -Anpassungstest . . . . .	211
4.5	Anwendungen an Beispielen . . . . .	214
4.5.1	Hochwasserabfluss . . . . .	214
4.5.2	Beurteilung der Dicke von Betondeckungen . . . . .	215
4.5.3	Beurteilung der Nutzungssicherheit von Bauwerken . . . . .	217
4.5.4	Bewertung von Grundstücken . . . . .	217
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>221</b>
	<b>Sachwortverzeichnis</b>	<b>223</b>

# Sachwortverzeichnis

- Ableitung, 33–35, 45–47, 49, 51, 52, 59–62, 72, 73, 75, 76, 80, 109, 110, 119, 158, 162, 193
  - partielle, 15–17, 23, 41–44, 47–49, 192
- Abschreibung, 111, 114–116
  - prozentsatz, 112, 113
  - arithmetisch degressive, 111, 115, 116
  - digitale, 111, 116
  - geometrisch degressive, 112, 114
  - geometrische, 111
  - lineare, 111, 112, 114, 116
- Abstand, 12, 13, 20, 81, 94
  - funktion, 211, 212
- Additivität, 27
- Anfangswertaufgabe, 46, 48
- Annuität, 99, 104
- Arbeit, 35, 36
- Axiom von Newton, zweites, 45, 71
  
- Barwert, 86, 87, 107, 108, 118, 120–123, 125–127, 130, 132
- Bereich, 25, 27, 30, 32
  - 1. Art, 28, 29, 31
  - 2. Art, 28, 29
  - beschränkter ebener, 25–28, 37
  - ebener, 25, 37
- Betrag, 27
- Biegelinie, 77–80
- Bogenlänge, 34, 35
- Buchwert, 111, 112, 115, 116
  
- charakteristische Gleichung, 55–59, 75, 77, 79
  
- Definitionsbereich, 9, 10, 15, 20, 22, 24
  - natürlicher, 10
- Determinante, 24, 61
  - Wronski-, 55–57, 61
- Differenzial, 17, 18, 33, 35, 36
  - Bogen-, 33, 34
  - partiell, 17, 18
  - totales, 18, 19, 42
- Differenzialgleichung, 45, 47, 48, 50, 52, 71, 73, 74, 76, 78, 79
  - explizite, 48
  - gewöhnliche, 47, 49
  - hoherer Ordnung, 52
  - homogene, 50, 51, 53–55, 57–60
  - implizite, 48
  - inhomogene, 50, 51, 58–60, 62
  - lineare, 50, 53, 60, 61
  - Ordnung, 47
  - partielle, 47
- differenzierbar, 16
  - partiell, 15
- Doppelintegral, 27, 28, 37
- Endwert, 85, 86, 88–90, 94, 107, 120, 123, 125, 127, 129–131
- Ereignis, 139, 145, 154, 156, 157, 173
  - feld, 140
  - Differenz, 139
  - disjunkte, 140, 142, 143, 146, 149, 156
  - Elementar-, 140
  - komplementares, 139, 142, 144, 154, 157, 158
  - Produkt, 139
  - sicheres, 139–141, 149, 151
  - Summe, 139
  - Teil-, 139
  - unabhängige, 145, 146, 150, 156, 157
  - unmögliches, 139–141, 148, 149, 158
  - vollständiges System, 140
  - zufälliges, 138, 144
- Erwartungswert, 151–157, 160–162, 165, 172, 176, 187, 190, 195, 196, 198, 199, 204, 206–209
- Euler-Gleichung, 56, 58
  
- Fehler, 165
  - absoluter, 19, 41, 42
  - relativer, 19, 40–42
  - zufälliger, 148, 199
- Flächeninhalt, 27, 29, 38, 39
- Fluss, 36, 37
- Folge, 13, 14, 25
  - konvergente, 13, 14
- Fourier-Ansatz, 55, 56
- Fundamentalsystem, 54–57, 60, 61
- Funktion, 187
  - zweimal stetig differenzierbare, 22–24
  - differenzierbare, 16–18, 20, 21, 158
  - dreier Veränderlicher, 10
  - mehrerer Veränderlicher, 9, 12, 16, 18, 20, 24
  - stetige, 14, 27, 32
  - zweier Veränderlicher, 9, 10, 21
- Gebiet, 25
- Gesetz
  - Additions-, 142, 146, 149
  - Gravitations- von Newton, 10
  - Kontinuitäts-, 81
  - von Darcy, 81
  - von Hooke, 71, 78
  - von Ohm, 9
  - von Torricelli, 73
  - Weg-Zeit-, 71
- Gradient, 17
- Graph, 10, 11, 15, 17, 21, 39, 110, 158, 171, 187
- Grenzverteilungssatz, 172–174

