Mathematik für Bauingenieure

Grundlagen für das Master-Studium

Aufgaben und Lösungen

Prof. Dr. rer. nat. Kerstin Rjasanowa

10. Juni 2016

Inhaltsverzeichnis

1 Aufgaben

Kapitel 1

Definition, Graphische Darstellung

1.1 Bestimmen Sie für jede der folgenden Funktionen den natürlichen Definitionsbereich:

a) $f(x,y) = -x^2 + 10x - y^2 + 10y - 40$

b) $f(x,y) = \sqrt{x} + \dfrac{x}{y}$

c) $f(x,y) = x\mathrm{e}^{\sqrt{1-y}} + \ln(y)$

1.2 Ermitteln Sie Definitionsbereich, Wertebereich und Bild folgender Funktionen:

a) $z = x - y$ **b)** $z = x^2 + y^2$

c) $z = c$ **d)** $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

e) $z = \sqrt{1 - x^2}$ **f)** $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

1.3 Ermitteln Sie Isolinienbilder für die Funktionen

a) $f(x,y) = xy$ **b)** $f(x,y) = x^2 - y^2$

Partielle Ableitungen

1.4 Ermitteln Sie für die Funktionen in den Aufgaben **1.1, 1.2** jeweils die partiellen Ableitungen erster Ordnung nach allen Veränderlichen.

1.5 Berechnen Sie für nachstehende Funktionen die partiellen Ableitungen erster Ordnung!

a) $f(x,y) = 5x^3 + 3x^2 + 7xy^5 - y^6$

b) $f(x,y,z) = xyz + \dfrac{y-z}{x}$

c) $g(u,v,w) = \dfrac{ux}{u^2 + v^2 + w^2}$

d) $T(f,g,h) = \dfrac{1}{\sqrt{g^2 + h^2}}$

Gradient, Totales Differenzial

1.6 Berechnen Sie den Gradienten der Funktionen an den angegebenen Stellen:

a) $f(x,y) = -4x - 2y + 4,\quad (x_0, y_0)^\top = (3,2)^\top$

b) $f(x,y) = xy,\quad (x_0, y_0)^\top = (1,2)^\top$

c) $f(x,y) = \sqrt{x} + \dfrac{x}{y},\quad (x_0, y_0)^\top = (4,2)^\top$

1.7 Berechnen Sie für folgende Funktionen das totale Differenzial:

a) $f = f(x,y) = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}$

b) $g = g(u,v) = \arctan\left(\dfrac{u}{v}\right)$

c) $w = w(x,y,z) = \mathrm{e}^{x^2+y^2+z^2}$

d) $z = z(u,v,w) = \ln\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$

1.8 Berechnen Sie von allen in Aufgabe **1.7** aufgeführten Funktionen die partiellen Ableitungen 2. Ordnung.

1.9 Berechnen Sie Δz und dz für $(x_1, x_2)^\top = (5,4)^\top$, $(\Delta x_1, \Delta x_2)^\top = (0.1, -0.2)^\top$ mit $z = x_1 x_2$.

Fehlerrechnung

1.10 Die Kanten eines Quaders wurden mit einer Genauigkeit von $\pm 0,1$ mm gemessen: $a = 10$ cm, $b = 6$ cm, $c = 5$ cm. Für die Masse erhielt man $(270 \pm 0,5)$ g. Berechnen Sie die Dichte und den maximalen absoluten und relativen Fehler.

1.11 Um wie viel Prozent kann das errechnete Volumen eines Zylinders fehlerhaft sein, wenn der Radius mit 1/3 % und die Höhe mit 1/2 % fehlerhaft gemessen wurde?

1.12 Zur Bestimmung der nicht messbaren Strecke $\overline{AB} = c$ wurde ein Hilfspunkt C gewählt und dann die Strecken $a = 364,76$ m, $b = 402,35$ m und der Winkel $\beta = 68°14'$ gemessen (siehe **Bild 1.1**). Die Messfehler wurden geschätzt mit $\Delta a = \Delta b = \pm 5$ cm, $\Delta\beta = \pm 1'$. Wie groß sind die Strecke c und der maximale absolute Fehler bei ihrer Ermittlung? Berechnen Sie die relativen Fehler von a, b, β und c!

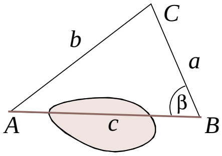

Bild 1.1 Strecke c

1.13 Geben Sie eine Abschätzung für den maximalen relativen Fehler bei der Ermittlung des maximalen Schnittmomentes eines beidseits gelenkig gelagerten Balkens der Länge l an, der von einer Einzelkraft F im Abstand a vom linken Auflager belastet wird, wenn die Längen l und a mit einem relativen Fehler von maximal 1 % und die Kraft F mit einem relativen Fehler von maximal 2 % gemessen wurde.

Hinweis: Das maximale Schnittmoment M errechnet sich zu $M = \dfrac{Fa(l-a)}{l}$.

1.14 Der Träger in **Bild 1.2** besteht aus einem Kantholz mit quadratischem Querschnitt. Es wurden gemessen:

die Länge des Trägers	$l = 205 \pm 1$ cm,
die einwirkende Einzelkraft	$F = 900 \pm 5$ N,
die Kantenlänge	$a = 98 \pm 1$ mm,
die Durchbiegung in der Mitte	$f = 9.2 \pm 0.2$ mm

Aus diesen Angaben soll der Elastizitätsmodul E bestimmt werden, wenn bekannt ist, dass für die Durchbiegung f in der Mitte des Balkens gilt

$$f = \frac{Fl^3}{48EI},$$

wobei $I = a^4/12$ das Trägheitsmoment des quadratischen Querschnittes ist. Mit welchem absoluten und relativen Fehler ist bei der Bestimmung des Elastizitätsmoduls E maximal zu rechnen?

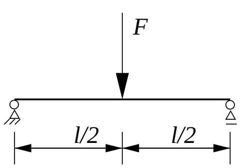

Bild 1.2 Träger

1.15 Die Zeiten t_1 und t_2, die zwei Bagger jeweils allein brauchen, um einen Kanal auszuheben, wurden jeweils mit $t_1 = (24 \pm 0.25)$ h und $t_2 = (18 \pm 0.2)$ h angegeben. Berechnen Sie eine Abschätzung für den absoluten und den relativen Fehler der Zeit t, die beide Bagger benötigen, um den Kanal gemeinsam auszuheben.

1.16 Bei der Vermessung einer dreieckigen Grundstücksfläche wurde $b = 126$ m, $\alpha = 63°$, $\beta = 75°$ ermittelt (siehe **Bild 1.3**). Die geschätzten maximalen Messfehler betragen $\Delta b = \pm 0.05$ m, $\Delta\alpha = \Delta\beta = \pm 2'$. Zu ermitteln ist der relative Fehler bei der Berechnung der Länge l der eingezeichneten Dreiecksseite sowie das Intervall, in dem l bei linearer Näherung liegt.

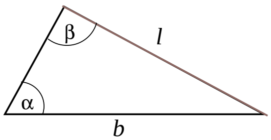

Bild 1.3 Grundstücksfläche

1.17 Ermitteln Sie den maximalen absoluten und relativen Fehler bei der Bestimmung des Fassungsvermögens des Abfallcontainers in **Bild 1.4**, wenn die Längen $a = 2$ m, $b = 5$ m, $c = 1.5$ m und $h = 1$ m jeweils mit einem Fehler von $\pm$ 2 cm gemessen wurden.

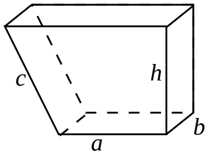

Bild 1.4 Abfallcontainer

1.18 Für den Elastizitätsmodul E eines Stabes mit quadratischem Querschnitt gilt beim Versuchsaufbau in **Bild 1.5**

$$E = 4Fl^3h^{-1}a^{-4}.$$

Für den zu erwartenden Elastizitätsmodul ist das Intervall aufgrund linearer Fehlerapproximation anzugeben, wenn $l = 50$ cm (auf 1 %), $a = 2$ cm (auf 1 %), $h = 2$ mm (auf 3 %) und $F = 130$ N (auf 0,5 % genau) gemessen wurde.

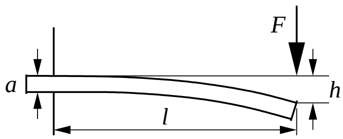

Bild 1.5 Versuchsaufbau

1.19 Der Radius r eines flachen Kreisbogens AB mit unzugänglichem Mittelpunkt M kann durch die Messung der Sehne $\overline{AB} = 2s$ und der Pfeilhöhe p bestimmt werden (siehe **Bild 1.6**). Gemessen wurde $2s = 19.45$ cm $\pm$ 0.5 mm; $p = 3,62$ cm $\pm$ 0.3 mm. Geben Sie absoluten und relativen Fehler bei der Bestimmung des Radius r an!

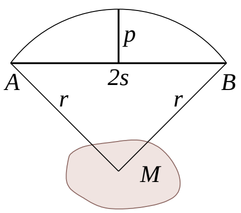

Bild 1.6 Kreisbogen

Extremwertaufgaben

1.20 Untersuchen Sie folgende Funktionen auf lokale Extrema!

a) $f(x,y) = x - 8y - x^2 + xy - y^2,\ D_f = R^2$

b) $f(x,y) = 2x^3 - 24x - 18y + 3y^2,$

$D_f = \{(x,y)^\top \in R^2,\ x \geq 0\}$

c) $f(x,y) = 2 + 2x^2 - x + 4.5y^2 - y,\ D_f = R^2$

1.21 Untersuchen Sie folgende Funktionen auf Extremwerte und Sattelpunkte:

a) $f(x,y) = 64 - 2x^2 - 3x + 3y^2 - y,\ D_f = R^2$

b) $f(x,y) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + y^3 - 12y,\ D_f = R^2$

c) $f(x,y) = x^2y - 2xy^2 + 3y,\ D_f = R^2$

1.22 **a)** Die Zahl 8 ist so in drei positive Faktoren zu zerlegen, dass die Summe der reziproken Faktoren minimal wird.

b) Die Zahl 8 ist so in drei Summanden zu zerlegen, dass das Produkt der reziproken Summanden minimal wird.

1.23 Ein quaderförmiger, oben offener Blechkasten soll bei gegebenem Fassungsvermögen V möglichst kleines Gewicht haben. Wie müssen seine Abmessungen gewählt werden?

1.24 Es ist der Quader mit dem größten Volumen zu ermitteln, der folgendem Ellipsoiden einbeschrieben ist:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

1.25 Wie groß ist der kürzeste Abstand der Fläche $4x^2 + y^4 + 16z = 0$ von der Ebene $2x + y + 4z = 12$?

Hinweis: Die Hessesche Normalform der Ebenengleichung kann benutzt werden.

1.26 Für welchen Punkt $P(x,y)$ ist die Summe der Quadrate der Entfernungen von den Punkten $P_1(x_1,y_1), P_2(x_2,y_2), ..., P_n(x_n,y_n)$ minimal?

1.27 Das elliptische Paraboloid $z = x^2 + 4y^2$ wird von der Ebene $4x - 8y - z + 24 = 0$ geschnitten. Man bestimme den höchsten und den tiefsten Punkt der Schnittkurve, d.h. den Punkt mit der größten bzw. der kleinsten z-Koordinate.

1.28 Gesucht sind die wärmsten und kältesten Punkte auf der Kugel $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ bei einer Temperaturverteilung $T(x,y,z) = xy + yz$.

1.29 Der minimale Abstand eines Punktes P der Ebene $x + y + z + 4 = 0$ von der Oberfläche des Paraboloids $(x+6)^2 + (y-3)^2 = z - 2$ ist zu ermitteln.

1.30 Gesucht ist der Punkt im Inneren eines Vierecks, für den die Summe der Quadrate der Abstände des Punktes von den Ecken am kleinsten ist.

Kapitel 2

Gewöhnliche Differenzialgleichungen

2.1 Lösen Sie folgende Differenzialgleichungen mit der Methode der Trennung der Veränderlichen!

a) $y' = -\dfrac{x}{y}$ **b)** $y' = y \tan x$

c) $y' = xy$ **d)** $y'(1+x) = 1-y$

e) $(y')^2 + y^2 = 1$ **f)** $xyy' + y^2 = 1$

g) $x(1+x) - y(1+y)y' = 0$

2.2 Lösen Sie die Differenzialgleichungen 1. Ordnung mit der Methode der Variation der Konstanten!

a) $(x^2+1)y'+2xy=2x^2$ mit $x_0=1,\ y_0=2$

b) $y'=\dfrac{x-y}{x}$ **c)** $y'-xy+2x=0$

d) $xy'+2y=x^5+x$ **e)** $xy'-y=x^2\cos x$

f) $(x^2+y)\,dx+x\,dy=0$

g) $y'(1-x)=1-y$

mit $x_0=1,\ y_0=-2,\ x_1=0,\ y_1=0$

2.3 Lösen Sie die homogenen Diffentialgleichungen höherer Ordnung:

a) $y'' - y = 0$ **b)** $y'' + y = 0$

c) $y'' - 4y' + 4y = 0$

d) $y''' - 5y'' + 8y' - 4y = 0$

e) $\ddot{s} + 2\dot{s} + 2s = 0$ **f)** $y^{IV} - 16y = 0$

2.4 Lösen Sie die inhomogenen Differenzialgleichungen höherer Ordnung:

a) $y'' + y = x^2$ **b)** $y'' - y = \cos x$

c) $y'' - 3y' + 2y = e^{3x}$

d) $y'' - 3y' + 2y = \cos(2x)$

e) $y''' - y'' + y' - y = \cos(2x)$

f) $y''+4y=\cos(2x)$ mit $x_0=0,\ y_0=0,\ y_0'=0$

g) $y'' - y = e^{-x}$

h) $y^{IV} - 4y''' + 6y'' - 4y' + y = (x+1)e^x$

Physikalische Anwendungen
Homogene Differenzialgleichungen

2.5 Eine Stange, die zwischen den Punkten $(0,0)$ und $(l,0)$ gelenkig gelagert ist, rotiert um die x-Achse. Dabei erfüllt ihre Durchbiegung $y(x)$, falls sie überhaupt eintritt, die Gleichung

$$y^{IV} - a^4 y = 0,$$

wobei a eine Konstante ist, die von der Rotationsgeschwindigkeit und den Eigenschaften der Stange abhängt. In den Punkten $x = 0$ und $x = l$ sind die Größen y und y'' jeweils gleich 0. Für welche Werte von a tritt eine Durchbiegung ein?

2.6 Eine Scheibe mit dem Trägheitsmoment I sei an einem Draht (Länge l, Radius r, Gleitmodul G) aufgehängt. Die kleinen Drehschwingungen $\varphi = \varphi(t)$ dieser Scheibe werden durch die Differenzialgleichung

$$I\ddot{\varphi} + k\varphi = 0$$

beschrieben. Dabei ist $k = \pi G r^4/(2l)$ die Federkonstante. Zu ermitteln sind der zeitliche Verlauf der Drehschwingungen $\varphi(t)$ sowie ihre Periode T für die Anfangsbedingungen

$$\varphi(0) = \varphi_0,\ \dot{\varphi}(0) = 0.$$

2.7 Ermitteln Sie den kleinsten positiven Wert für die Kraft F, für den die Biegelinie eines beidseitig gelenkig gelagerten Stabes der Länge l (siehe **Bild 2.1**) und der konstanten Biegesteifigkeit EI von der Nulllage abweicht!

Hinweis: Die Biegelinie w erfüllt die Randwertaufgabe

$$\left.\begin{array}{lcl} w^{IV} + \lambda^2 w'' &=& 0,\ 0 < x < l, \\ w(0) &=& 0, \\ w''(0) &=& 0, \\ w(l) &=& 0, \\ w''(l) &=& 0 \end{array}\right\} ,\lambda^2 = \frac{F}{EI}.$$

Abweichen von der Nulllage bedeutet, dass die Lösung $w(x)$ dieser Randwertaufgabe nicht identisch 0 ist.

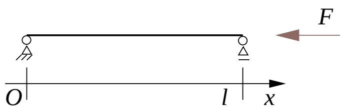

Bild 2.1 Knickstab

2.8 Leiten Sie die Gleichung der Biegelinie w eines horizontalen Kragarms der Länge l ab, an dessen freiem Ende ein Moment vom Betrag M angreift (siehe **Bild 2.2**). Der Kragarm hat konstante Biegesteifigkeit EI.

Hinweis: Die Biegelinie w erfüllt die Randwertaufgabe

$$\left.\begin{array}{lcl} EIw^{IV} & = & 0,\ 0 < x < l, \\ w(0) & = & 0, \\ w'(0) & = & 0, \\ w''(l) & = & -M/EI, \\ w'''(l) & = & 0. \end{array}\right\}$$

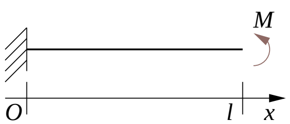

Bild 2.2 Kragarm mit Momentenlast

2.9 Bestimmen Sie die Gleichung der Biegelinie w eines horizontalen Kragarms der Länge l, an dessen freien Ende eine Gesamtkraft vom Betrag F angreift (siehe **Bild 2.3**). Der Kragarm hat konstante Biegesteifigkeit EI.

Hinweis: Die Biegelinie w erfüllt die Randwertaufgabe

$$\left.\begin{array}{lcl} EIw^{IV} & = & 0,\ 0 < x < l, \\ w(0) & = & 0, \\ w'(0) & = & 0, \\ w''(l) & = & 0, \\ w'''(l) & = & F/EI. \end{array}\right\}$$

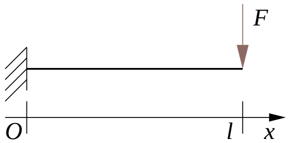

Bild 2.3 Kragarm mit Einzelkraft

Physikalische Anwendungen
Inhomogene Differenzialgleichungen

2.10 Ein Körper der Masse $m = 1$ kg fällt aus der Höhe $h = 20$ m unter dem Einfluss der Schwerkraft $G = mg$ und einer Reibungskraft herab, die proportional der Fallgeschwindigkeit v ist: $F_R = -kv$. Die Anfangsgeschwindigkeit ist gleich Null. Zu ermitteln ist eine Gleichung für die Höhe s, in der sich der Körper t Sekunden nach dem Beginn der Bewegung befindet. Dabei sei $g = 10$ m/s^2 und $k = 10$ kg/s vorausgesetzt.

2.11 Nach dem zweiten Axiom von Newton wirkt bei der Bewegung eines Körpers der Masse m auf der x-Achse auf diesen die Kraft $F = m\ddot{x}$, wobei $x(t)$ die Position des Körpers zum Zeitpunkt t ist und $\ddot{x}$ seine Beschleunigung.

Ein Körper gleitet auf einer horizontalen Ebene unter dem Einfluss eines Stoßes, der ihm die Anfangsgeschwindigkeit v_0 erteilt hat. Auf den Körper wirkt die Reibungskraft $-km$. Gesucht ist die Position und die Geschwindigkeit des Körpers in Abhängigkeit von der Zeit. Wann und wo kommt der Körper zur Ruhe?

2.12 Ein Zylinder vom Grundkreisradius r und der Masse m schwimmt mit vertikaler Achslage im Wasser. Seine Eintauchtiefe ist l. Gesucht ist die Periode der Schwingung, die sich ergibt, wenn man den Zylinder ein wenig in das Wasser eintaucht und danach loslässt. Der Bewegungswiderstand ist angenähert gleich Null anzunehmen.

2.13 Berechnen Sie die Position $x(t)$ eines mechanischen Federschwingers der Masse $m = 1$ bei einer ungedämpften Schwingung, d. h. ohne Reibungswiderstand, zum Zeitpunkt t, wenn seine Auslenkung zu Beginn des Schwingungsvorgangs $x(0) = x_0$ und seine Anfangsgeschwindigkeit gleich Null beträgt. Das System wird durch eine äußere Kraft $K(t) = k_0 \cos 2t$ in Bewegung gehalten. Die Federkonstante betrage $k = 1$. Die Gleichung zur Ermittlung der Position $x(t)$ des beschriebenen mechanischen Federschwingers lautet

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = K(t).$$

2.14 Berechnen Sie die Biegelinie für folgenden Träger konstanter Biegesteifigkeit EI mit einer parabolischen Streckenlast q und dem Moment M am verschieblichen Lager (siehe **Bild 2.4**).

Hinweis: Die Biegelinie w erfüllt die folgende Differenzialgleichung mit den angegebenen Randbedingungen, wobei E der Elastizitätsmodul und I das Trägheitsmoment des Balkenquerschnitts sind und als konstant vorausgesetzt werden:

$$\left.\begin{array}{lcl} EIw^{IV} & = & q(x),\ 0 < x < 2l \\ w(0) & = & 0, \\ w(2l) & = & 0, \\ w''(0) & = & 0, \\ w''(2l) & = & -M/EI. \end{array}\right\}$$

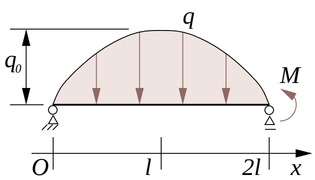

Bild 2.4 Belasteter Träger

2.15 Leiten Sie die Gleichung der Momentenlinie M und der Querkraftlinie V eines beidseits gelenkig gelagerten Balkens konstanter Biegesteifigkeit EI der Länge l her, wenn die Belastungsfunktion q eine Parabel mit dem Scheitelpunkt über dem Auflager B darstellt (siehe **Bild 2.5**).

Hinweis: Die Momentenlinie M erfüllt die Randwertaufgabe

$$\left.\begin{array}{lcl} M''(x) & = & -q(x),\ 0 < x < l, \\ M(0) & = & 0, \\ M(l) & = & 0, \end{array}\right\},$$

und für die Querkraftline V gilt

$$V(x) = M'(x).$$

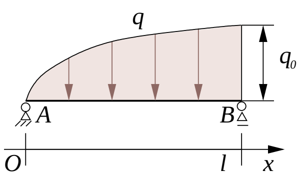

Bild 2.5 Belasteter Balken

Kapitel 3

Zinsen

3.1 Ein Bauherr legt den Betrag $K_0 = 100\,000$ € zu einem jahrlichen konstanten Zinssatz von $i = 5\%$ über einen Zeitraum von drei Jahren an. Wie groß ist dann sein Kapital bei

a) linearer, **b)** jahrlicher, **c)** monatlicher, **d)** täglicher, **e)** stetiger

Verzinsung?

3.2 **a)** Welchen Betrag muss man bei 4% Zinsen p. a.und linearer Verzinsung jeweils am Ende eines Jahres auf das Konto einzahlen, wenn man nach 5 Jahren 10 000 € auf dem Konto haben will?

b) Welcher Betrag ergibt sich bei 4% p. a. Zinseszinsen?

3.3 Ein Bauherr hat vier Zahlungen zu leisten: 6 000 € sofort, 6 000 € nach drei, 6 000 € nach fünf und 6 000 € nach acht Monaten. Er will die Summe auf einmal zahlen. Wann kann das ohne Zinsverlust geschehen, einen konstanten Zinssatz vorausgesetzt?

3.4 A. Groß wollte von B. Grund ein Grundstück kaufen. B. Grund forderte eine Summe, die A. Groß nach acht Monaten zahlen sollte. A. Groß zahlte stattdessen sofort 163 500 €. Wie viel forderte B. Grund, eine Verzinsung von jährlich 4.5% vorausgesetzt?

3.5 Ein Bauunternehmer möchte einen größeren Posten Mauerziegel vom Hersteller beziehen. Er kann entweder sofort bezahlen oder mit einem Aufschlag von 4% jeweils ein Drittel des Preises sofort, nach drei und nach sechs Monaten.

a) Welche Zahlungsweise ist für ihn günstiger, einen Zinssatz von 2.5% p. a. vorausgesetzt?

b) Bei welchem Aufschlag lohnt sich die Zahlungsweise in Raten, den Zinssatz von 2.5% p. a. vorausgesetzt?

c) Bei welchem Zinssatz lohnt sich die Zahlungsweise in Raten, den Aufschlag von 4% vorausgesetzt?

3.6 Beim Verkauf einer Caterpillar-Planierraupe werden dem insolventen Bauunternehmer B. Trieblos drei Angebote unterbreitet: Die Zahlung von

I 50 000 € nach drei Monaten,

II 51 000 € nach sechs Monaten,

III 16 500 € jeweils nach einem, zwei und drei Monaten.

a) Welches ist aus heutiger Sicht das für den insolventen Bauunternehmer B. Trieblos beste Angebot, einen Zinssatz von 3% p. a. vorausgesetzt?

b) Bei welchem Zinssatz ist das erste und das zweite Angebot gleichwertig?

c) Bei welchen Zinssätzen ist das dritte Angebot für den insolventen Bauunternehmer B. Trieblos besser als das erste?

3.7 Der Student Erasmus Fernweh möchte ein Praktikum für drei Monate auf einer Baustelle im Ausland absolvieren. Zur Finanzierung werden ihm drei Varianten vorgeschlagen:

I die einmalige Zahlung von 3 040 € zu Beginn des Praktikums,

II die Zahlung von 1 020 € jeweils zu Beginn jedes der drei Monate,

III die Zahlung von 3 060 € am Ende des erfolgreich absolvierten Praktikums nach drei Monaten.

a) Welches ist die beste Variante für den Studenten Erasmus Fernweh, einen Zinssatz von 2% p. a. vorausgesetzt?

b) Bei welchem Zinssatz ist das erste und das zweite Angebot gleichwertig?

c) Bei welchem Zinssatz ist das zweite und das dritte Angebot gleichwertig?

d) Bei welchem Zinssatz ist das erste und das dritte Angebot gleichwertig?

Tilgung

3.8 Wie groß ist der Tilgungsbetrag bei Ratentilgung, wenn sich der Kreditbetrag auf 75 000 € beläuft und die Tilgung bei einem Zinssatz von 6% nach 10 Jahren beendet sein soll. Wieviel sind insgesamt an Zinsen zu zahlen? Wie groß ist die Restschuld nach 5 Jahren?

3.9 Für den Kauf eines Löffelbaggers und eines Gabelstaplers hat die Baggerbau KG einen Kredit über 150 000 € aufgenommen, der in unregelmäßigen jährlichen Raten bei einer Effektivverzinsung von 6.5% getilgt werden kann. In den ersten drei Jahren zahlt die Firma 30 000 €, 40 000 € bzw. 20 000 € an die Bank, im darauffolgenden Jahr nichts, im fünften Jahr 25 000 €. Auf welchen Betrag beläuft sich die Restschuld am Ende des fünften Jahres?

3.10 Der Unternehmer S. Schuldauf möchte für eine technische Neuerung Fördermittel der EU in Höhe von 200 000 € beantragen. Diese werden nur gewährt, wenn das Darlehen bei Annuitätentilgung in maximal zehn Jahren vollständig getilgt ist. Er kann bei einem Zinssatz von 5% eine jährliche Rückzahlung von höchstens 25 000 € verkraften. Lohnt es sich, einen Antrag auf Fördermittel der EU zu stellen?

3.11 Für eine Grundschuld müssen vierteljährlich 1.5% Zinsen gezahlt werden. Die Rückzahlung erfolgt in nachschüssigen vierteljährlichen Annuitäten von 2% der gesamten Ausgangsschuld. Nach welcher Zeit ist die Grundschuld restlos getilgt?

3.12 Auf ein Darlehen von 250 000 € sind jährlich 4.8% Zinsen zu zahlen.

a) Wie viel Prozent des Darlehens beträgt die jährliche konstante Annuität, mit der diese Schuld in 10 Jahren halbiert wird?

b) Wie lang ist bei Zahlung der in a) berechneten Annuität die Laufzeit bis zur vollständigen Tilgung?

c) Wie groß ist die Restschuld nach 15 Jahren?

Investitionsrechnung

3.13 Für die Investition mit folgenden Einnahmen und Ausgaben ist der interne Zinsfuß zu ermitteln.

Jahr k	Einnahme E_k	Ausgabe A_k
0	0	50 000
1	45 000	20 000
2	60 000	30 000

3.14 Ein Betonmischer kostet 40 000 €. Er ermöglicht die Freisetzung eines Bauarbeiters, der zeitweise angestellt war, und damit jährliche Minderbelastungen von 6 500 € ab dem folgenden Jahr. Die Nutzungsdauer des Betonmischers beträgt 10 Jahre bei vollständiger Abschreibung (Restwert gleich Null). Wie hoch ist die Rendite der Investition? Lohnt sich die Investition, einen Kalkulationszinssatz von 7.5% p. a. vorausgesetzt?

3.15 In einem Unternehmen wurde eine maximal zulässige Amortisationszeit von 5 Jahren festgelegt. Es ist eine Rationalisierungsinvestition geplant, durch die eine alte Anlage mit einem Stundenkostensatz von 8 € durch eine neue Anlage mit einem Stundenkostensatz von 5.50 € ersetzt werden soll. Die Anlagen werden 2 400 Stunden pro Jahr genutzt. Amortisiert sich die Investition innerhalb der maximal zulässigen Zeit von fünf Jahren, einen Zinssatz von 10% p. a. zugrunde gelegt, wenn die Anschaffungskosten 24 000 € betragen? Die jährlichen Einsparungen sind erstmalig nach Ablauf eines Jahres anzusetzen.

3.16 Ermitteln Sie die Kapitalwerte einer Investition von 100 000 € bei einem Kalkulationszinssatz von 10% p. a., bei der drei verschiedene denkbare Verläufe der Rückzahlungen pro Jahr zu berücksichtigen sind:

Jahr	Rückzahlungen [€]		
	a)	**b)**	**c)**
1	60 000	60 000	60 000
2	40 000	40 000	40 000
3	–	10 000	10 000
4	–	–	15 000

3.17 Der Investor H. Auskauf erwirbt in der Stadt Kaiserstift eine heruntergekommene Immobilie zum Preis von 1 000 000 € und muss für den Ausbau weitere 2 000 000 € ausgeben. In wie viel Jahren erzielt er damit eine Rendite von 10%, konstante jährliche Einnahmen in Höhe von 350 000 € ab dem auf die Investition folgenden Jahr vorausgesetzt? Wie groß ist der Endwert nach Ablauf dieser Frist, einen Kalkulationszinssatz von 5% p. a. vorausgesetzt?

Abschreibungen

3.18 Der Anschaffungspreis eines Baggers beläuft sich auf 81 000 €. Nach achtjähriger Nutzungsdauer wird mit einem Restwert von 3 000 € gerechnet. Wie groß ist die jährliche lineare Abschreibung? Es ist eine Tabelle zu erstellen, die pro Jahr den Buchwert am Jahresanfang, die Abschreibung und den Buchwert am Jahresende enthält.

3.19 Für die Beschaffung eines Baukrans sind 275 000 € aufzuwenden. Die Nutzungsdauer beträgt voraussichtlich acht Jahre. Bestimmen Sie die jährliche Abschreibung und den Restbuchwert nach sechs Jahren bei linearer Abschreibung, wenn mit einem Liquidationserlös von 5 000 € gerechnet werden kann.

3.20 Ermitteln Sie für ein Anlagegut den Anschaffungswert, wenn die Folge der Abschreibungsbeträge eine arithmetische Folge mit dem Anfangswert 6 000 €, der Differenz 500 € sowie 12 Gliedern darstellt. Der geschätzte Liquidationserlös ist 1 200 €.

3.21 Ein Anlagegut hat den Beschaffungspreis von 20 000 €. Der Restwert nach vier Jahren Nutzungsdauer ist mit 1 200 € anzusetzen. Die Abschreibung im ersten Jahr beträgt 8 000 €. Berechnen Sie die Abschreibungsbeträge und Buchwerte für alle vier Jahre, wenn arithmetisch-degressive Abschreibung erfolgt.

3.22 Ein Anlagegut hat den Beschaffungspreis von 20 000 €. Der Restwert nach vier Jahren Nutzungsdauer ist mit 1 200 € anzusetzen. Berechnen Sie die Abschreibungsbeträge und Buchwerte für alle vier Jahre, wenn digitale Abschreibung bzw. geometrisch-degressive Abschreibung erfolgt.

3.23 Ein Anlagegut mit einem Anschaffungswert von 120 000 € soll geometrisch-degressiv innerhalb von 10 Jahren auf den Restwert von 9 000 € abgeschrieben werden. Wie groß ist der Abschreibungsprozentsatz? Wie hoch ist der Buchwert nach dem fünften Jahr? Erstellen Sie eine Tabelle aller jährlichen Abschreibungen und Buchwerte.

Effektivzinsberechnung

3.24 Auf einer Handwerkerrechnung über 6 500 € lauten die Zahlungsbedingungen: „Entweder innerhalb von acht Tagen mit 2% Skonto zu zahlen oder Zahlung innerhalb von 14 Tagen ohne Abzug“. Welcher Effektivverzinsung des bei Ausnutzung des Skonto eingesparten Betrages entspricht das?

3.25 Die Großbank „Wucher & Sohn“ gibt Sparbriefe mit 10 Jahren Laufzeit heraus, die fünf Jahre lang mit 5% und weitere fünf Jahre mit 10% jährlich verzinst werden. Welchem Durchschnittszinssatz (Rendite) entspricht das?

3.26 Der Hauseigentümer W. Asserschaden hat eine Gebäudeversicherung abgeschlossen, die er entweder in einer Jahresrate (vorschüssig) oder in zwei halbjährlichen Raten halber Höhe (ebenfalls vorschüssig), allerdings mit 5% Aufschlag, bezahlen kann. Welcher Effektivverzinsung entsprechen die beiden halbjährlichen Raten? Ist jährliche oder halbjährliche Zahlweise günstiger für Herrn W. Asserschaden?

3.27 Der Bauunternehmer P. Lattenleger beabsichtigt, einen Steinschneider für 10 000 € zu kaufen. Dabei kann er entweder den gesamten Preis sofort bezahlen oder eine Anzahlung von 2 500 € und 36 folgende Raten von 220 € jeweils am Ende eines Monats leisten. Wozu soll sich der Bauunternehmer entscheiden, wenn er über genügend frei verfügbares Kapital verfügt, das aber mit 3% Jahreszinssatz angelegt ist?

3.28 Die Sparkasse der bedeutenden Kleinstadt Zinsheim wirbt ihre Kunden mit „Zusatzsparen bis zu 4.5%“, wobei der Jahreszinssatz im ersten Jahr 2.5% beträgt und in den folgenden vier Jahren jeweils um 0.5% steigt. Welchem Durchschnittszinssatz (Rendite) in den fünf Jahren entspricht das?

3.29 Die „Kupfereisenbank“ gewährt Darlehen, für die jährlich 17% Zinsen gezahlt werden müssen. Die Rückzahlung der Darlehen erfolgt in nachschüssigen jährlichen Annuitäten von 20% der gesamten Ausgangsschuld. Wie ist der Effektivzinssatz für die „Kupfer- und Eisenbank“? Wieviel Jahre lang muss das Darlehen zurück bezahlt werden?

3.30 Die Bank „Hypoheimer“ bietet einen Hypothekarkredit mit folgenden Konditionen an:

Nominalbetrag	100 000 €
Auszahlungskurs	90 000 €
Nominalzinssatz	9%
Laufzeit	20 Jahre

Während der Laufzeit sind die Zinsen jeweils am Jahresende zu zahlen. Die Tilgung erfolgt am Ende der Laufzeit in einem Betrag. Wie ist der Effektivzinssatz dieses Hypothekarkredits?

Renten

3.31 Welchen Betrag muss Frau B. Rauchauf heute (am Anfang eines Jahres) auf ihrem Konto bei der Daspar-Bank haben, wenn sie bei 2.5% Verzinsung über 10 Jahre am Anfang jedes Jahres 2 000 € abheben will und danach der Kontostand gleich Null sein soll?

3.32 Für den Kauf eines Radladers (geplanter Kaufpreis 50 000 €) legt ein Bauunternehmer jeweils zu Jahresbeginn 5 000 € auf sein Konto bei der Bauinvest-Bank. Wie lange muss er einzahlen, einen konstanten Jahreszinssatz von 3.5% vorausgesetzt?

3.33 Die Eltern des Studenten Bernhard Achelor haben ihm für sein dreijähriges Studium des Bauingenieurwesens auf einem Konto 25 200 € zur Verfügung gestellt. Bernhard Achelor plant, am Anfang jedes Monats 750 € abzuheben. Mit wieviel Prozent muss in diesem Fall jährlich verzinst werden?

3.34 In welcher Höhe kann eine ewige jährliche Rente bezogen werden, wenn heute bei einer Verzinsung von 3% p. a. ein Betrag von 100 000 € angelegt wird?

3.35 Herr Dr. Vital hat bei der bekannten Versicherungsgesellschaft „Niekulanz“ seit 20 Jahren eine Lebensversicherung mit der garantierten Versicherungssumme von 30 000 € bei einem konstanten Zinssatz von 3% p. a. laufen, die am Ende dieses Jahres fällig wird.

a) Wie viel € hat Dr. Vital jährlich vorschüssig eingezahlt?

b) Die Versicherungsgesellschaft „Niekulanz“ will Hern Dr. Vital am Ende diese Jahres außerdem eine Überschussbeteiligung in Höhe von 15 000 € ausbezahlen. Wie hoch ist die Rendite der Investition von Herrn Dr. Vital?

c) Die Versicherungsgesellschaft „Niekulanz“ wirbt bei Herrn Dr. Vital mit einer monatlichen konstanten vorschüssigen Rentenzahlung in Höhe von 200 € ab Januar des nächsten Jahres statt der Ausbezahlung der Lebensversicherung samt Überschussbeteiligung. Wie viele Jahre wird die Rente ausbezahlt, einen jährlichen konstanten Zinssatz von 3% vorausgesetzt? Sollte sich Herr Dr. Vital darauf einlassen?

Kapitel 4

Kombinatorik

4.1 **a)** Wie viel voneinander verschiedene dreistellige Zahlen (ganz, positiv) kann man mit Hilfe der Ziffern 1, 2, 3, 4, 5 bilden?

b) Welches Ergebnis erhält man, wenn jede Ziffer nur höchstens einmal vorkommen darf?

4.2 Wie viele Kraftfahrzeuge lassen sich durch Zusammenstellung von

a) zwei Buchstaben und vier Ziffern bzw.

b) drei Buchstaben und drei Ziffern

kennzeichnen, wobei ä, ö und ü ausgeschlossen sind?

4.3 Wie viel verschiedene Tips sind möglich

a) beim Zahlenlotto „5 aus 90“,

b) beim Sportfesttoto „6 aus 49“,

c) beim Lotto-Toto „5 aus 45“,

d) beim Tele-Lotto „5 aus 35“?

4.4 In der Umgebung eines Erholungsortes sollen 15 Wanderwege durch je zwei farbige, parallele Striche gekennzeichnet werden. Wie viele Farben benötigt man mindestens, wenn gleichfarbige Paare auftreten dürfen und die Anordnung der Striche keine Rolle spielt?