- Grenzwert, 13–15, 25–27, 96, 122, 123  
 Grenzwertsatz, 176  
 Guthaben, 85
- Häufigkeit, 178, 179, 182, 184, 211, 212  
 Hesse-Matrix, 24  
 Histogramm, 178  
 Hypothese  
   von Bernoulli, 78
- imaginäre Einheit, 56, 65  
 Integralsumme, 26, 27, 32  
 integrierbar, 27  
 Isolinien, 12, 17
- Kapitalverdopplung, 91  
 kaufmannische Diskontierung, 87  
 Knickkraft nach Euler, 76, 77  
 Kombinationen, 137  
   mit Wiederholung, 138  
   ohne Wiederholung, 137  
 konkav, 22  
   streng, 23, 24  
 konvex, 22, 23  
   streng, 23, 24  
 kritische Stelle, 22, 191  
 Kurvenintegral, 32, 33, 37  
   1. Art, 32–34  
   2. Art, 32, 33, 35, 36
- Ladung, 30  
 Laufzeit, 121, 126, 128, 130, 132  
 linear  
   abhängig, 53  
   unabhängig, 53–57, 60, 61  
 Linearität, 27  
 Losung, 48–50, 55, 57  
   -kurve, 48–50, 52  
   allgemeine, 47, 51, 52, 54, 56–59, 61, 62, 72, 73,  
     75, 79, 80  
   eindeutige, 48, 49, 61  
   komplexe, 56, 72, 77  
   partikuläre, 47, 48, 51, 52, 55–60, 62, 72, 75, 79  
   reelle, 57  
   singulare, 47, 49, 50
- Masse, 30, 31, 34, 35  
 Maximum  
   lokales, 20, 24, 43  
   strenges lokales, 20, 21, 23  
 Maximum-Likelihood-Methode, 190, 191, 212, 218, 219  
 Minimum  
   lokales, 20, 23, 24, 44  
   strenges lokales, 20  
 Mittelwertsatz, 28  
 Moment, 34, 35, 153, 161  
   -methode, 190  
   axiales, 30  
   empirisches, 184, 190  
   empirisches zentrales, 184  
   Flächen-, 30, 31, 38–40  
   polares, 30  
   zentrales, 153, 161
- Monotonie, 27
- nachschussig, 85, 87–89, 120, 124, 127, 131
- Parameterdarstellung, 32, 33, 35, 36  
 Permutationen, 135  
   mit Wiederholung, 136  
   ohne Wiederholung, 136  
 Produkt, 27  
 Punktmenge  
   offene, 25  
   zusammenhängende offene, 25
- Quantil, 148, 150, 159, 162, 163, 166, 167, 169, 171, 195,  
 196, 211
- Randbedingung, 46, 75–77, 79–81  
 Randwertaufgabe, 46  
 Regel  
   von Cramer, 61, 62  
 Rendite, 108  
 Rente, 120  
   arithmetisch wachsende, 129  
   arithmetisch wachsende nachschussige, 131  
   arithmetisch wachsende vorschussige, 129  
   dynamische, 120  
   ewige, 120, 122, 123, 126, 128, 130  
   geometrisch wachsende, 125  
   geometrisch wachsende nachschussige, 127  
   geometrisch wachsende vorschussige, 125  
   konstante, 120  
   konstante nachschussige, 123  
   konstante vorschussige, 120  
   Zeit-, 120  
 Resonanzfall, 60  
 Richtungsfeld, 49, 50, 52  
 Ruckzahlungsperioden, 102, 103, 105
- Sattelpunkt, 22, 23  
 Satz  
   Additions-, 143, 144, 154, 156, 158  
   Multiplikations-, 145, 146, 154, 156, 191  
   von Green, 37  
 Schätzung, 190  
   Konfidenz-, 194–196, 198, 199, 201, 213  
   Punkt-, 190, 193, 216, 219  
 Schuld  
   Anfangs-, 100, 101, 103, 105  
   Rest-, 99, 100, 102, 103  
 Schwerpunkt  
   geometrischer, 30, 31, 35  
   Massen-, 30, 31, 34, 35  
 Schwingung, mechanische, 71