4.5 Auf wieviele Arten können 7 Personen an einem runden Tisch sitzen, wenn

a) sie sich irgendwo hinsetzen können,

b) zwei ausgewählte Personen nicht nebeneinander sitzen dürfen?

4.6 Für den Bau eines 14.20 m langen Gartenzaunes sollen zwei Sorten von Zaunelementen verwendet werden: fünf 2 m lange und drei 1.40 m lange. Wie viel verschiedene Möglichkeiten der Anordnung dieser Zaunelemente gibt es?

4.7 Aus 5 Architekten und 7 Bauingenieuren soll ein Komitee, bestehend aus 2 Architekten und 3 Bauingenieuren, gebildet werden. Wie viel Möglichkeiten gibt es dafür, wenn

a) jeder Architekt und jeder Bauingenieur berücksichtigt werden kann,

b) ein bestimmter Bauingenieur im Komitee sein muss,

c) zwei bestimmte Architekten nicht im Komitee sein sollen?

Definition der Wahrscheinlichkeit

4.8 Für den Bau eines 14.20 m langen geraden Gartenzaunes sollen zwei Sorten von Zaunelementen verwendet werden: fünf 2 m lange und drei 1.40 m lange. Unter den 2 m langen Zaunelementen befindet sich ein defektes. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass es bei der Montage des Zaunes am Rand eingebaut wird?

4.9 Auf eine Wand war vor dem Verputzen ein Drahtgeflecht aus 2 mm starkem Draht aufgebracht worden, das Rechtecke mit den Seitenlängen 12 mm und 18 mm, gemessen von Drahtmitte bis Drahtmitte, bildet. In die verputzte Wand wird mit einem 6-mm-Bohrer ein Loch gebohrt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Bohrer das Drahtgeflecht trifft?

4.10 Fünf Karten werden aus 52 gut gemischten Karten gezogen. Zu bestimmen sind die Wahrscheinlichkeit, dass darunter

a) 4 Asse sind,

b) 4 Asse und 1 König ist,

c) 3 Zehner und zwei Buben sind,

d) jeweils eine 9, 10, Bube, Dame, König in beliebiger Reihenfolge gezogen werden,

e) 3 von einer Farbe und zwei von einer anderen Farbe sind,

f) 1 As gezogen wird.

4.11 In einer Tüte befinden sich 40 Kirschen, unter denen zehn madige sind. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, unter zehn zufällig der Tüte entnommenen Kirschen keine madige zu haben?

4.12 Ein Kind spielt mit Buchstaben.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass es bei zufälliger Aneinanderreihung der Buchstaben A, A, E, H, I, K, M, M, T, T das Wort MATHEMATIK erhält?

b) Jeder Buchstabe des Alphabets (26 Buchstaben) sei genau dreimal vorhanden. Das Kind bilde nach zufälliger Auswahl von 9 Buchstaben ein „Wort“. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass dabei das Wort „Statistik“ entsteht?

4.13 Unter zwölf Studenten, darunter fünf aus dem Studiengang Bauingenierwesen, vier aus dem Studiengang Architektur und drei aus dem Studiengang Innenarchitektur, werden zufällig drei Studenten zur Teilnahme am Symposium „Einsturz eines Bauwerkes - Zufall?“ ausgewählt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass unter diesen drei Studenten

a) alle drei aus dem Studiengang Bauingenierwesen sind,

b) kein Student aus dem Studiengang Bauingenierwesen und höchstens ein Student aus dem Studiengang Innenarchitektur ist,

c) mindestens zwei Studenten aus dem Studiengang Architektur sind?

Wahrscheinlichkeit unabhängiger, disjunkter, nicht disjunkter und komplementärer Ereignisse

4.14 Eine Produktionsstraße zur Herstellung von Dachziegeln liefert im Mittel 70% Ziegel erster Wahl, 25% Ziegel zweiter Wahl und 5% Ausschuss. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich unter vier der Produktion entnommenen Dachziegeln

a) nur Ziegel erster Wahl befinden,

b) kein Ausschuss und höchstens ein Ziegel zweiter Wahl befindet,

c) mindestens drei Ziegel erster Wahl befinden?

4.15 Ein Jäger hat die Trefferwahrscheinlichkeit 0.3. Wie oft muss er schießen, um den Hasen mit der Wahrscheinlichkeit von mindestens 80% zu erlegen?

4.16 Bei der Qualitätskontrolle werden Betonbalken auf Druckfestigkeit geprüft. Sie werden in drei verschiedenen Werken gefertigt, wobei 96% der Balken aus Werk A, 92% aus Werk B und 89% aus Werk C den Anforderungen genügen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass zwei in den Werken A und B (A und C, B und C) gefertigte Betonbalken die erforderliche Druckfestigkeit haben?

4.17 Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass beim sechsmaligen Würfeln mit einem Würfel mindestens eine 6 fällt?

4.18 Die Wahrscheinlichkeit, dass A in 20 Jahren noch leben wird, ist 0.7, die für B 0.5. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in 20 Jahren a) beide, b) genau einer, c) mindestens einer von beiden, d) nur A, e) nur B noch leben wird?

4.19 Wie viel Prozent von 800 Familien mit je vier Kindern haben im Durchschnitt

a) zwei Jungen und zwei Mädchen,

b) mindestens einen Jungen,

c) keine Mädchen,

d) höchstens zwei Mädchen?

Bedingte und totale Wahrscheinlichkeit

4.20 Die Wahrscheinlichkeit, dass der Normalwert der elektrischen Netzspannung überschritten wird, sei 0.2. Ein Fernsehapparat zeigt Bildstörungen mit der Wahrscheinlichkeit 0.5 an, falls Überspannung vorliegt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Fernsehapparat mit dem Auftreten von Überspannungen Bildstörungen zeigt?

4.21 In einer für Innovationen bekannten Ziegelei erweisen sich 96% der hergestellten Dachziegel als brauchbar. Von den brauchbaren können sogar 75% in die Güteklasse 1 eingeordnet werden. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein in der Ziegelei hergestellter Dachziegel zur Güteklasse 1 gehört?

4.22 Es stehen drei Urnen zum Ziehen einer Kugel zur Verfügung. In der Urne A befinden sich 3 weiße und 2 schwarze Kugeln, in der Urne B und C je 6 schwarze und 4 weiße. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass

a) beim Entnehmen einer Kugel aus einer beliebig ausgewählten Urne eine schwarze Kugel gezogen wird?

b) dass eine gezogene Kugel, die schwarz ist, aus der ersten (zweiten, dritten) Urne stammt?

4.23 40% einer Sendung von Bauelementen kommen im Durchschnitt von Firma A, 60% der gleichen Bauelemente im Durchschnitt von Firma B. Die Qualität der Bauelemente in den Firmen A und B ist unterschiedlich; im Durchschnitt genügen 90% der Produktion von Firma A den Anforderungen, während es in Firma B nur 70% sind. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass

a) bei Entnahme eines Bauelementes aus einer beliebigen der beide Lieferungen ein Bauteil zu erhalten, das den Anforderungen genügt?

b) ein Bauelement zu entnehmen, das aus Firma A kommt und den Anforderungen genügt?

4.24 Drei Maschinen eines namhaften Dübelherstellers in der Nähe der Stadt Siekars-Neutal produzieren Betonanker. Die erste Maschine liefert ca. 2% Ausschuss, die zweite ca. 8%, die dritte ca. 5%. Die erste Maschine stellt 40% der Gesamtproduktion her, die zweite 35%, die dritte 25%.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig aus der Produktion ausgewählter Betonanker Ausschuss ist?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig aus dem Ausschuss ausgewählter Betonanker von der zweiten Maschine produziert wurde?

Diskrete Zufallsvariablen

4.25 Bei der Herstellung von Tapeten treten im Mittel auf 100 m Tapetenbahn 8 Fehler auf. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit,

a) dass auf einer Tapetenrolle von 10 m höchstens zwei Fehler auftreten,

b) dass zwischen zwei aufeinanderfolgenden Fehlern auf der Tapetenbahn mindestens 2.5 m Tapete fehlerlos sind.

4.26 An einem Sommerabend werden durchschnittlich sechs Sternschnuppen pro Stunde beobachtet. Dabei kann davon ausgegangen werden, dass die Anzahl der in beobachteten Sternschnuppen poissonverteilt ist. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass während einer Viertelstunde mindestens zwei Sternschnuppen beobachtet werden?

4.27 Vor einer Bahnstrecke, die maximal 4 min geschlossen bleibt, können bis zur nächsten zurückliegenden Kreuzung höchstens 10 Fahrzeuge halten. Wie wahrscheinlich ist ein Stau bis in den Kreuzungsbereich bei einer Verkehrsstärke von 75 Fahrzeugen pro Stunde?

4.28 Bei der Produktion von Elektromotoren sind im Durchschnitt 5% Ausschuss. Die gefertigte Losgröße beträgt 200 Stück. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei der Entnahme einer Stichprobe von 20 Stück

a) genau 5 Stück Ausschuss,

b) alle verwendbar,

c) höchstens 2 Stück Ausschuss sind?

4.29 Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Verkaufsstelle in einer Stunde

a) genau 5 Kunden,

b) höchstens 5 Kunden

registriert werden, wenn die Anzahl der Kunden im Mittel 64 pro Tag (8 Stunden) beträgt?

4.30 Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei Entnahme einer Stichprobe von 10 Stück aus einem Lieferposten von 100 Stück bei einem mittleren Ausschussprozentsatz von 3%

a) genau 3 Stück Ausschuss,

b) höchstens 2 Stück Ausschuss sind?

4.31 Die Wahrscheinlichkeit einer Knabengeburt beträgt $p = 0.52$, die einer Mädchengeburt $q = 0.48$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in Familien mit 4 Kindern

a) genau zwei Jungen,

b) höchstens zwei Jungen,

c) mindestens drei Jungen,

d) alle vier Kinder Mädchen sind?

Stetige Zufallsvariablen

4.32 Der Bauingenieur B. Such kontrolliert täglich zur Mittagszeit eine von drei seiner Baustellen, die sich an den Orten Astadt, Bdorf und Cheim befinden. Er trifft zu einem zufälligen Zeitpunkt zwischen 11.00 und 13.00 Uhr am Bahnhof ein und besteigt den Zug, der als nächster kommt. Seine Ankunftszeiten am Bahnhof sind gleichverteilt über den genannten Zeitraum. Wie groß sind die Wahrscheinlichkeiten, dass er an einem Tag die Baustelle in Astadt, Bdorf und Cheim besucht, wenn folgende Abfahrtszeiten der Züge vorgesehen sind?

Astadt um 11.10 und 12.10 Uhr,
Bdorf um 11.30 und 12.30 Uhr,
Cheim um 12.00 und 13.00 Uhr.

4.33 Der Hersteller eines Betonprüfgerätes, mit dem die Breite von Betonrissen ermittelt werden kann, wirbt damit, dass im Vergleich zur wahren Breite r eines Risses durchschnittlich 60% aller Messwerte davon eine Abweichung von nicht mehr als $\Delta r = 0.005$ aufweisen. Wie groß ist die Standardabweichung der Messwerte, wenn dafür vorausgesetzt wird

a) eine Gleichverteilung symmetrisch zu r?

b) eine Normalverteilung symmetrisch zu r?

4.34 Beim Abfüllen von Zementsäcken mit einer Masse von 25 kg tritt aufgrund der Ungenauigkeit der Abfüllmaschine eine Standardabweichung von 500 g auf.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, einen Zementsack mit mindestens 26 kg Masse zu kaufen?

b) Wie groß darf die Standardabweichung der Abfüllmaschine sein, damit die Wahrscheinlichkeit, einen Zementsack mit mehr als 200 g Abweichung von der Masse von 25 kg zu kaufen, nicht größer als 1% ist?

4.35 Die Kapazität K von Kondensatoren sei normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 200\ \mu$F und der Varianz $\sigma^2 = 25\ (\mu\text{F})^2$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kondensator fehlerbehaftet ist, wenn die Kapazität K der Kondensatoren

a) mindestens 198 μF betragen muss,

b) höchstens 202 μF betragen darf,

c) maximal um 5 μF vom Sollwert 200 μF abweichen darf?

d) Wie sind die Tolerenzen $(200-\alpha, 200+\alpha)$ [μF] zu wählen, damit die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines fehlerbehafteten Kondensators, d. h. $|K-200| > \alpha$, kleiner als 0.0001 ist?

4.36 Die Lebensdauer von Akkumulatoren für Bohrmaschinen ist normalverteilt mit dem Erwatungswert $\mu = 2$ Jahre und der Standardabweichung $\sigma = 0.5$ Jahre. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit,

a) dass ein Akkumulator bereits im ersten Jahr defekt ist?

b) dass ein Akkumulator mindestens drei Jahre hält?

c) dass ein Akkumulator eine Betriebsdauer von mehr als einem Jahr, aber weniger als zwei Jahren hat?

d) dass zwei Akkumulatoren mindestens zwei Jahre halten?

4.37 Zwei Ohmsche Widerstände werden hintereinander geschaltet. Die Werte R_1 und R_2 für diese Widersände seien normalverteilt mit $\mu_1 = 500\ \Omega$ und $\sigma_1 = 10\ \Omega$ bzw. $\mu_2 = 200\ \Omega$ und $\sigma_2 = 4\ \Omega$. In welchen Grenzen $(700 - \epsilon, 700 + \epsilon)$ $[\Omega]$ liegt mit einer Wahrscheinlichkeit von 99% der Gesamtwiderstand?

4.38 Die Zeit T (in h) zur Reparatur eines Kraftfahrzeuges genügt einer Exponentialverteilung mit dem Parameter $1/(4\ \text{h})$. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Reparaturzeit für ein Kraftfahrzeug höchstens 6 h beträgt.

4.39 Es sei bekannt, dass die Bedienung eines Kunden durchschnittlich 10 min dauert. Unter der Voraussetzung, dass die Bedienzeit exponentialverteilt ist, wird die Wahrscheinlichkeit dafür gesucht, dass ein Kunde innerhalb einer Viertelstunde abgefertigt wird.

4.40 Die Lebensdauer einer Glühlampe sei eine exponentialverteilte Zufallsvariable X. Bekannt sei, dass im Durchschnitt 75% der Glühlampen nicht länger als 140 h brennen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine Glühlampe länger als 250 h brennt.

4.41 Die Zerfallszeit T für Polonium ist eine exponentialverteilte Zufallsvariable. Mittels der Halbwertzeit, die für dieses radioaktive Element 140 Tage beträgt, ist zu bestimmen

a) der Parameter λ der Exponentialverteilung,

b) die Zeit t_0, sodass mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% ein Zerfall erfolgt.

Hinweis: Die Halbwertszeit ist diejenige Zeit, bis zu der das radioaktive Element mit einer Wahrscheinlichkeit von 50% zerfallen ist.

4.42 Erklären Sie den Zusammenhang zwischen Poissonverteilung und Exponentialverteilung.

4.43 Die Zeit zur Durchsicht und möglichen Reparatur eines Baggers kann als exponentialverteilte Zufallsvariable angenommen werden. Dabei wird durchschnittlich ein Arbeitstag pro Bagger benötigt (Parameter $\alpha = 1/(1d)$).

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Durchsicht und Reparatur eines Baggers bereits nach einem halben Arbeitstag beendet ist?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Durchsicht und Reparatur eines Baggers zwischen ein und zwei Arbeitstage beansprucht?

c) Wie lange dauert es mit 95%-iger Wahrscheinlichkeit höchstens, bis die Durchsicht und Reparatur eines Baggers beendet ist?

4.44 Die Zeit zur Reparatur einer Schleifmaschine kann als exponentialverteilte Zufallsvariable angenommen werden. Dabei werden durchschnittlich fünf Schleifmaschinen pro Tag repariert (Parameter $\alpha = 5/(1\text{d})$).

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Zeit zur Reparatur von sieben Schleifmaschinen höchstens einen Tag beträgt?

b) Wie lange dauert die Reparatur einer Schleifmaschine mit 90%-iger Wahrscheinlichkeit mindestens?

c) Wie lange dauert die Reparatur von drei Schleifmaschinen mit 90%-iger Wahrscheinlichkeit höchstens?

Grenzverteilungssätze

4.45 Von 100 000 produzierten Stahlkugeln werden 200 Stahlkugeln in einer Packung verschickt. Der durchschnittliche Ausschutzsatz der Stahlkugeln betrage 0.1%. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Packung keine Ausschussteile enthält.

4.46 Die Wahrscheinlichkeit der Produktion fehlerhafter Schaltelemente sei gleich 0.02. Die Schaltelemente werden in Packungen zu je 100 Stück verpackt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Packung

a) keine fehlerhaften Schaltelemente sind?

b) nicht mehr als 3 fehlerhafte Schaltelemente sind?

4.47 Wenn 3% der von einem Unternehmen hergestellten Glühlampen defekt sind, bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Stichprobe von 100 Glühlampen folgende Anzahlen von Glühlampen defekt sein werden:

a) 0 **b)** 1 **c)** 2 **d)** 3 **e)** 4 **f)** 5

4.48 Ein Sack enthält eine rote und sieben weiße Murmeln. Eine Murmel wird aus dem Sack gezogen, und ihre Farbe wird notiert. Dann wird die Murmel wieder in den Sack getan, und sein Inhalt wird sorgfältig gemischt. Zu bestimmen sind die Wahrscheinlichkeit, dass bei acht Zügen genau dreimal eine rote Murmel gezogen wird bei Vewendung

a) der Binomialverteilung,

b) der Näherung der Binomial- durch die Poissonverteilung.

4.49 Nach Angaben des US-Ministeriums für Gesundheit, Erziehung und Wohlfahrt beträgt die durchschnittliche Anzahl der bei einem Unfall Ertrunkenen pro Jahr 3 pro 100 000 Einwohner. Zu bestimmen sind die Wahrscheinlichkeit, dass es in einer Stadt mit 200 000 Einwohnern folgende Anzahlen von bei einem Unfall Ertrunkenen pro Jahr geben wird:

a) 0 **b)** 2 **c)** 6 **d)** 8

e) zwischen 4 und 8 **f)** weniger als 3

4.50 Eine Produktionsserie umfasst eine Million Stück. Im Durchschnitt sind jeweils 20% der in diesem Betrieb hergestellten Erzeugnisse Ausschuss. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Lieferung von 40 000 Stück aus der Produktionsserie genau 8240 Ausschussstücke enthält?

4.51 Die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ereignisses A in einem Versuch betrage 0.5. Kann man mit einer Wahrscheinlichkeit größer als 0.097 behaupten, dass das Ereignis A bei 1000 unabhängigen Versuchen mindestens 400 Mal und höchstens 600 Mal eintritt?

4.52 Die Wahrscheinlichkeit, dass ein aus der Produktion zufällig herausgegriffenes Bauteil unbrauchbar ist, sei 0.1. Ein Posten dieser Bauelemente wird nicht abgenommen, wenn mehr als neun unbrauchbare Bauteile bei der Prüfung gefunden werden. Wie viel Bauelemente sind zu prüfen, um mit der Wahrscheinlichkeit von 0.6 die Ablehnung eines Postens mit 10% Ausschuss zu sichern?

4.53 Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kondensator während der Zeit t ausfällt, betrage 0.5.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass von 100 solcher unabhängig arbeitenden Kondensatoren während der Zeit t

mehr als 60,

mindestens 45, aber höchstens 55 ausfallen?

b) Wie viele Kondensatoren müssen mindestens in Reserve liegen, damit nach der Zeitspanne T alle ausgefallenen Kondensatoren mit der Wahrscheinlichkeit 0.95 ersetzt werden können?

4.54 Die Gehäuse für Heizungsumwälzpumpen werden gegossen. Dabei tritt erfahrungsgemäß ein Ausschussprozentsatz von 10% ein. Um einen reibungslosen Ablauf der Produktion zu gewährleisten, müssen bei einem Abstrich 100 brauchbare Gehäuse hergestellt werden. Wie viele Gehäuse müssen mindestens hergestellt werden, um mit 99% diese Forderung zu erfüllen?

4.55 Zu bestimmen sind die Wahrscheinlichkeit, bei 10 Würfen einer fairen Münze drei Mal bis einschließlich sechs Mal Kopf zu erhalten, indem

a) die Binomialverteilung,

b) die Näherung der Binomial- durch die Normalverteilung verwendet wird.

4.56 Bestimmen die Wahrscheinlichkeit, dass ein Student bei einer Richtig-Falsch-Prüfung die richtigen Antworten errät bei

a) 12 von 20 Fragen, **b)** 24 von 40 Fragen.

4.57 Beim Abfüllen von Betonestrich in Säcke kann die Normmasse von 25 kg i. Allg. nicht eingehalten werden. Die Erfahrung zeigt, dass die Füllmasse eines Sackes durch die Zufallsvariable $Y = X + 25$ [kg] beschrieben werden kann. Die Zufallsvariable X ist hierbei die Abweichung von der Normmasse und wird als gleichverteilt im Intervall $[-0.8, 1.6]$ [kg] angenommen. Die Säcke sollen mit einem LKW transportiert werden. Es ist die Wahrscheinlichkeit dafür zu berechnen, dass die zulässige Nutzlast von 3 t bei der Zuladung von 117 Säcken überschritten wird.

Stichprobenfunktionen

4.58 Die jährliche Messung des Wasserverbrauchs von 20 Haushalten lieferte die Werte (in m^3)

55	74	102	83	78	43	98	65	71	102
118	87	86	59	132	99	145	165	99	83

Zu bestimmen sind Lage- und Streuungsmaßzahlen dieser Stichprobenrealisierung!

4.59 Die Gewichte von Paketen, die in einem Kaufhaus in Empfang genommen werden, haben ein Mittel von 300 lb und eine Standardabweichung von 50 lb. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass 25 zufällig enthaltene Verpackungen, die in einen Aufzug geladen werden sollen, die spezielle Sicherheitsgrenze des Aufzuges von 8200 lb überschreiten?

4.60 Ein Hersteller verschickt 1000 Pakete mit je 100 Glühlampen. Durchschnittlich sind 5% der Glühlampen defekt. In wie vielen Paketen werden erwartet

a) weniger als 90 intakte Glühlampen,

b) 98 oder mehr intakte Glühlampen?

4.61 Das Mittel der Punkte von Studenten bei einem Eignungstest beträgt 72 Punkte mit einer Standardabweichung von 8 Punkten. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass zwei Gruppen von Studenten, die aus 28 bzw. 36 Studenten bestehen, sich in ihrem Punktemittel unterscheiden

a) um 3 oder mehr Punkte,

b) um 6 oder mehr Punkte,

c) zwischen 2 und 5 Punkten.

4.62 Bei einem Examen waren die Punktzahlen normalverteilt mit einem Mittel von 72 Punkten und einer Standardabweichung von 8 Punkten.

a) Zu bestimmen ist die minimale Punktzahl der besten 20% der Studenten!

b) Zu bestimmen ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einer zufälligen Stichprobe von 100 Studenten die minimale Punktzahl der besten 20% kleiner als 76 sein wird!

4.63 Die Wahlergebnisse zeigen, dass ein bestimmter Kandidat 65% der Stimmen erhalten hat. Zu bestimmen ist die Wahrscheinlichkeit, dass zwei Zufallsstichproben, bestehend aus 200 Wählern, mehr als 10% Unterschied bei den Anteilen, wer den Kandidaten gewählt hat, aufweisen!

Konfidenzschätzungen

4.64 Mit einer Stichprobe von 10 auf einem Drehautomaten bearbeiteten Wellen ist ein Konfidenzintervall zum Konfidenzniveau $1 - \alpha = 0.9$ für den Erwartungswert der als normalverteilt vorausgesetzten Abweichungen des Wellendurchmessers von der Mitte des Toleranzgebietes zu bestimmen. Die Stichprobe ergab die Schätzwerte $\overline{x} = 2$ μm und $s = 2.4$ μm.

4.65 Bei einer $N(\mu, \sigma^2)$-verteilten Grundgesamtheit von auf einer Drehmaschine gefertigten Buchsen wurden die Innendurchmesser der Buchsen in einer Stichprobe vom Umfang $n = 10$ gemessen. Es ergab sich $\overline{x} = 10.02$ mm und $s = 0.024$ mm. Anzugeben sind Konfidenzintervalle für μ und σ^2 bei einem Konfidenzniveau von $1-\alpha = 0.99$.

4.66 Bei der Bestimmung der Entfernung zwischen zwei Punkten wurde ein Messgerät mit normalverteiltem zufälligen Fehler benutzt, und es wurden $n = 25$ Messungen durchgeführt. Dabei ergab sich als Mittelwert $\overline{x} = 24.325$ km und als Stichprobenvarianz $s^2 = 196$ m^2. Anzugeben sind Konfidenzintervalle für μ und σ^2 bei einem Konfidenzniveau von $1-\alpha = 0.99$.

Hinweis: Für σ ist ein zweiseitiges Konfidenzintervall anzugeben.

4.67 Bei einer Zufallsstichprobe von 400 Erwachsenen und 600 Jugendlichen, die ein bestimmtes Fernsehprogramm sahen, gaben 100 Erwachsene und 300 Jugendliche an, dass es ihnen gefallen hat. Zu bestimmen sind

a) die 95%- **b)** die 99%-

Konfidenzgrenzen für die Differenz der Anteile aller Erwachsenen und Jugendlichen, denen das Programm gefiel.

4.68 Bei 40 Würfen einer Münze erschien 24 Mal „Kopf". Zu bestimmen sind

a) die 95%- **b)** die 99.73%-

Konfidenzgrenzen für den Anteil von „Kopf", der bei einer unendlichen Anzahl von Münzwüfen erreicht wurde.

4.69 Gelda Wurf hat bei 24 000 Würfen eines Geldstückes 12 012 Mal das Ergebnis „Wappen" erhalten. Auf der Grundlage dieser Werte ist ein Konfidenzintervall zum Konfidenzniveau 0.99 für die Wahrscheinlichkeit p anzugeben, bei einem Wurf das Ergebnis „Wappen" zu erhalten.

4.70 Eine Stichprobe von 150 Glühlampen der Marke A ergab eine mittlere Lebensdauer von 1400 h und eine Standardabweichung von 120 h. Eine Stichprobe von 200 Glühlampen der Marke B ergab eine mittlere Lebensdauer von 1200 h und eine Standardabweichung von 80 h. Zu bestimmen sind

a) die 95%- **b)** die 99%-

Konfidenzgrenzen für den Unterschied (die Differenz) der mittleren Lebensdauer der Glühlampen der Marken A und B.

Prüfen von Hypothesen

4.71 Um den Kohlenstoffanteil eines Stahls zu prüfen, wurden 49 Proben analysiert. Es ergab sich $\overline{x} = 1.7\%$ und $s^2 = 0.5$. Zu überprüfen ist mit einer Irrtumswahrscheinlickeit $\alpha = 0.05$, ob die Abweichung des Kohlenstoffgehaltes von den gewünschten 2% signifikant sind, wenn der Kohlenstoffanteil in den Proben als normalverteilt vorausgesetzt wird.

4.72 Ein Messgerät wird im Laufe der Zeit infolge von Abnutzungserscheinungen unbrauchbar. Als Kriterium für seine Brauchbarkeit dient die Forderung $\sigma^2 < 10^{-4}$ für die Varianz seiner $N(0, \sigma^2)$-verteilten zufälligen Messfehler. Darf bei einer zulässigen Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 0.05$ auf die Brauchbarkeit des Messgerätes geschlossen werden, wenn sich aus 25 Fehlerwerten $\sigma^2 = 0.65 \cdot 10^{-4}$ ergeben hat?

4.73 Ein Hersteller von Batterien gibt an, dass höchstens 5% der von ihm gelieferten Batterien unbrauchbar sind. Zur Kontrolle dieser Angaben werden 100 Batterien kontrolliert, dabei erweisen sich 7 als defekt.

a) Widerspricht dieses Kontrollergebnis den Angaben des Herstellers, wenn eine Irrtumswahrscheinlichkeit von höchstens 5% zugelassen ist?

b) Wie viele der kontrollierten Batterien müssten mindestens unbrauchbar sein, wenn bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 0.01 Signifikanz vorliegen soll?

4.74 Zwei Firmen stellen Bagger her. Bei der ersten Firma haben von 30 zufällig ausgewählten Baggern fünf einen Qualitätsmangel, bei der zweiten sind es acht. Beruht dieser Unterschied auf der Zufälligkeit der Stichprobenergebnisse?

4.75 Eine Firma stellt Betonbalken her, deren Druckfestigkeit im Mittel 40 $\mathrm{N/mm^2}$ und eine Standardabweichung von 2 $\mathrm{N/mm^2}$ aufweist. Eine neue Zusammensetzung des Betons soll die mittlere Druckfestigkeit erhöhen. Es ist eine Entscheidungsregel anzugeben, um die neue Materialzusammensetzung mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von $\alpha = 1\%$ anzunehmen, wenn 25 Balken auf Druckfestigkeit getestet werden sollen.

4.76 Die Prüfung der Zugfestigkeit von $N = 12\,000$ Injektionsbohrankern, die auf einer Tunnelbaustelle zum Einsatz kommen sollen, gilt als bestanden, wenn durchschnittlich nicht mehr als ein Fünftel aller Injektionsbohranker defekt ist. Laut Vorschrift müssen 3% der verwendeten Anker überprüft werden. Es ist ein Kriterium anzugeben, wie viele dieser Anker defekt sein dürfen, wenn man mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von $\alpha = 0.05$ davon ausgehen möchte, dass die Prüfung der Injektionsbohrankern als bestanden gilt.

χ^2-Anpassungstest

4.77 Betrachtet wird eine Messreihe $x_1, x_2, ..., x_n$ [mm] von $n = 200$ Nietkopfdurchmessern. Es wird angenommen, dass die Messwerte normalverteilt sind. Für den Erwartungswert bzw. die Varianz ergaben sich die beiden Punktschätzungen $\overline{x} = 14.37$ bzw. $s^2 = 0.0086$. Die gemessenen Werte wurden in $r = 10$ Intervalle I_k mit den äquidistanten Klassengrenzen $b_1 = 14.15$, $b_2 = 14.20$, ..., $b_9 = 14.55$ [mm] eingeteilt. Die absoluten Klassenhäufigkeiten h_{ak}, $k = 1, ..., r$, ergaben sich wie in der Tabelle

k	1	2	3	4	5
b_k	14.15	14.20	14.25	14.30	14.35
h_{ak}	2	4	12	23	39

k	6	7	8	9	10
b_k	14.40	14.45	14.50	14.55	
h_{ak}	42	36	24	12	6

Mithilfe des χ^2-Anpassungstestes soll mit der Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 0.1$ geprüft werden, ob die $N\left(\overline{x}, s^2\right)$-Verteilung eine angemessene Beschreibung der Verteilung der Messwerte liefert.

4.78 In einer Firma wurden innerhalb eines Jahres 100 Fälle registriert, bei denen ein Arbeitnehmer genau einen Tag krankheitshalber fehlte. Die Verteilung der Fehltage auf die Wochentage ist in der Tabelle angegeben.

Wochentag	Mo	Di	Mi	Do	Fr
Anzahl der Fehltage	22	19	16	18	25

Kann die Hypothese mit der Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 5\%$ bestätigt werden, dass sich die Fehltage gleichmäßig auf die fünf Wochentage verteilen?

4.79 Eine Sekretärin schreibt 60 Briefe so oft, bis kein Schreibfehler mehr darin enthalten ist. Dabei sind 39 Briefe bereits beim ersten Schreiben fehlerfrei, 11 Briefe beim zweiten Schreiben, 6 beim dritten Schreiben. Bei 4 Briefen werden mehr als drei Versuche benötigt.

Zu prüfen ist die Hypothese mit der Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 5\%$, dass die Sekretärin einen Brief mit der Wahrscheinlichkeit $p = 0.8$ fehlerfrei schreibt.

2 Lösungen

Kapitel 1

Definition, Graphische Darstellung

1.1 **a)** $D_f = \{(x,y)|\ -\infty < x < \infty,\ -\infty < y < \infty\}$
b) $D_f = \{(x,y)|\ 0 \le x < \infty,\ y \in \mathbb{R}\backslash\{0\}\}$
c) $D_f = \{(x,y)|\ -\infty < x < \infty,\ 0 < y \le 1\}$

1.2 **a)** $D_f = \{(x,y)|\ -\infty < x < \infty,\ -\infty < y < \infty\}$ $W_f = \{z|-\infty < z < \infty\}$ Ebene
b) $D_f = \{(x,y)|\ -\infty < x < \infty,\ -\infty < y < \infty\}$ $W_f = \{z|z \ge 0\}$ Kreisparaboloid
c) $D_f = \{(x,y)|\ -\infty < x < \infty,\ -\infty < y < \infty\}$ $W_f = \{z|z = c\}$ Ebene im Abstand c zur (x,y)-Ebene
d) $D_f = \{(x,y)|\ -\infty < x < \infty,\ -\infty < y < \infty\}$ $W_f = \{z|z \ge 0\}$ oberer Kreiskegel
e) $D_f = \{(x,y)|\ -1 \le x \le 1,\ -\infty < y < \infty\}$ $W_f = \{z|0 \le z \le 1\}$ oberer Halbkreiszylinder
f) $D_f = \{(x,y)|x^2 + y^2 \le 1 \text{ Kreisfläche}\}$ $W_f = \{z|0 \le z \le 1\}$ obere Halbkugel

1.3 **a)** Hyperbeln $y = \dfrac{const}{x}$ **b)** Hyperbeln $\dfrac{x^2 - y^2}{const} = 1$

Partielle Ableitungen

1.4 **1.1 a)** $\dfrac{\partial f}{\partial x} = -2x + 10$ $\quad \dfrac{\partial f}{\partial y} = -2y + 10$ $\quad$ **1.1 b)** $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} + \dfrac{1}{y}$ $\quad \dfrac{\partial f}{\partial y} = -\dfrac{x}{y^2}$

1.1 c) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \mathrm{e}^{\sqrt{1-y}}$ $\quad \dfrac{\partial f}{\partial y} = -\dfrac{x\mathrm{e}^{\sqrt{1-y}}}{2\sqrt{1-y}} + \dfrac{1}{y}$ $\quad$ **1.2 a)** $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 1$ $\quad \dfrac{\partial z}{\partial y} = -1$

1.2 b) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x$ $\quad \dfrac{\partial z}{\partial y} = 2y$ $\quad$ **1.2 c)** $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 0$ $\quad \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$

1.2 d) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ $\quad \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ $\quad$ **1.2 e)** $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$ $\quad \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$

1.2 f) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$ $\quad \dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$

1.5 **a)** $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 15x^2 + 6x + 7y^5$ $\quad \dfrac{\partial f}{\partial y} = 35xy^4 - 6y^5$

b) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = yz + \dfrac{z - y}{x^2}$ $\quad \dfrac{\partial f}{\partial y} = xz + \dfrac{1}{x}$ $\quad \dfrac{\partial f}{\partial z} = xy - \dfrac{1}{x}$

c) $\dfrac{\partial g}{\partial u} = \dfrac{x(v^2 + w^2 - u^2)}{(u^2 + v^2 + w^2)^2}$ $\quad \dfrac{\partial g}{\partial v} = -2\dfrac{uxv}{(u^2 + v^2 + w^2)^2}$ $\quad \dfrac{\partial g}{\partial w} = -2\dfrac{uxw}{(u^2 + v^2 + w^2)^2}$

d) $\dfrac{\partial T}{\partial f} = 0$ $\quad \dfrac{\partial T}{\partial g} = -\dfrac{g}{\sqrt{g^2 + h^2}^3}$ $\quad \dfrac{\partial T}{\partial h} = -\dfrac{h}{\sqrt{g^2 + h^2}^3}$

Gradient, Totales Differenzial

1.6 **a)** $\operatorname{grad} f(3,2) = (-4,-2)^\top$ **b)** $\operatorname{grad} f(1,2) = (2,1)^\top$ **c)** $\operatorname{grad} f(4,2) = (0.75,-1)^\top$

1.7 **a)** $df = \left(\frac{1}{y} - \frac{y}{x^2}\right) dx + \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{y^2}\right) dy$ **b)** $dg = \frac{v\,du - u\,dv}{u^2+v^2}$

c) $dw = 2\mathrm{e}^{(x^2+y^2+z^2)}(x\,dx + y\,dy + z\,dz)$ **d)** $dz = \frac{u\,du + v\,dv + w\,dw}{u^2+v^2+w^2}$

1.8 **1.7 a)**
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2\frac{y}{x^3} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2\frac{x}{y^3} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2}$$

1.7 b)
$$\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} = -\frac{2uv}{(u^2+v^2)^2} \qquad \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} = \frac{2uv}{(u^2+v^2)^2} \qquad \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} = \frac{u^2-v^2}{(u^2+v^2)^2}$$

1.7 c)
$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 2\mathrm{e}^{x^2+y^2+z^2}(2x^2+1) \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 2\mathrm{e}^{x^2+y^2+z^2}(2y^2+1) \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 2\mathrm{e}^{x^2+y^2+z^2}(2z^2+1)$$
$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 4xy\mathrm{e}^{x^2+y^2+z^2} \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} = 4xz\mathrm{e}^{x^2+y^2+z^2} \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} = 4yz\mathrm{e}^{x^2+y^2+z^2}$$

1.7 d)
$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} = \frac{-u^2+v^2+w^2}{(u^2+v^2+w^2)^2} \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = \frac{u^2-v^2+w^2}{(u^2+v^2+w^2)^2} \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial w^2} = \frac{u^2+v^2-w^2}{(u^2+v^2+w^2)^2}$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = -\frac{2uv}{(u^2+v^2+w^2)^2} \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial w} = -\frac{2uw}{(u^2+v^2+w^2)^2} \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial v \partial w} = -\frac{2vw}{(u^2+v^2+w^2)^2}$$

1.9 $\Delta z = -0.62, \qquad dz = -0.6$

Fehlerrechnung

1.10 $\rho = 0.9\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$ $|\Delta\rho| \approx 0.005867\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$ $\left|\frac{\Delta\rho}{\rho}\right| \approx 0.006519 = 0.6519\%$

1.11 Um $\frac{7}{6}$ %.

1.12 $c = a\cos\beta + \sqrt{b^2 - a^2\sin^2\beta} \approx 352.361604$

$$\Delta c \leq \left|\cos\beta + \frac{-a\sin^2\beta}{\sqrt{b^2-a^2\sin^2\beta}}\right| |\Delta a| + \left|\frac{b}{\sqrt{b^2-a^2\sin^2\beta}}\right| |\Delta b| + \left|-a\sin\beta - \frac{a^2\cos\beta\sin\beta}{\sqrt{b^2-a^2\sin^2\beta}}\right| |\Delta\beta|$$
$$\approx 0.306514$$
$$\left|\frac{\Delta a}{a}\right| \approx 0.000137 \qquad \left|\frac{\Delta b}{b}\right| \approx 0.000124 \qquad \left|\frac{\Delta \beta}{\beta}\right| \approx 0.000244 \qquad \left|\frac{\Delta c}{c}\right| \approx 0.00087$$

1.13 3 %

1.14 Der maximale absolute Fehler beträgt etwa 189 $\mathrm{N/mm}^2$, der maximale relative etwa 8.3 %.

1.15 Der maximale absolute Fehler beträgt etwa 0.11 h, der maximale relative etwa 1.1 %.

1.16 Der maximale relative Fehler beträgt etwa 0.0849 %. $l \in (116.1283, 116.3257)$

1.17 Der maximale absolute Fehler beträgt etwa 0.429 m^3, der maximale relative etwa 3.35 %.

1.18 $E \in (181\,796.88,\ 224\,453.13)\ \mathrm{N/mm}^2$

1.19 Der maximale absolute Fehler beträgt etwa 0.16 cm, der maximale relative etwa 1.078 %.

Extremwertaufgaben

1.20 **a)** $f(-2,-5) = 19$ lokales Maximum
b) $f(2,3) = -59$ lokales Minimum
c) $f\,(1/4,\ 1/9) = 131/72 \approx 1.81944$ lokales Minimum

1.21 **a)** Sattelpunkt an der Stelle $(-3/4,\ 1/6)^\top$
b) Sattelpunkte an den Stellen $(0,2)^\top$ und $(2,-2)^\top$
$f(0,-2) = 16$ lokales Maximum, $f(2,2) = -17\frac{1}{3}$ lokales Minimum
c) Sattelpunkte an den Stellen $(1,1)^\top$ und $(-1,-1)^\top$

1.22 **a)** Die Faktoren lauten $x = y = z = 2$.
b) Die Summanden lauten $x = y = z = 8/3$.