- Schwingungssystem, 82  
 Seilkurve, 74, 76  
 Standardabweichung, 153–157, 188, 208  
   empirische, 184  
 stetig, 158  
   an der Stelle, 14  
   Funktion, 14  
 Stichprobe, 177, 178, 183, 185, 186, 189, 192, 193, 196,  
   203, 204, 206, 210, 215, 218, 220  
   -funktion, 186, 194–196, 198, 200, 213  
 Stromung  
   stationare, 81
- Test  
    $\chi^2$ -Anpassungs-, 211, 218  
   einseitiger, 203  
   zweiseitiger, 203, 205, 206, 210
- Tilgung  
   Annuitäten-, 99, 100, 102, 103  
   Raten-, 99, 103, 104  
   Zinsschuld-, 99, 105
- Umfang, 153  
 Umgebung, 20–22
- Varianz, 151–157, 160–162, 176, 184, 187, 190, 195, 196,  
   198, 199, 204, 206–208  
   empirische, 183, 187, 197, 200, 215  
 Variation der Konstanten, 51, 52, 60–62, 75, 79  
 Variationen, 136  
   mit Wiederholung, 137  
   ohne Wiederholung, 136  
 Variationskoeffizient, 161, 171, 217  
   empirischer, 184  
 Vektorfeld, 32, 33, 36  
   stetig differenzierbares, 38  
 Vermessung, 41  
 Verteilung, 148, 151, 176, 192, 211, 212, 215, 217  
    $\chi_n^2$ -, 187, 198  
    $t_n$ -, 187, 197  
   Binomial-, 153, 172, 174  
   diskrete, 150  
   Exponential-, 167, 168  
   geometrische, 156, 192  
   Häufigkeits-, 181, 185  
   hypergeometrische, 155, 174  
   Neville-, 170, 172, 215  
   Normal-, 164, 174, 193, 215  
   Poisson-, 157, 168, 172, 218, 219  
   Rechteck-, 163, 190  
   Standard-Neville-, 170, 216  
   Standard-Normal-, 165  
   Stichproben-, 188, 189  
   Weibull-, 168
- Verteilungsdichte, 187  
 Verteilungsfunktion, 148, 150, 154–157, 161, 163, 164,  
   167, 168, 170, 174, 177, 186, 189, 194, 196,  
   198, 201, 203, 206–208, 211  
   empirische, 185  
   stetige, 160, 162
- Verzinsung  
   geometrische, 89, 107, 118, 120  
   jährliche, 90  
   lineare, 85, 86  
   stetige, 96–98  
   taggenaue, 93  
   unterjährige, 93, 95, 96  
   unterjährige geometrische, 124  
   unterjährige lineare, 124  
   wechselnde, 91  
 vollkommener Brunnen, 80  
 Vollständigkeitsrelation, 151, 152, 160, 178  
 Volumen, 28, 29  
 vorschussig, 85, 87–89, 120, 122, 123, 125, 129
- Wahrscheinlichkeit, 140–143, 148, 149, 154–158, 166,  
   168, 172, 173, 177, 188, 189, 191, 194, 195,  
   203, 204, 212  
   -diagramm, 149, 150, 154–157  
   bedingte, 144, 145, 169  
   Intervall-, 151, 159, 175, 211  
   Irrtums-, 194, 196, 197, 199, 203, 205–209, 211–  
   213  
   Sicherheits-, 209  
   totale, 146, 147  
 Wasserrinne, 42  
 Widerstandsmoment, 40
- Zinsen, 85, 86, 88, 89, 99, 104, 105, 120  
   Haben-, 85  
   Soll-, 85  
 Zinsfaktor, 122, 124, 126, 128, 130, 133  
 Zinsfus  
   interner, 108, 110  
 Zinsintensität, 97  
   äquivalente, 97  
 Zinsperiode, 85, 86, 89–94, 99, 107, 108, 125  
 Zinssatz, 85–87, 89–91, 93, 97, 99, 107, 108, 118, 120,  
   121, 124, 131  
   äquivalenter unterjähriger, 95  
   effektiver, 87, 94–97, 118, 119  
   Haben-, 119  
   Kalkulations-, 107  
   Soll-, 119  
   unterjähriger, 95  
 Zirkulation, 36, 37  
 Zufallsvariable, 147, 148, 154–157, 160, 161, 163, 164,  
   167, 168, 170, 172, 173, 176, 177, 181, 186,  
   189, 195, 196, 198, 199, 203, 211, 212, 214,  
   215, 217, 218  
   diskrete, 147, 149–151, 158, 191  
   standardisierte, 161  
   stetige, 147, 158, 159, 162