1.23 Als Abmessungen sind zu wählen: Länge $\sqrt[3]{2V}$, Breite $\sqrt[3]{2V}$, Höhe $\sqrt[3]{2V}/2$. V ist hierbei das gegebene Fassungsvermögen.

1.24 Der größte dem gegebenen Ellipsoiden einbeschriebene Quader hat die Abmessungen $2\sqrt{3}a/3$, $2\sqrt{3}b/3$, $2\sqrt{3}c/3$.

1.25 Der kürzeste Abstand beträgt $d = 41/(4\sqrt{21}) \approx 2.2367$.

1.26 Für den Punkt mit den Koordinaten $\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i,\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i\right)$ ist die Summe der Quadrate der Abstände der gegebenen Punkte minimal.

1.27 Der tiefste Punkt der Schnittkurve hat die Koordinaten $(-2,1,8)$, der höchste Punkt der Schnittkurve hat die Koordinaten $(6,-3,72)$.

1.28 kälteste Punkte: $\left(1/2, -\sqrt{2}/2, -1/2\right)$, $\left(1/2, -\sqrt{2}/2, 1/2\right)$,
wärmste Punkte: $\left(1/2, \sqrt{2}/2, -1/2\right)$, $\left(1/2, \sqrt{2}/2, 1/2\right)$

1.29 Der minimale Abstand ist 1.44 .

1.30 $P\left(\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} x_i,\ \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} y_i\right)$

Kapitel 2

Gewöhnliche Differenzialgleichungen

2.1 **a)** $y(x) = \pm\sqrt{C - x^2}$ **b)** $y(x) = \dfrac{C}{\cos x}$ **c)** $y(x) = Ce^{x^2/2}$
d) $y(x) = 1 - \dfrac{C}{1+x}$ **e)** $\pm\arcsin(y(x)) = x + C$ **f)** $y(x) = \pm\sqrt{1 - \dfrac{C}{x^2}}$
g) $\frac{1}{3}y(x)^3 + \frac{1}{2}y(x)^2 = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + C$

2.2 **a)** $y(x) = \dfrac{2(x^3+5)}{3(x^2+1)}$ **b)** $y(x) = \dfrac{x}{2} + \dfrac{C}{x}$ **c)** $y(x) = 2 + Ce^{\frac{x^2}{2}}$
d) $y(x) = \frac{1}{7}x^5 + \frac{1}{3}x + \dfrac{C}{x^2}$ **e)** $y(x) = x\sin x + Cx$ **f)** $y(x) = -\frac{1}{3}x^2 + \dfrac{C}{x}$
g) $y(x) = 1 + C(x-1)$, (x_0, y_0) : keine Lösung , (x_1, y_1) : $y(x) = x$

2.3 **a)** $y(x) = C_1e^x + C_2e^{-x}$ **b)** $y(x) = C_1\cos x + C_2\sin x$
c) $y(x) = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x}$ **d)** $y(x) = C_1e^x + C_2e^{2x} + C_3xe^{2x}$
e) $s = e^{-t}(C_1\cos t + C_2\sin t)$ **f)** $y(x) = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x} + C_3\cos 2x + C_4\sin 2x$

2.4 **a)** $y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x^2 - 2$

b) $y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - \dfrac{1}{2} \cos x$

c) $y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^x + \dfrac{1}{2} e^{3x}$

d) $y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^x - \dfrac{1}{20} \cos 2x - \dfrac{3}{20} \sin 2x$

e) $y(x) = C_1 e^x + C_2 \sin x + C_3 \cos x + \dfrac{1}{15} \cos 2x - \dfrac{2}{15} \sin 2x$

f) $y(x) = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + + \dfrac{1}{4} x \sin 2x, \ (x_0, y_0, y_0') : y(x) = \dfrac{1}{4} x \sin 2x$

g) $y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - \dfrac{1}{4} e^{-x} - \dfrac{1}{2} x e^{-x}$

h) $y(x) = (C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 x^3) e^x + e^x \left(\dfrac{1}{24} x^4 + \dfrac{1}{120} x^5 \right)$

Physikalische Anwendungen Homogene Differenzialgleichungen

2.5 Für $a = \dfrac{n\pi}{l}, n \in \mathbb{N}$ tritt eine Durchbiegung ein, sonst nicht.

2.6 $\varphi(t) = \varphi_0 \cos \left(\sqrt{\dfrac{k}{I}} t \right)$, $T = \dfrac{1}{r^2} \sqrt{\dfrac{8lI\pi}{G}}$

2.7 $F = \dfrac{EI\pi^2}{l^2}$

2.8 $w(x) = -\dfrac{M}{2EI} x^2$

2.9 $w(x) = \dfrac{x^2 F}{6EI}(x - 3l)$

Physikalische Anwendungen Inhomogene Differenzialgleichungen

2.10 $s(t) = h - \dfrac{mg}{k} t + \dfrac{m^2 g}{k^2} \left(1 - e^{-kt/m} \right)$,

$h = 20$ m, $m = 1$ kg, $g = 10$ m/s^2, $k = 10$ kg/s : $s(t) = 20 - t + \dfrac{1}{10} \left(1 - e^{-10t} \right)$

2.11 Der Körper kommt nach der Zeit $\dfrac{v_0}{k}$ zur Ruhe und hat bis dahin die Strecke $\dfrac{v_0^2}{2k}$ zurückgelegt.

2.12 Die Periode der Schwingung beträgt ohne Reibung $T = 2\pi \sqrt{\dfrac{l}{g}}$.

2.13 $x(t) = \left(x_0 + \dfrac{1}{3} k_0 \right) \cos t - \dfrac{1}{3} k_0 \cos 2t$

2.14 $w(x) = k \left(\dfrac{1}{360} x^6 - \dfrac{l}{60} x^5 \right) + \left(-\dfrac{M}{12EI\,l} + \dfrac{1}{9} k l^3 \right) x^3 + \left(-\dfrac{4}{15} k l^5 + \dfrac{M}{3EI} l \right) x$ mit $k = -\dfrac{q_0}{EI\,l^2}$

2.15 $M(x) = q_0 \left(\dfrac{x^4}{12 l^2} - \dfrac{x^3}{3l} + \dfrac{lx}{4} \right)$, $Q(x) = q_0 \left(\dfrac{x^3}{3l^2} - \dfrac{x^2}{l} + \dfrac{l}{4} \right)$

Kapitel 3

Zinsen

3.1 Mit den angegebenen Formeln ergeben sich die Beträge

a) $K_3 = K_0(1+it) = 100\,000(1+3\cdot 5/100) = 115\,000$ [€] ($t=3$ [a])

b) $K_3 = K_0(1+i)^n = 100\,000(1+5/100)^3 = 115\,762.50$ [€] ($n=3$)

c) $K_3 = K_0(1+i/m)^{mn} = 100\,000(1+5/(12\cdot 100))^{12\cdot 3} \approx 116\,147.22$ [€] ($m=12$, $n=3$)

d) $K_3 = K_0(1+i/m)^{mn} = 100\,000(1+5/(365\cdot 100))^{365\cdot 3} \approx 116\,182.23$ [€] ($m=365$, $n=3$)

e) $K_3 = K_0 e^{it} = 100\,000 e^{3\cdot 5/100} \approx 116\,183.42$ [€] ($t=3$ [a])

3.2 **a)** Mit dem Zinssatz $i=4\%$ p. a., der Laufzeit $t=5$ Jahre und dem Endwert $K_t = 10\,000$ € bei linearer Verzinsung von regelmäßigen nachschüssigen Zahlungen ergibt sich

$r = K_t/\,(n+0.5\,(n-1)\,it) = 10\,000/\,(5+2\cdot 0.04\cdot 5) \approx 1\,851.85$ [€].

b) Mit dem Zinssatz $i=4\%$ p. a, der Laufzeit $t=5$ Jahre und dem Endwert $E_n^{\text{nach}} = 10\,000$ € bei nachschüssiger konstanter Rentenzahlung ergibt sich

$$r = \frac{(q-1)E_n^{\text{nach}}}{q^n-1} = \frac{10\,000\cdot 0.04}{1.04^5-1} \approx 1\,846.27 \text{ [€]}.$$

3.3 Angenommen, der Bauherr bezahlt die gesamte Geldsumme von 24 000 € nach m Monaten. Dann betragen die Zinsen, die der Gläubiger nach acht Monaten erhält, bei einem jährlichen Zinssatz i

$24\,000(8-m)(i/12)$ [€].

Leistet der Bauherr die Zahlungen wie angegeben, so betragen die Zinsen, die der Gläubiger nach acht Monaten erhält,

$6\,000\cdot 8(i/12) + 6\,000\cdot 5(i/12) + 6\,000\cdot 3(i/12)$ [€].

Aus der Gleichheit der Zinsen bei beiden Zahlungsweisen ergibt sich

$4(8-m) = 8+5+3$,

d. h. $m=4$. Die gesamte Geldsumme muss vom Bauherrn nach vier Monaten gezahlt werden.

3.4 Mit dem Zinssatz $i=4.5\%$, dem Anfangskapital 163 500 € und der Laufzeit $t=8$ Monate, d. h. $t=2/3$ Jahr, ergibt sich der Endwert bei linearer Verzinsung

$K_t = K_0(1+it) = 163\,500(1+4.5\%\cdot 2/3) = 168\,405,00$ [€].

3.5 Der Preis für die Mauerziegel wird mit K bezeichnet. Der Barwert bei sofortiger Zahlung beträgt $B_s = K$. Der Barwert B_3 bei der Zahlung in drei Raten (Zinssatz i) mit einem Aufschlag von $a=4\%$ beträgt

$$B_3 = \frac{K}{3}(1+a)\left(1+\frac{1}{1+i/4}+\frac{1}{1+i/2}\right).$$

Dabei ist $1+i/4$ der Zinsfaktor bezüglich drei Monate (1/4 Jahr) und $1+i/2$ der Zinsfaktor bezüglich sechs Monate (1/2 Jahr).

a) Mit $a=4\%$ und $i=2.5\%$ ergibt sich

$B_3 \approx 1.0336K$.

Der Barwert B_3 bei der Zahlung in Raten ist größer als bei sofortiger Zahlung, und damit lohnt sich die sofortige Zahlung.

b) Der Grenzfall tritt ein für $B_s = B_3$. Umstellen dieser Gleichung nach dem Aufschlag a ergibt

$$a = 3\Big/\left(1+\frac{1}{1+i/4}+\frac{1}{1+i/2}\right)-1 \approx 0.006.$$

Bei einem Aufschlag von höchstens 0.6% lohnt sich die Zahlung in Raten.

c) Der Grenzfall tritt ein für $B_s = B_3$. Das ist eine quadratische Gleichung bezüglich i:

$$\begin{aligned}
\frac{3}{1+a} &= 1+\frac{1}{1+i/4}+\frac{1}{1+i/2} && \text{bzw. mit} \quad f=\frac{3}{1+a}-1\\
f\left(1+\frac{i}{4}\right)\left(1+\frac{i}{2}\right) &= 1+\frac{i}{4}+1+\frac{i}{2} && \text{und Ausmultiplizieren}\\
\frac{f}{8}i^2+\frac{3}{4}(f-1)i+f-2 &= 0
\end{aligned}$$

mit den Lösungen $i\approx 0.164$ und $i\approx -2.981$. $i\approx -2.981$ kommt als Zinssatz nicht in Frage. Bei einem Zinssatz von mindestens 16.4% lohnt sich die Zahlung in Raten.

3.6 Da die Angebote Zahlungen zu unterschiedlichen Zeitpunkten vorsehen, ist zu ihrer Bewertung der Vergleich der Barwerte zu einem festen Zeitpunkt t durchzuführen, z. B. zum Zeitpunkt $t = 0$. Die Barwerte bei einem Zinssatz i p. a. sind

für das erste Angebot $\quad B_{01} = 50\,000\,\dfrac{1}{1+i/4}$,

für das zweite Angebot $\quad B_{02} = 51\,000\,\dfrac{1}{1+i/2}$,

für das dritte Angebot $\quad B_{03} = 16\,500\left(\dfrac{1}{1+i/12} + \dfrac{1}{1+i/6} + \dfrac{1}{1+i/4}\right)$.

a) Bei einem Zinssatz von 3% ergibt sich für das erste Angebot der Barwert von $B_{01} = 49\,627.79$ €, für das zweite Angebot der Barwert von $B_{02} = 50\,246.30$ € und für das dritte Angebot der Barwert von $B_{03} = 49\,253.93$ €. Das für Herrn B. Trieblos beste Angebot ist daher das zweite.

b) Das erste und das zweite Angebot sind gleichwertig, wenn ihre Barwerte übereinstimmen. Aus der Gleichheit $B_{01} = B_{02}$ ergibt sich

$$\begin{aligned} 50\,000\,\frac{1}{1+i/4} &= 51\,000\,\frac{1}{1+i/2}, \\ 50\,000\,(1+i/2) &= 51\,000\,(1+i/4)\,, \\ i &= \frac{51\,000 - 50\,000}{50\,000/2 - 51\,000/4} = \frac{1\,000}{25\,000 - 12\,750} \approx 0.0816 = 8.16\%. \end{aligned}$$

Bei dem Zinssatz von 8.16% p. a. ist das erste und das zweite Angebot gleichwertig.

c) Das dritte Angebot ist für Herrn B. Trieblos besser als das erste, wenn $B_{03} > B_{01}$ gilt. Daraus ergibt sich bezüglich des Zinssatzes i die Ungleichung

$$\begin{aligned} 16\,500\left(\frac{1}{1+i/12} + \frac{1}{1+i/6} + \frac{1}{1+i/4}\right) &> 50\,000\,\frac{1}{1+i/4}, \\ 16\,500\left(\frac{1}{1+i/12} + \frac{1}{1+i/6}\right) &> 33\,500\,\frac{1}{1+i/4}, \\ 165\,((1+i/6)\,(1+i/4) + (1+i/12)\,(1+i/4)) &> 335\,(1+i/12)\,(1+i/6)\,, \\ 815i^2 + 5760i - 720 &> 0. \end{aligned}$$

Die entsprechende quadratische Gleichung hat die Lösungen $i_1 \approx -7.19035$ und $i_2 \approx 0.122864$, von denen die erste als Zinssatz nicht in Frage kommt. Für $i > i_2 \approx 12.3\%$ gilt $B_{03} > B_{01}$, d. h. das dritte Angebot ist für Herrn B. Trieblos besser als das erste.

3.7 **a)** Die Varianten der Zahlung sind zum gleichen Zeitpunkt zu vergleichen. Vergleicht man die Barwerte (Beginn des Praktikums), so ergibt sich

$B_1 = 3\,040$ €	als Barwert des ersten Angebotes,
$B_2 = 1\,020(1{+}1/(1{+}i/12){+}1/(1{+}2i/12)) \approx 3\,054.91$ €	als Barwert des zweiten Angebotes,
$B_3 = 3\,060/(1+3i/12) \approx 3\,044.78$ €	als Barwert des dritten Angebotes.

Vergleicht man die Endwerte nach Ablauf der drei Monate, so ergibt sich

$E_1 = 3\,040(1+3i/12) \approx 3\,055.20$ €	als Endwert des ersten Angebotes,
$E_2 = 1\,020(3+0.5\cdot 4i/4) \approx 3\,070.20$ €	als Endwert des zweiten Angebotes,
$E_3 = 3\,060$ €	als Endwert des dritten Angebotes.

Das zweite Angebot ist das beste.

b) Gleichwertigkeit bedeutet z. B. Gleichheit der Endwerte. Aus der Gleichheit $E_1 = E_2$ folgt

$$3040\left(1+\frac{i}{4}\right) = 1020\left(3+\frac{i}{2}\right), \qquad \text{d. h.} \qquad i = 0.08.$$

Das erste und dritte Angebot ist bei einem Zinssatz von 8% p. a. gleichwertig.

c) Aus der Gleichheit $E_2 = E_3$ folgt

$$1020\left(3+\frac{i}{2}\right) = 3060, \qquad \text{d. h.} \qquad i = 0.$$

Das zweite und dritte Angebot ist bei einem Zinssatz von 0% p. a. gleichwertig, d. h. das zweite Angebot ist bei jedem beliebigen Zinssatz größer null günstiger als das dritte.

d) Aus der Gleichheit $E_1 = E_3$ folgt

$$3040\left(1+\frac{i}{4}\right) = 3060, \qquad \text{d. h.} \qquad i = 4\left(\frac{306}{304}-1\right) \approx 0.0263.$$

Das zweite und dritte Angebot ist bei einem Zinssatz von ca. 2.63% p. a. gleichwertig.

Tilgung

3.8 Mit der Anfangsschuld $S_0 = 75\,000$ €, dem Zinssatz $i = 6\%$ p. a., der Anzahl der Rückzahlungsperioden $n = 10$ ergibt sich für

den Tilgungsbetrag $T = S_0/n = 75\,000/10 = 7\,500$ [€],

die Restschuld nach $k = 5$ Jahren

$S_0\,(1 - k/n) = 75\,000(1 - 5/10) = 37\,500$ [€].

Die insgesamt zu zahlenden Zinsen belaufen sich auf

$$\sum_{k=1}^{n} Z_k = S_0 i \sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{k-1}{n}\right) = S_0 i\left(n-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(k-1)\right) = S_0 i\frac{n+1}{2} = 75\,000\cdot 6\%\cdot 5.5 = 24\,750 \text{ [€]}.$$

3.9 Nach $n = 5$ Jahren ist der Endwert des Kredites $K_0 = 150\,000$ bei dem jährlichen Zinssatz von $i = 6.5\%$ gleich

$K_n = K_0(1+i)^n = K_0 q^n = 150\,000 \cdot 1.065^5 \approx 205\,513$ [€].

Der Endwert der Ratenzahlungen nach $n = 5$ Jahren beläuft sich analog auf

$30\,000 \cdot 1.065^4 + 40\,000 \cdot 1.065^3 + 20\,000 \cdot 1.065^2 + 25\,000 \approx 134\,596.48$ [€].

Die Differenz beider Endwerte ergibt die Restschuld. Sie beträgt ca. 70 916.52 €.

3.10 Wenn das Darlehen $S_0 = 200\,000$ € in $n = 10$ Jahren bei einem Zinssatz von $i = 5\%$ p. a., d. h. einem Zinsfaktor von $q = 1.05$, getilgt sein soll, so ist eine jährliche Annuität von

$$A = S_0\frac{q^n(q-1)}{(q^n-1)} = 200\,000\frac{1.05^{10}\cdot 0.05}{(1.05^{10}-1)} \approx 25\,900.91 \text{ [€]}$$

erforderlich. Das ist mehr, als der Unternehmer S. Schuldauf verkraften kann. Es lohnt sich daher nicht, einen Antrag auf Fördermittel der EU zu stellen.

Berechnet man die Anzahl der Rückzahlungsperioden, die zur vollständigen Tigung der Schuld $S_0 = 200\,000$ € bei einem Zinssatz von $i = 5\%$ p. a. und einer verkraftbaren Annuität von 25 000 € erforderlich wären, so ergibt sich ein Zeitraum von

$n = (\ln A - \ln(A - S_0 i))/\ln q = (\ln 25\,000 - \ln(25\,000 - 200\,000 \cdot 0.05i))/\ln 1.05 \approx 10.47$

Jahren, also lediglich 0.47 Jahre mehr, als die EU-Richtlinien vorsehen. Vielleicht überlegt es sich der Unternehmer S. Schuldauf nochmals und mobilisiert seine letzten Reserven, um in den Genuss der EU-Fördermittel zu gelangen.

Der Unternehmer S. Schuldauf kann auch berechnen, wie groß seine Restschuld S_{10} nach Ablauf von zehn Jahren wäre. Sie beträgt

$S_{10} = S_0 q^k - A(q^k - 1)/(q-1) = 200\,000 \cdot 1.05^k - 25\,000(1.05^k - 1)/0.05 \approx 11\,331.61$ [€],

müßte aber kleiner oder gleich Null sein, wenn die Schuld nach zehn Jahren getilgt sein soll.

3.11 Mit dem vierteljährlichen Zinssatz $i = 1.5\%$, dem Zinsfaktor $q = 1.015$ und der Annuität $A = 2\% S_0$ ergibt sich als Anzahl der Rückzahlungsperioden (in Vierteljahren)

$n = (\ln A - \ln(A - S_0 i))/\ln q = \ln(0.02/(0.02 - 0.015))/\ln 1.015 \approx 93.11$,

d. h. ein Zeitraum von ca. 23.28 Jahren.

3.12 **a**) Mit der Formel für die Restschuld S_{10} nach $k = 10$ Jahren bei Annuitätentilgung und der Forderung $S_k = S_0/2$ ergibt sich durch Umstellen nach A mit $S_0 = 250\,000$ €, $i = 0.048$ p. a., $q = 1.048$

$$A = S_0\frac{q-1}{q^k-1}\left(q^k - 0.5\right) = 250\,000\frac{0.048}{1.048^{10}-1}\left(1.048^{10} - 0.5\right) \approx 22\,031.22 \text{ [€]}.$$

Das sind ca. $22\,031.22/250\,000 \approx 8.81\%$ des Darlehens.

b) Mit der Formel für die Anzahl der Zahlungsperioden bei Annuitätentilgung ist

$$n = \frac{\ln A - \ln(A - S_0 i)}{\ln q} = \frac{\ln 22\,031.22 - \ln(22\,031.22 - 250\,000\cdot 0.048)}{\ln 1.048} \approx 16.78.$$

c) Mit der Formel für die Restschuld S_k nach $k = 15$ Jahren bei Annuitätentilgung ist

$$S_0 q^k - A\frac{(q^k-1)}{(q-1)} = 250\,000\cdot 1.048^{15} - 22\,031.22\frac{1.048^{15}-1}{0.048} \approx 36\,770.60 \text{ [€]}.$$

Investitionsrechnung

3.13 Die Einnahmeüberschüsse betragen $C_0 = -50\,000$, $C_1 = 25\,000$, $C_2 = 30\,000$ [€]. Die Gleichung für den gesuchten Zinsfaktor q_{int} lautet

$50\,000q^2 - 25\,000q - 30\,000 = 0.$

Diese quadratische Gleichung hat die Lösungen $q_1 \approx 1.0639$ und $q_1 \approx -.56394$. Der Zinsfaktor beträgt demnach $q_{\text{int}} \approx 1.0639$ und der interne Zinsfuß $p \approx 6.39\%$.

3.14 Der Barwert der Investition beläuft sich mit der einmaligen Ausgabe $C_0 = -40\,000$ und der wiederkehrenden Einnahme $G = C_1 = \ldots = C_{10} = 6\,500$ [€] in $n = 10$ Jahren bei einem Kalkulationszinssatz von $i = 7.5\%$ p. a., d. h. einem Zinsfaktor $q = 1.075$, auf

$$C = \sum_{k=0}^{n} \frac{C_k}{q^k} = -40\,000 + 6\,500 \frac{1.075^{10} - 1}{1.075^{10} \cdot 0.075} \approx 4\,616.53 \text{ [€]}.$$

Er ist größer als Null, und damit lohnt sich die Investition.

Der Endwert der Investition beträgt mit dem Kalkulationszinssatz $i = 7.5\%$ p. a.

$Cq^{10} \approx 4\,616.53 \cdot 1.075^{10} \approx 9\,514.81$ [€].

Die Rendite der Investion (interner Zinsfuß) i_{int} ist der Zinssatz, für den der Barwert der Investition gleich Null ist. Aus den Formeln zur Berechnung des Barwertes aller Einnahmeüberschüsse und des Barwert wiederkehrender Einnahmen erhält man bezüglich des entsprechenden Zinsfaktors die Gleichung

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{k=0}^{n} \frac{C_k}{q^k} = -40\,000 + 6\,500 \frac{q^{10} - 1}{q^{10}(q-1)}, && \text{d. h.} \\ 0 &= cq^{11} - q^{10}(1+c) + 1 && \text{mit } c = -40\,000/6\,500 \end{aligned}$$

mit der (numerisch berechneten) Lösung $q_{\text{int}} \approx 1.09965$. Die Rendite der Investition beträgt ca. 9.96% p. a. Sie ist höher als der Kalkulationszinssatz, und damit lohnt sich die Investition.

3.15 Wenn die alte Anlage einen Stundenkostensatz von 8 € und die neue Anlage einen Stundenkostensatz von 5.50 € hat, so beträgt der Gewinn pro Stunde 2.50 €. Das sind bei einer Nutzung von 2 400 Stunden pro Jahr 6 000 €.

Der Barwert der Investition beläuft sich mit der einmaligen Ausgabe $C_0 = -24\,000$ und der wiederkehrenden Einnahme $G = C_1 = \ldots = C_5 = 6\,000$ [€] in $n = 5$ Jahren bei einem Kalkulationszinssatz von $i = 10\%$ p. a., d. h. einem Zinsfaktor $q = 1.1$, nach den Formeln für die Berechnung des Barwert aller Einnahmeüberschüsse und des Barwertes wiederkehrender Einnahmen auf

$$C = \sum_{k=0}^{n} \frac{C_k}{q^k} = -24\,000 + 6\,000 \frac{1.1^5 - 1}{1.1^5 \cdot 0.1} \approx -1255.28 \text{ [€]}.$$

Er ist negativ, und damit amortisiert sich die Anlage innerhalb von fünf Jahren nicht.

3.16 Der Barwert der Investition beläuft sich in $n = 4$ Jahren bei einem Kalkulationszinssatz von $i = 10\%$ p. a., d. h. einem Zinsfaktor $q = 1.1$, mit der einmaligen Ausgabe $C_0 = -100\,000$ € und

a) den Einnahmen $C_1 = 60\,000$, $C_2 = 40\,000$, $C_3 = 0$, $C_4 = 0$ [€] auf

$$C = \sum_{k=0}^{n} \frac{C_k}{q^k} = -100\,000 + \frac{60\,000}{1.1} + \frac{40\,000}{1.1^2} \approx -12396.70 \text{ [€]},$$

b) den Einnahmen $C_1 = 60\,000$, $C_2 = 40\,000$, $C_3 = 10\,000$, $C_4 = 0$ [€] auf

$$C = \sum_{k=0}^{n} \frac{C_k}{q^k} = -100\,000 + \frac{60\,000}{1.1} + \frac{40\,000}{1.1^2} + \frac{10\,000}{1.1^3} \approx -4883.55 \text{ [€]},$$

c) den Einnahmen $C_1 = 60\,000$, $C_2 = 40\,000$, $C_3 = 10\,000$, $C_4 = 15\,000$ [€] auf

$$C = \sum_{k=0}^{n} \frac{C_k}{q^k} = -100\,000 + \frac{60\,000}{1.1} + \frac{40\,000}{1.1^2} + + \frac{10\,000}{1.1^3} + \frac{15\,000}{1.1^4} \approx 5361.66 \text{ [€]}.$$

3.17 Die gesuchte Anzahl der Jahre wird mit n bezeichnet, die Investition mit $a = 3\,000\,000$ €, die konstante jährliche Einnahme mit $b = 350\,000$ €. Die Rendite $i = 0.1$ p. a. (interner Zinssatz) der Investition ergibt sich aus der Bedingung, dass der Barwert der Zahlungen gleich Null ist:

$$0 = -a + \sum_{k=1}^{n} \frac{b}{q^k} = -a + b\frac{q^n - 1}{i\,q^n}.$$

Hierbei ist $q = 1 + i$ der der Rendite i entsprechende Zinsfaktor. Umstellen dieser Gleichung nach der Anzahl der Zahlungsperioden n ergibt

$$n = \log_q \frac{b}{b - a\,i} = \frac{\ln b - \ln(b - a\,i)}{\ln q}.$$

Mit den gegebenen Zahlen erhält man $n \approx 20.417$ Jahre.

Der Endwert der Zahlungen nach Ablauf dieser Zeit ist mit dem Zinsfaktor $q = 1.05$

$$K_n = -aq^n + \sum_{k=1}^{n-1} bq^k = -aq^n + b\frac{q^n - 1}{q - 1} \approx 3\,831\,123.52 \text{ [€]}. \tag{2.1}$$

Abschreibungen

3.18 Mit $A = 81\,000$ €, $n = 8$ und $R_8 = 3\,000$ € ergibt sich mit der Formel für die jährliche konstante Abschreibung

$w = (A - R_n)/n = (81\,000 - 3\,000)/8 = 9750$ [€].

In **Tabelle 2.1** sind pro Jahr der Buchwert am Jahresanfang, die Abschreibung und der Buchwert am Jahresende angegeben.

Tabelle 2.1 Lineare Abschreibung

k	R_{k-1} [€]	w_k [€]	R_k [€]
1	81 000	9 750	71 250
2	71 250	9 750	61 500
3	61 500	9 750	51 750
4	51 750	9 750	42 000
5	42 000	9 750	32 250
6	32 250	9 750	22 500
7	22 500	9 750	12 750
8	12 750	9 750	3 000

3.19 Mit $A = 275\,000$ €, $n = 8$ und $R_8 = 5\,000$ € ergibt sich mit der Formel für die konstante jährliche Abschreibung

$w = (A - R_n)/n = (275\,000 - 5\,000)/8 = 33\,750$ [€].

Der Buchwert R_6 nach $k = 6$ Jahren beträgt

$R_k = A - kw = 275\,000 - 6 \cdot 33\,750 = 72\,500$ [€].

3.20 Gesucht ist der Anschaffungswert A. Gegeben sind $w_1 = 6\,000$ €, $d = 500$ €, $n = 12$ und $R_{12} = 1\,200$ €. Aus der Formel für den Minderungsbetrag d bei arithmetisch-degrssiver Abschreibung ergibt sich durch Umstellen nach A und Einsetzen der gegebenen Werte der Anschaffungswert

$A = R_n + nw_1 - 0.5n(n-1)d = 1200 + 12 \cdot 6\,000 - 0.5 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 500 = 40\,200$ [€].

3.21 Mit $A = 20\,000$ €, $n = 4$, $R_4 = 1\,200$ € und $w_1 = 8\,000$ € ergibt sich mit der Formel für den Minderungsbetrag der Abschreibung bei arithmetisch-degressiver Abschreibung

$$d = 2\frac{nw_1 - (A - R_n)}{n(n-1)} = d = 2\frac{4 \cdot 8\,000 - (20\,000 - 1\,200)}{4 \cdot 3} = 2\,200 \text{ [€]}.$$

In **Tabelle 2.2** sind pro Jahr der Buchwert am Jahresanfang, die Abschreibung und der Buchwert am Jahresende angegeben.

Tabelle 2.2 Arithmetisch-degressive Abschreibung

k	R_{k-1} [€]	w_k [€]	R_k [€]
1	20 000	8 000	12 000
2	12 000	5 800	6 200
3	6 200	3 600	2 600
4	2 600	1 400	1 200

3.22 **a)** Mit $A = 20\,000$ €, $n = 4$ und $R_4 = 1\,200$ € ergibt sich mit der Formel für den Minderungsbetrag der Abschreibung bei digitaler Abschreibung

$$d = 2\frac{A - R_n}{n(n+1)} = 2\frac{20\,000 - 1\,200}{4 \cdot 5} = 1\,880 \text{ [€]}.$$

Die Abschreibung im ersten Jahr beträgt damit

$$w_1 = nd = 4 \cdot 1\,880 = 7\,520 \text{ [€]}.$$

b) Der Abschreibungszinssatz bei geometrisch-degrssiver Abschreibung ergibt sich mit den gegebenen Werten zu

$$s = 100\left(1 - \sqrt[n]{R_n/A}\right) = 100\left(1 - \sqrt[4]{1\,200/20\,000}\right) \approx 50.51 \text{ \%}.$$

In den **Tabellen 2.3, 2.4** sind pro Jahr der Buchwert am Jahresanfang, die Abschreibung und der Buchwert am Jahresende für die digitale bzw. geometrisch degressive Abschreibung angegeben.

Tabelle 2.3 Digitale Abschreibung

k	R_{k-1} [€]	w_k [€]	R_k [€]
1	20 000	7 520	12 480
2	12 480	5 640	6 840
3	6 840	3 760	3 080
4	3 080	1 880	1 200

Tabelle 2.4 Geometrisch-degressive Abschreibung

k	R_{k-1} [€]	w_k [€]	R_k [€]
1	20 000	10 101.54	9 898.46
2	9 898.46	4 999.48	4 898.98
3	4 898.98	2 474.36	2 424.62
4	2 424.62	1 224.62	1 200

3.23 Der Abschreibungszinssatz bei geometrisch-degrssiver Abschreibung ergibt sich mit den gegebenen Werten $A = 120\,000$ €, $n = 10$ und $R_{10} = 9\,000$ € zu

$$s = 100\left(1 - \sqrt[n]{R_n/A}\right) = 100\left(1 - \sqrt[10]{9\,000/120\,000}\right) \approx 22.82 \text{ \%}.$$

Der Buchwert nach dem $k = 5$-ten Jahr ist

$$R_k = A\left(1 - \frac{s}{100}\right)^k = 120\,000\left(1 - \frac{22.82}{100}\right)^5 = 32\,863.35 \text{ [€]}.$$

In **Tabelle 2.5** sind pro Jahr der Buchwert am Jahresanfang, die Abschreibung und der Buchwert am Jahresende angegeben.

Tabelle 2.5 Geometrisch-degressive Abschreibung

k	R_{k-1} [€]	w_k [€]	R_k [€]
1	120 000	27 383.71	92 616.29
2	92 616.29	21 134.81	71 481.47
3	71 481.47	16 311.90	55 169.57
4	55 169.57	12 589.56	42 580.00
5	42 580.00	9 716.65	32 863.35
6	32 863.35	7 499.33	25 364.02
7	25 364.02	5 788.00	19 576.01
8	19 576.01	4 467.20	15 108.81
9	15 108.81	3 447.79	11 661.01
10	11 661.01	2 661.01	9 000.00

Effektivzinsberechnung

3.24 Mit dem Jahreszinssatz i und täglicher Verzinsung mit dem Zinsfaktor $q = 1 + i/365$ ist der Barwert der nach acht Tagen fälligen Summe von $0.98 \cdot 6\,500$ € gleich $0.98 \cdot 6\,500/q^8$, und der Barwert der nach 14 Tagen fälligen Summe von $6\,500$ € ist gleich $6\,500/q^{14}$. Für den Zinsfaktor q folgt nach dem Äquivalenzprinzip der Gleichheit der Barwerte die Gleichung

$$0.98 \cdot 6\,500/q^8 = 6\,500/q^{14} \text{ bzw. } q = \sqrt[6]{1/0.98} \approx 1.00337.$$

Es ergibt sich ein Effektivzinssatz von $i = 365(q-1) \approx 123\%$. Die Zahlung mit Skonto sollte unbedingt bevorzugt werden!
Bemerkung: Bei linearer Verzinsung während eines Jahres gilt für den Effektivzinssatz i, bezogen auf den Zeitpunkt der Rechnungsstellung

$$\frac{0.98 \cdot 6\,500}{1 + 8i/365} = \frac{6\,500}{1 + 14i/365}, \quad \text{d. h.} \quad i = 0.02 \cdot 365/(0.98 \cdot 14 - 8) \approx 1.2762 = 127.62\%$$

und bezogen auf den spätmöglichsten Zahlungstermin nach acht Tagen

$$0.98 \cdot 6\,500 = \frac{6\,500}{1 + 6i/365}, \quad \text{d. h.} \quad i = 0.02 \cdot 365/(0.98 \cdot 6) \approx 1.2415 = 124.15\%.$$

3.25 Der Endwert eines Kapitals K_0 bei Verzinsung gemäß der Sparbriefe der Großbank „Wucher & Sohn“ ist mit den Zinsfaktoren $q_1 = 1.05$ und $q_2 = 1.1$ gleich $K_0 q_1^5 q_2^5$. Der Endwert desselben Kapitals mit dem durchschnittlichen Zinsfaktor q beträgt nach $n = 10$ Jahren $K_0 q^{10}$. Der Vergleich der Endwerte ergibt

$$K_0 q_1^5 q_2^5 = K_0 q^{10}, \quad \text{d. h.} \quad q = \sqrt{q_1 q_2} \approx 1.07471,$$

was einem Durchschnittszinssatz von ca. 7.47% p. a. entspricht.

3.26 Der Barwert der Rate R bei Zahlung in einer Jahresrate (vorschüssig) beträgt R. Der Barwert von zwei halbjährlichen Raten halber Höhe (ebenfalls vorschüssig), allerdings mit 5% Aufschlag, beträgt bei einem Jahreszinssatz i (unterjährige Verzinsung)

$$\frac{1.05R}{2} + \frac{1.05R}{2(1+0.5i)} = \frac{1.05R}{2}\left(1 + \frac{1}{1+0.5i}\right).$$

Der Vergleich beider Barwerte nach dem Äquivalenzprinzip der Gleichheit der Barwerte ergibt

$$\begin{aligned} R &= \frac{1.05R}{2}\left(1 + \frac{1}{1+0.5i}\right) && \text{und damit den Effektivzinssatz} \\ i &= 4 \cdot (1.05-1)/(2-1.05) && \approx 0.210526 \approx 21.05\%. \end{aligned}$$

Für Herrn W. Asserschaden ist daher die Zahlung in einer Jahresrate (vorschüssig) günstiger, wenn der Jahreszinssatz der Bank kleiner als der Effektivzinssatz ist.

3.27 Der Barwert der einmaligen Zahlung beträgt $10\,000$ €. Der Barwert der Zahlung in Raten mit dem Jahreszinssatz i und dem Zinsfaktor $q = 1 + i$ beträgt mit der jährlichen Ersatzrate $220\,(12 + 5.5(q-1))$ für $i = 3\%$ p. a.

$$2\,500 + 220\,(12 + 5.5(q-1))\left(\frac{1}{q} + \frac{1}{q^2} + \frac{1}{q^3}\right) = 2\,500 + 220\,(12 + 5.5(q-1))\,\frac{q^3-1}{q^3(q-1)} \approx 10\,070.20 \text{ €}.$$

Der Bauunternehmer P. Lattenleger kann daher beruhigt die Einmalzahlung von $10\,000$ leisten, denn der Barwert der Zahlung in Raten beim Zinssatz der Bank von 3% p. a. wäre höher als der Barwert der Einmalzahlung.
Bemerkung: Der Vergleich beider Barwerte nach dem Äquivalenzprinzip ergibt

$$10\,000 = 2\,500 + 220\,(12 + 5.5(q-1))\,\frac{q^3-1}{q^3(q-1)}$$

mit der (numerisch ermittelten) Lösung $q = 1.03637$, was einem Effektivzinssatz von ca. 3.63% entspricht. Die Bank hätte diesen Zinssatz leisten müssen, wenn die Barwerte beider Zahlungsweisen übereinstimmen sollen.

3.28 Der Endwert eines Kapitals K_0 bei Verzinsung gemäß den Bedingungen des „Zusatzsparens bis zu 4.5%“ ist mit den jählich wechselnden Zinsfaktoren $q_1 = 1.025$, $q_2 = 1.03$, $q_3 = 1.035$, $q_4 = 1.04$, $q_5 = 1.045$ gleich $K_0 q_1 q_2 q_3 q_4 q_5$. Der Endwert desselben Kapitals mit dem durchschnittlichen Zinsfaktor q beträgt nach $n = 5$ Jahren $K_0 q^5$. Der Vergleich der Endwerte ergibt

$$K_0 q_1 q_2 q_3 q_4 q_5 = K_0 q^5, \quad \text{d. h.} \quad q = \sqrt[5]{q_1 q_2 q_3 q_4 q_5} \approx 1.03498,$$

was einem Durchschnittszinssatz von ca. 3.5% p. a. entspricht.

3.29 Der Barwert des Darlehens in der Höhe D ist gleich D. Der Barwert der nachschüssigen jährlichen Annuitäten in der Höhe $D/5$ innerhalb von n Jahren beträgt bei dem Zinssatz der Bank $i = 17\%$ p. a. und dem Zinsfaktor $q = 1 + i$

$$\frac{D}{5}\left(\frac{1}{q} + \ldots + \frac{1}{q^n}\right) = \frac{D}{5}\,\frac{q^n-1}{q^n(q-1)}.$$

Aus dem Äquivalenzprinzip der Übereinstimmung dieser Barwerte wird die Anzahl n der Zahlungsperioden ermittelt und somit ein Übereinstimmen der Barwerte gewährleistet. Der Effektivzinssatz beträgt damit $i = 17\%$ (das ist der sog. Nominalzinssatz). Für die Anzahl n der Jahre der Rückzahlung ergibt sich

$q^n - 1 = 5q^n(q-1)$, d. h. $n = -\ln 1 - 5i/\ln q \approx 12.08$.

3.30 Der Barwert des Darlehens beträgt 90 000 €. Der Barwert der in die Bank eingehenden Zahlungen (jährliche nachschüssige Zinszahlung in Höhe von 100 000 · 9% und Einmalzahlung nach 20 Jahren in Höhe von 100 000) betragen mit dem Effektivzinssatz i und dem Zinsfaktor $q = 1 + i$

$$100\,000 \cdot 9\% \left(\frac{1}{q} + \ldots + \frac{1}{q^{20}}\right) + \frac{100\,000}{q^{20}} = 100\,000 \cdot 9\% \frac{q^{20}-1}{q^{20}(q-1)} + \frac{100\,000}{q^{20}}.$$

Der Vergleich beider Barwerte nach dem Äquivalenzprinzip ergibt

$$90\,000 = 100\,000 \cdot 9\% \frac{q^{20}-1}{q^{20}(q-1)} + \frac{100\,000}{q^{20}}$$

mit der (numerisch ermittelten) Lösung $q \approx 1.1019$. Der Effektivzinssatz beträgt damit ca. 10.19%. Aus Bankensicht ist das ein Habenzins, aus Schuldnersicht ein Sollzins.

Renten

3.31 Entsprechend der Formel Barwertes der vorschüssigen Rentenzahlung $r = 2\,000$ € über $n = 10$ Jahre bei dem Zinsfaktor $q = 1.025$ ergibt sich ein Betrag von

$$B_n^{\text{vor}} = r\frac{q^n - 1}{q^{n-1}(q-1)} = 2\,000\frac{1.025^{10}-1}{1.025^9(0.025)} \approx 17\,941.73 \text{ €}.$$

3.32 Die Laufzeit bei vorschüssiger Rentenzahlung $r = 5\,000$ € mit dem Endwert $E_n^{\text{vor}} = 50\,000$ € und dem Zinsfaktor $q = 1.035$ beträgt nach der Formel für die konstante vorschüssige Rentenzahlung

$$n = \frac{1}{\ln q}\ln\left(E_n^{\text{vor}}\frac{q-1}{rq} + 1\right) = \frac{1}{\ln 1.035}\ln\left(\frac{50\,000 \cdot 0.035}{1.035 \cdot 5\,000} + 1\right) \approx 8.5 \text{ Jahre.}$$

3.33 Die Jahresersatzrate der monatlichen Rente von $r = 750$ € bei dem Zinssatz i und dem Zinsfaktor $q = i + 1$ beträgt

$r(12 + 5.5(q-1))$.

Damit ergibt sich der Barwert $B_n^{\text{vor}} = 25\,000$ € der konstanten vorschüssigen Rentenzahlung in $n = 3$ Jahren aus der Gleichung

$$B_n^{\text{vor}} = 25\,000 = r(12 + 5.5(q-1))\frac{q^n - 1}{q^{n-1}(q-1)} = 750(12 + 5.5(q-1))\frac{q^3-1}{q^2(q-1)} \;\; [\text{€}]$$

mit der (numerisch ermittelten) Lösung $q = 1.07355$. Es müsste mit ca. 7.35% jährlich verzinst werden.

3.34 Aus der Formel für den Barwert der ewigen konstanten vorschüssigen Rente r erhält man mit dem gegebenen Barwert $B_\infty^{\text{vor}} = 100\,000$ € und dem Zinsfaktor $q = 1.03$ nach Umstellen den jährlichen Betrag

$r = B_\infty^{\text{vor}}(q-1)/q = 100\,000 \cdot 0.03/1.03 \approx 2912.62$ €.

3.35 **a)** Mit den gegebene Größen Endwert $E_n^{\text{vor}} = 30\,000$ €, jährlicher Zinsfaktor $q = 1.03$, Anzahl der Jahre $n = 20$ ergibt sich

$$r = \frac{(q-1)E_n^{\text{vor}}}{q(q^n - 1)} = \frac{0.03 \cdot 30\,000}{1.03 \cdot (1.03^{20} - 1)} \approx 1083.95 \text{ [€]}.$$

b) Herr Dr. Vital soll am Ende dieses Jahres insgesamt eine Auszahlung von

$E_n^{\text{vor}} + U = 30\,000 + 15\,000 = 45\,000$ €

erhalten. Die Gleichung zur Ermittlung der Rendite i_{eff} der konstanten vorschüssigen jährlichen Rentenzahlung von $r = 1083.95$ € ergibt sich aus der Gleichung

$$\begin{aligned} E_n^{\text{vor}} + U &= r q_{\text{eff}} \frac{q_{\text{eff}}^n - 1}{q_{\text{eff}} - 1} \qquad \text{bzw. umgestellt} \\ f(q_{\text{eff}}) &= r q_{\text{eff}}^{n+1} - \left(r + E_n^{\text{vor}} + U\right) q_{\text{eff}} + E_n^{\text{vor}} + U \;=\; 0. \end{aligned}$$

Mit dem Newton-Verfahren ermittelt man z. B. bei einem Startwert $q_{\text{eff}}^0 = 2$ den effektiven Zinsfaktor $q_{\text{eff}} \approx 1.065$ bzw. die Rendite $i_{\text{eff}} \approx 6.5\%$.

c) Der Barwert der vorgeschlagenen monatlich konstanten vorschüssigen Rentenzahlung in Höhe von $R = 200$ € beträgt $B_m^{\text{vor}} = 45\,000$ €. Die Anzahl der Monate ergibt sich bei dem monatlichen Zinsfaktor $q_m = 1 + i/12$ wie folgt:

$$n = \frac{1}{\ln q_m} \ln \frac{Rq_m}{Rq_m - (q_m - 1)B_n^{\text{vor}}} = \frac{1}{\ln 1.0025} \ln \frac{200 \cdot 1.0025}{200 \cdot 1.0025 - 0.0025 \cdot 45\,000} \approx 329.803,$$

Kapitel 4

Kombinatorik

4.1 **a)** Es handelt sich um die Auswahl von drei aus fünf Ziffern unter Berücksichtigung der Anordnung, wobei Wiederholung der Ziffern zugelassen ist (Variation mit Wiederholung von drei aus fünf Elementen). Die Anzahl der verschiedenen dreistellige Zahlen ist

$$V_{5,W}^{(3)} = 5^3 = 125.$$

b) Es handelt sich um die Auswahl von drei aus fünf Ziffern unter Berücksichtigung der Anordnung, wobei Wiederholung der Ziffern nicht zugelassen ist (Variation ohne Wiederholung von drei aus fünf Elementen). Die Anzahl der verschiedenen dreistellige Zahlen ist

$$V_5^{(3)} = \frac{5!}{(5-3)!} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60.$$

4.2 Wird das zur Verfügung stehende Alphabet mit 26 Buchstaben und die Anzahl der zur Verfügung stehenden Ziffern mit 10 vorausgesetzt, so bestehen für jede fixierte Möglichkeit der Auswahl der genannten Anzahl von Buchstaben aus 26 mit Wiederholung alle Möglichkeiten der Auswahl der genannten Anzahl von Ziffern aus 10 mit Wiederholung, jeweils mit Berücksichtigung der Anordnung (Variationen mit Wiederholung). Die gesuchten Anzahlen sind

a) $V_{26,W}^{(2)} \cdot V_{10,W}^{(4)} = 26^2 \cdot 10^4 = 6\,760\,000,$ **b)** $V_{26,W}^{(3)} \cdot V_{10,W}^{(3)} = 26^3 \cdot 10^3 = 17\,576\,000.$

4.3 Es handelt sich jeweils um die verschiedenen Möglichkeiten der Auswahl von k aus n Elementen ohne Wiederholung (alle gewählten Zahlen sind verschieden) ohne Berücksichtigung der Anordnung, da es beim Lotto gleichgültig ist, in welcher Reihenfolge die Zahlen gezogen werden. Mit der Formel zur Berechnung von Kombinationen ohne Wiederholung ist

a) $C_{90}^{(5)} = \binom{90}{5}$ **b)** $C_{49}^{(6)} = \binom{49}{6}$ **c)** $C_{45}^{(5)} = \binom{45}{5}$ **d)** $C_{35}^{(5)} = \binom{35}{5}$

4.4 Wird die Anzahl der zur Verfügung stehenden Farben mit n bezeichnet, so beträgt die Anzahl der unterschiedlichen Möglichkeiten, daraus zwei Farben mit Wiederholung (gleiche Farben sind zugelassen) ohne Berücksichtigung der Anordnung zu wählen, nach der Formel zur Berechnung von Kombinationen mit Wiederholung

$$C_{n,W}^{(2)} = \binom{n+2-1}{2} = \frac{(n+1)n}{2}.$$

Diese Anzahl soll mindestens 15 betragen. Ganzzahlige poitive Lösungen der Ungleichung

$$\frac{(n+1)n}{2} \geq 15$$

sind $n \in \mathbb{N},\ n \geq 5$. Die gesuchte Mindesanzahl der Farben ist $n = 5$.

4.5 **a)** Das „Sitzen an einem runden Tisch“ bedeutet, dass sich verschiedene Sitzordnungen nicht durch Drehung unterscheiden. Man stellt sich vor, dass eine Person an einen beliebigen Platz fest hinsetzt. Für die restlichen sechs Personen gibt es dann nach der Formel zur Berechnung von Permutationen ohne Wiederholung

$$P_6 = 6! = 720$$

Möglichkeiten, sich verschieden hinzusetzen, da deren Reihenfolge dafür entscheidend ist.

b) Eine der beiden Personen, die nicht nebeneinander sitzen sollen, setzt sich an einen beliebigen Platz. Die zweite Person darf auf keinen der beiden Plätze neben die erste Person und hat daher noch vier Plätze zur Auswahl. Für jede dieser Möglichkeiten haben die verbleibenden fünf Personen jeweils $P_5 = 5!$ Möglichkeiten, sich in verschiedener Weise zu platzieren, da deren Reihenfolge dafür entscheidend ist. Insgesamt beträgt die Anzahl der Möglichkeiten mit der Formel zur Berechnung von Permutationen ohne Wiederholung

$$4 \cdot P_5 = 4 \cdot 5! = 480.$$

4.6 Es handelt sich um ein Anordnungsproblem von insgesamt acht Elementen, wobei fünf Elemente einer Sorte gleich sind und drei Elemente der anderen Sorte ebenfalls. Die Anzahl der Möglichkeiten beträgt nach der Formel zur Berechnung von Permutationen mit Wiederholung

$$P_8^{5,3} = \frac{8!}{5!3!} = 56.$$

4.7 **a)** Die Anzahl der Möglichkeiten, aus fünf Architekten zwei zu wählen, beträgt C_5^2, da die Reihenfolge keine Rolle spielt. Für jede dieser Möglichkeiten gibt es C_7^3 Möglichkeiten, aus sieben Bauingenieuren drei zu wählen. Insgesamt beträgt die Anzahl der Möglichkeiten mit der Formel zur Berechnung von Kombinationen ohne Wiederholung

$$C_5^2 \cdot C_7^3 = \binom{5}{2} \cdot \binom{7}{3} = 10 \cdot 35 = 350.$$

b) Wenn ein bestimmter Bauingenieur im Komitee sein muss, so können die restlichen zwei Bauingenieure lediglich unter den verbleibenden sechs Bauingenieuren gewählt werden, das sind C_6^2 Möglichkeiten. Die Anzahl der Möglichkeiten beträgt insgesamt mit der Formel zur Berechnung von Kombinationen ohne Wiederholung

$$C_5^2 \cdot C_6^2 = \binom{5}{2} \cdot \binom{6}{2} = 10 \cdot 15 = 150.$$

c) Wenn zwei bestimmte Architekten nicht im Komitee sein sollen, so können die zwei Architekten lediglich unter den verbleibenden drei gewählt werden. Dafür gibt es C_5^3 verschiedene Möglichkeiten. Die Anzahl der Möglichkeiten beträgt insgesamt mit der Formel zur Berechnung von Kombinationen ohne Wiederholung

$$C_3^2 \cdot C_7^3 = \binom{3}{2} \cdot \binom{7}{3} = 3 \cdot 35 = 105.$$

Definition der Wahrscheinlichkeit

4.8 Die Anzahl der möglichen Anordnungen von einem defekten, vier gleichen 2 m langen und drei gleichen 1.40 m langen Zaunelementen beträgt $P_{8,W}^{1,4,3}$. Die Anzahl der günstigen Möglichkeiten kommt dadurch zustande, dass das defekte Zaunelement am Rand, d. h. links oder rechts außen, eingebaut wird (das sind zwei Möglichkeiten), und dass die restlichen vier gleichen 2 m langen und drei gleichen 1.40 m langen Zaunelemente in beliebiger Reihenfolge angeordnet sein können (das sind $P_{7,W}^{4,3}$ Möglichkeiten). Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt

$$2\frac{\cdot P_{7,W}^{4,3}}{P_{8,W}^{1,4,3}} = 2\frac{7!}{4!3!}\frac{4!3!}{8!} = 0.25.$$

4.9 Der Bohrer trifft dann das Drahtgeflecht nicht, wenn sein Zentrum einen Abstand von 3 mm zum Draht und damit von 4 mm zu dessen Zentrum hat. Es ergibt sich eine rechteckige „erlaubte“ Zone mit den Maßen $12-8 = 4$ mm bzw. $18-8 = 10$ mm und einer Fläche von 40 mm^2. Die gesamte (sich wiederholende) Zone ist ein Rechteck mit den Maßen 12 mm bzw. 18 mm und einer Fläche von $12 \cdot 18 = 216$ mm^2. Damit hat die „gefährliche“ Zone eine Fläche von $216 - 40 = 176$ mm^2. Die Wahrscheinlichkeit, dass der Bohrer das Drahtgeflecht trifft, beträgt daher

$$176/216 \approx 0.815.$$

4.10 Die Anzahl der Möglichkeiten, aus 52 Karten fünf zu ziehen, beträgt C_{52}^5 (Auswahl ohne Brücksichtigung der Anordnung - Kombinationen ohne Wiederholung, da alle Karten verschieden sind).

a) Die Anzahl der günstigen Ereignisse kommt dadurch zustande, dass die vier Asse unter den vorhandenen vier gewählt werden (dafür gibt es genau eine Möglichkeit) und die fünfte Karte aus den verbleibenden $52-4 = 48$ Karten gewählt wird. Dafür gibt es C_{48}^1 Möglichkeiten. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt

$$\frac{C_{48}^1}{C_{52}^5} = \binom{48}{1}\Big/\binom{52}{5} = \frac{1}{54\,145} \approx 0.000\,018\,469.$$

b) Die Anzahl der günstigen Ereignisse kommt dadurch zustande, dass die vier Asse unter den vorhandenen vier gewählt werden (dafür gibt es genau eine Möglichkeit) und der König unter den zur Verfügung stehenden vier Königen gewählt wird, wofür es C_4^1 Möglichkeit gibt. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt

$$\frac{C_4^1}{C_{52}^5} = \binom{4}{1}\Big/\binom{52}{5} = \frac{1}{649\,740} \approx 0.000\,001\,539.$$

c) Die Anzahl der günstigen Ereignisse kommt dadurch zustande, dass die drei Zehner unter den vorhandenen vier gewählt werden (dafür gibt es C_4^3 Möglichkeiten) und bei jeder dieser Möglichkeiten die zwei Buben unter den zur Verfügung stehenden vier Königen gewählt wird, wofür es C_4^2 Möglichkeit gibt. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt

$$\frac{C_4^3 C_4^2}{C_{52}^5} = \binom{4}{3}\binom{4}{2}\Big/\binom{52}{5} = \frac{1}{108\,290} \approx 0.000\,009\,234.$$

d) Für die Wahl einer „9“ aus den zur Verfügung stehenden vier gibt es C_4^1 Möglichkeiten, ebenso für die Wahl der „10“, „Bube“, „Dame“, „König“. Die Anzahl der günstigen Ereignisse beträgt demnach $\left(C_4^1\right)^5$. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt

$$\frac{\left(C_4^1\right)^5}{C_{52}^5} = \binom{4}{1}^5\Big/\binom{52}{5} = \frac{64}{162\,435} \approx 0.000\,394\,004.$$

e) Da ein Kartenspiel vier Farben mit jeweils 13 Karten hat, gibt es $4 \cdot C_{13}^{3}$ Möglichkeiten, drei Karten von einer Farbe und bei jeder dieser Möglichkeiten $3 \cdot C_{13}^{2}$ Möglichkeiten, zwei Karten von einer der drei anderen Farben zu wählen. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt

$$\frac{4 \cdot C_{13}^{3} \cdot 3 \cdot C_{13}^{2}}{C_{52}^{5}} = 4\binom{13}{3} \cdot 3\binom{13}{2} \Big/ \binom{52}{5} = \frac{429}{4\,165} \approx 0.103\,001\,2.$$

f) Die Anzahl der günstigen Ereignisse kommt dadurch zustande, dass das Ass unter den vorhandenen vier gewählt wird (dafür gibt es C_4^1 Möglichkeiten) und die restlichen vier Karten unter $52 - 4 = 48$ gewählt werden, die keine Asse sind, wofür es C_{48}^4 Möglichkeit gibt. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt

$$\frac{C_4^1 \cdot C_{48}^4}{C_{52}^5} = \binom{4}{1}\binom{48}{4} \Big/ \binom{52}{5} = \frac{778\,320}{2\,598\,960} \approx 0.299\,473\,636.$$

4.11 Die Anzahl der Möglichkeiten, aus 40 Kirschen zehn zu wählen, beträgt C_{40}^{10}. Die Anzahl der günstigen Ereignisse kommt dadurch zustande, dass die zehn Kirschen unter den 30 nicht madigen sind. Dafür gibt es C_{30}^{10} Möglichkeiten.

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt

$$C_{30}^{10} \Big/ C_{40}^{10} = \binom{30}{10} \Big/ \binom{40}{10} = \frac{30 \cdot 29 \cdot \dots \cdot 21}{40 \cdot 39 \cdot \dots \cdot 31} \approx 0.035\,444\,631.$$

4.12 **a**) Bei den zur Verfügung stehenden Buchstaben zehn Buchstaben wiederholt sich das A, das M und das T jeweils zwei Mal. Damit ist die Anzahl der verschiedenen Möglichkeiten, ein Wort aus diesen Buchstaben zu legen, gleich $P_{10,W}^{2,2,2,1,1,1,1} = 10!/(2!2!2!)$. Es gibt eine einzige günstige Möglichkeit - das Wort MATHEMATIK. Damit beträgt die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$1/P_{10,W}^{2,2,2,1,1,1,1} = 2!2!2!/10! \approx 0.000\,002\,205.$$

b) Zuerst wird die Wahrscheinlichkeit berechnet, dass unter den neun aus den 78 zur Verfügung stehenden Buchstaben gewählten genau drei T, zwei S, zwei I, ein A und ein K ist.

Die Anzahl der Möglichkeiten, unter 78 vorhandenen Buchstaben neun zu wählen, beträgt C_{78}^9. Die Anzahl der günstigen Ereignisse kommt dadurch zustande, dass man dabei
unter den zur Verfügung stehenden drei T genau drei T wählt (dafür gibt es $C_3^3 = 1$ Möglichkeit),
unter den zur Verfügung stehenden drei S genau zwei S wählt (dafür gibt es $C_3^2 = 3$ Möglichkeiten),
unter den zur Verfügung stehenden drei I genau zwei I wählt (dafür gibt es $C_3^2 = 3$ Möglichkeiten),
unter den zur Verfügung stehenden drei A genau ein A wählt (dafür gibt es $C_3^1 = 3$ Möglichkeiten),
unter den zur Verfügung stehenden drei K genau ein K wählt (dafür gibt es $C_3^1 = 3$ Möglichkeiten).

Insgesamt sind das $C_3^3 \left(C_3^2\right)^2 \left(C_3^1\right)^2 = 3^4$ günstige Möglichkeiten.

Die Wahrscheinlichkeit, dass unter den neun aus den 78 zur Verfügung stehenden Buchstaben gewählten genau drei T, zwei S, zwei I, ein A und ein K ist, beträgt somit

$$\frac{C_3^3 \left(C_3^2\right)^2 \left(C_3^1\right)^2}{C_{78}^9} = \frac{3^4 \cdot 9!}{78 \cdot 77 \cdot \ldots \cdot 70} \approx 4.441\,651 \cdot 10^{-10}.$$

Danach wird die Wahrscheinlichkeit berechnet, dass das Kind aus den gewählten drei T, zwei S, zwei I, ein A und ein K das Wort STATISTIK legt. Analog zu Aufgabe a) ist die Wahrscheinlichkeit dafür gleich

$$1/P_{9,W}^{3,2,2,1,1} = 3!2!2!/9! \approx 0.000\,066\,138.$$

Beide Ereignisse, die Auswahl der Buchstaben und das Legen in der „richtigen“ Anordnung, sind unabhängig. Damit ist die Wahrscheinlichkeit, dass nach zufälliger Auswahl von neun Buchstaben aus den 78 zur Verfügung stehenden und dem anschließenden Anordnen das Wort „STATISTIK“ entsteht, gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Ereignisse, also

$$\frac{C_3^3 \left(C_3^2\right)^2 \left(C_3^1\right)^2}{C_{78}^9} \frac{1}{P_{9,W}^{3,2,2,1,1}} = \frac{3^4 \cdot 9!}{78 \cdot 77 \cdot \ldots \cdot 70} \frac{3!2!2!}{9!} \approx 2.937\,599\,679 \cdot 10^{-14}.$$

4.13 Die Anzahl der Möglichkeiten, aus insgesamt $5+4+3 = 12$ Studenten drei auszuwählen, ist die Anzahl der Kombinationen ohne Wiederholung von 3 aus 12 Elementen und beträgt $C_{12}^{(3)}$.

a) Die Anzahl der günstigen Möglichkeiten beträgt $C_5^{(3)}$ (alle drei Studenten sind unter den fünf aus dem Studiengang Bauingenierwesen zu wählen). Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt

$$\frac{C_5^{(3)}}{C_{12}^{(3)}} = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{12 \cdot 11 \cdot 10} = \tfrac{1}{22} \approx 4.55\%.$$

b) Entweder es ist genau ein Student aus dem Studiengang Innenarchitektur ($C_3^{(1)}$ Möglichkeiten) und dabei genau zwei Studenten aus dem Studiengang Architektur ($C_4^{(2)}$ Möglichkeiten) oder es ist kein Student aus dem Studiengang Innenarchitektur und genau drei Studenten aus dem Studiengang Architektur ($C_4^{(3)}$ Möglichkeiten. Die Anzahl der günstigen Möglichkeiten beträgt

$$C_3^{(1)} C_4^{(2)} + C_4^{(3)} = \frac{3 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2} + 4 = 22.$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt

$$\frac{C_3^{(1)} C_4^{(2)} + C_4^{(3)}}{C_{12}^{(3)}} = \frac{22 \cdot 2 \cdot 3}{12 \cdot 11 \cdot 10} = 10\%.$$

c) Entweder es sind genau zwei Studenten aus dem Studiengang Architektur ($C_4^{(2)}$ Möglichkeiten), dabei kann der dritte entweder ein Student aus dem Studiengang Bauingenierwesen ($C_5^{(1)}$ Möglichkeiten) oder aus dem Studiengang Innenarchitektur ($C_3^{(1)}$ Möglichkeiten) sein, oder es sind alle drei Studenten aus dem Studiengang Architektur ($C_4^{(3)}$ Möglichkeiten). Die Anzahl der günstigen Möglichkeiten beträgt

$$C_4^{(2)} \left(C_5^{(1)} + C_3^{(1)} \right) + C_4^{(3)} = 52.$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt

$$\frac{C_4^{(2)} \left(C_5^{(1)} + C_3^{(1)} \right) + C_4^{(3)}}{C_{12}^{(3)}} = \frac{52 \cdot 2 \cdot 3}{12 \cdot 11 \cdot 10} = \approx 23.6\%.$$

Wahrscheinlichkeit unabhängiger, disjunkter, nicht disjunkter und komplementärer Ereignisse

4.14 Mit E_i wird das Ereignis „Der i-te Ziegel ist erste Wahl“ bezeichnet, mit Z_i wird das Ereignis „Der i-te Ziegel ist zweite Wahl“ bezeichnet, mit A_i wird das Ereignis „Der i-te Ziegel ist Ausschuss“ bezeichnet, $i = 1, 2, 3, 4$. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Ziegel erste Wahl ist, beträgt $p_1 = 0.7$, dass er zweite Wahl ist, beträgt $p_2 = 0.25$, dass er Ausschuss ist, beträgt $p_3 = 0.05$.

a) Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $E_1 \cap E_2 \cap E_3 \cap E_4$. Die Ereignisse E_i sind unabhängig. Daher ist nach dem Multiplikationssatz

$$P\left(E_1 \cap E_2 \cap E_3 \cap E_4\right) = P(E_1)P(E_2)P(E_3)P(E_4) = p_1^4 = 0.2401.$$

b) Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit, dass entweder alle vier Ziegel erste Wahl sind oder darunter genau einer zweiter Wahl und genau drei erster Wahl sind.

Dafür, dass der i-te Ziegel zweiter Wahl und die anderen drei erster Wahl sind, gibt es die $C_4^1 = 4$ (disjunkten) Möglichkeiten $i = 1, 2, 3, 4$:

$$Z_1 \cap E_2 \cap E_3 \cap E_4, \quad E_1 \cap Z_2 \cap E_3 \cap E_4, \quad E_1 \cap E_2 \cap Z_3 \cap E_4, \quad E_1 \cap E_2 \cap E_3 \cap Z_4.$$

Die Wahrscheinlichkeit jedes dieser Ereignisse beträgt nach dem Multiplikationssatz $p_1^3 p_2$. Insgesamt erhält man die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$P((E_1 \cap E_2 \cap E_3 \cap E_4) \cup (Z_1 \cap E_2 \cap E_3 \cap E_4) \cup (E_1 \cap Z_2 \cap E_3 \cap E_4) \cup$$
$$(E_1 \cap E_2 \cap Z_3 \cap E_4) \cup (E_1 \cap E_2 \cap E_3 \cap Z_4)) = p_1^4 + 4p_1^3 p_2 = 0.5831.$$

c) Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit, dass entweder alle vier Ziegel erste Wahl sind oder genau drei Ziegel erste Wahl und ein Ziegel entweder zweite Wahl oder Ausschuss ist.

Dafür, dass genau drei Ziegel erste Wahl und der i-te Ziegel entweder zweite Wahl oder Ausschuss ist, gibt es die zwei (disjunkten) Möglichkeiten: Drei Ziegel sind erste Wahl und ein Ziegel ist zweite Wahl (Wahrscheinlichkeit $p_1^3 p_2$) oder drei Ziegel sind erste Wahl und ein Ziegel ist Ausschuss (Wahrscheinlichkeit $p_1^3 p_3$). Die Wahrscheinlichkeit beträgt insgsamt $p_1^3(p_2 + p_3)$.

Dafür, dass der Ziegel, der entweder zweite Wahl oder Ausschuss ist, der i-te ist, gibt es die vier (disjunkten) Möglichkeiten $i = 1, 2, 3, 4$. Damit ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$p_1^4 + 4p_1^3(p_2 + p_3) = 0.6517.$$

4.15 Sei das Ereignis

A - Der Jäger trifft.
$\overline{A}$ - Der Jäger trifft nicht.

Die gesuchte Anzahl der Schüsse wird mit n bezeichnet. Wenn der Hase bei n Schüssen nicht getroffen wird, so tritt unabhängig voneinander n Mal das Ereignis $\overline{A}$ ein. Nach dem Multiplikationssatz für unabhängige Ereignisse ist die Wahrscheinlichkeit dafür

$P(\overline{A} \cap \ldots \cap \overline{A}) = P(\overline{A})^n$.

Gegeben ist durch die Aufgabenstellung die Wahrscheinlichkeit des dazu komplementären Ereignisses, d. h. dass der Hase bei mindestens einem der n Schüsse getroffen wird. Mit der Wahrscheinlichkeit des komplementären Ereignisses ist

$P(\overline{\overline{A} \cap \ldots \cap \overline{A}}) = 1 - P(\overline{A} \cap \ldots \cap \overline{A}) \geq 0.8$.

Da auch die Ereignisse A und $\overline{A}$ komplementär sind, gilt

$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 0.7$.

Damit ergibt sich für die Anzahl n der Schüsse bis zum ersten Treffer die Ungleichung

$1 - 0.7^n \geq 0.8$ mit der Lösung $n \geq \ln 0.2/\ln 0.7 \approx 4.51$.

Der Jäger muss also mindestens fünf Mal schießen, damit er den Hasen mit einer Wahrscheinlichkeit von 80% trifft.

4.16 Seien die Ereignisse

A - Ein Balken aus Werk A hat die erforderliche Druckfestigkeit.
B - Ein Balken aus Werk B hat die erforderliche Druckfestigkeit.
C - Ein Balken aus Werk C hat die erforderliche Druckfestigkeit.

Gegeben sind durch die Aufgabenstellung die Wahrscheinlichkeiten

$P(A) = 0.96, \qquad P(B) = 0.92, \qquad P(C) = 0.89.$

Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $A \cap B$ ($A \cap C$, $B \cap C$).

Die Ereignisse A, B und C sind unabhängig. Nach dem Multiplikationssatz für unabhängige Ereignisse sind die gesuchten Wahrscheinlichkeiten

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A)P(B) = 0.96 \cdot 0.92 = 0.8832, \\ P(A \cap C) &= P(A)P(C) = 0.96 \cdot 0.89 = 0.8544, \\ P(B \cap C) &= P(B)P(C) = 0.92 \cdot 0.89 = 0.8188. \end{aligned}$$

4.17 Sei das Ereignis

A - Beim Würfeln fällt eine „6“.
$\overline{A}$ - Beim Würfeln fällt keine „6“.

Die Wahrscheinlichkeitten dieser komplementären Ereignisse sind

$P(A) = 1/6, \qquad$ und $\qquad P(\overline{A}) = 5/6.$

Wenn bei keinem von sechs Würfen eine „6“ fällt, so tritt unabhängig voneinander n Mal das Ereignis $\overline{A}$ ein. Nach dem Multiplikationssatz für unabhängige Ereignisse ist die Wahrscheinlichkeit dafür

$P(\overline{A} \cap \ldots \cap \overline{A}) = P(\overline{A})^6 = (5/6)^6$.

Das dazu komplementäre Ereignis besteht darin, das bei mindestens einem der sechs Würfe eine „6“ fällt. Mit der Wahrscheinlichkeit des komplementären Ereignisses ist

$P(\overline{\overline{A} \cap \ldots \cap \overline{A}}) = 1 - P(\overline{A} \cap \ldots \cap \overline{A}) = 1 - (5/6)^6 \approx 0.6651$.

4.18 Sei das Ereignis

A - A wird in 20 Jahren noch leben.
B - B wird in 20 Jahren noch leben.

Gegeben sind durch die Aufgabenstellung die Wahrscheinlichkeiten dieser beiden unabhängigen Ereignisse

$P(A) = 0.7 \qquad$ und $\qquad P(B) = 0.5.$

a) Gesucht ist $P(A \cap B)$. Nach dem Multiplikationssatz für unabhängige Ereignisse ist
$P(A \cap B) = P(A)P(B) = 0.35$.

b) Gesucht ist $P((A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B))$ (A lebt und B nicht oder A lebt nicht und B lebt). Die Ereignisse $A \cap \overline{B}$ und $\overline{A} \cap B$ sind unvereinbar. Daher ist mit dem Additionsgesetz für unvereinbare Ereignisse

$P((A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)) = P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap B)$.

Die Ereignisse A und $\overline{B}$ bzw. $\overline{A}$ und B sind unabhängig. Mit den Wahrscheinlichkeiten der komplementären Ereignisse

$P(\overline{A}) = 0.3 \qquad$ und $\qquad P(\overline{B}) = 0.5$

ist mit dem Multiplikationssatz

$P((A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)) = P(A)P(\overline{B}) + P(\overline{A})P(B) = 0.7 \cdot 0.5 + 0.3 \cdot 0.5 = 0.5$.

c) Gesucht ist $P(A \cup B)$. Mit dem Additionssatz ist
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.7 + 0.5 - 0.35 = 0.85.$

d) Gesucht ist $P(A \cap \overline{B})$. Die Ereignisse A und $\overline{B}$ sind unabhängig. Mit dem Multiplikationssatz ist
$P(A \cap \overline{B}) = P(A)P(\overline{B}) = 0.7 \cdot 0.5 = 0.35.$

e) Gesucht ist $P(\overline{A} \cap B)$. Die Ereignisse A und $\overline{B}$ sind unabhängig. Mit dem Multiplikationssatz ist
$P(\overline{A} \cap B) = P(\overline{A})P(B) = 0.3 \cdot 0.5 = 0.15.$

4.19 Sei das Ereignis

J - Ein Junge wurde geboren.
M - Ein Mädchen wurde geboren.

Gegeben sind die Wahrscheinlichkeiten dieser beiden unabhängigen und komplementären Ereignisse

$P(J) = 0.5$ und $P(M) = P(\overline{J}) = 0.5.$

a) Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist $C_4^2 P(J \cap J \cap M \cap M)$, denn es gibt C_4^2 unvereinbare (verschiedene) Möglichkeiten dafür, an welchen zwei unter vier „Stellen“ die beiden Jungen geboren werden. Mit dem Multiplikationssatz für unabhängige Ereignisse ergibt sich
$C_4^2 P(J \cap J \cap M \cap M) = C_4^2 P(J)^2 P(M)^2 = \binom{4}{2} (0.5)^4 = 0.375.$

b) Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist $C_4^4 P(J \cap J \cap J \cap J)$, denn es gibt $C_4^4 = 1$ Möglichkeit dafür, an welchen vier unter vier „Stellen“ die vier Jungen geboren werden. Mit dem Multiplikationssatz für unabhängige Ereignisse ergibt sich
$C_4^4 P(J \cap J \cap J \cap J) = P(J)^4 = (0.5)^4 = 0.0625.$

c) Das Ereignis „Unter vier Kindern wurde kein Junge geboren“ $= M \cap M \cap M \cap M$ ist zum Ereignis „Unter vier Kindern wurde mindestens ein Junge geboren“ komplementär. Die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $M \cap M \cap M \cap M$ wurde in der Aufgabe **b)** sinngemäß ermittelt. Daher beträgt die gesuchte Wahrscheinlichkeit, dass unter vier Kindern mindestens ein Junge geboren wurde,
$1 - P\left(M \cap M \cap M \cap M\right) = 1 - (0.5)^4 = 1 - 0.0625 = 0.9375.$

d) Sei das Ereignis

M_0 - Unter vier Kindern wurde kein Mädchen geboren.
M_1 - Unter vier Kindern wurde genau ein Mädchen geboren.
M_2 - Unter vier Kindern wurden genau zwei Mädchen geboren.

Gesucht ist $P(M_0 \cup M_1 \cup M_2)$. Die Ereignisse M_0, M_1 und M_2 sind unvereinbar, und daher gilt mit dem Additionsgesetz für unvereinbare Ereignisse
$P(M_0 \cup M_1 \cup M_2) = P(M_0) + P(M_1) + P(M_2).$
Die Wahrscheinlichkeiten $P(M_2)$ und $P(M_0)$ wurden in den Aufgaben **a)** und **b)** ermittelt. Weiter ist
$P(M_1) = C_4^1 P(J \cap M \cap M \cap M) = \binom{4}{1} (0.5)^4 = 0.25,$
denn es gibt C_4^1 unvereinbare (verschiedene) Möglichkeiten dafür, an welcher unter vier „Stellen“ das Mädchen geboren wird. Für die gesuchte Wahrscheinlichkeit ergibt sich
$P(M_0 \cup M_1 \cup M_2) = P(M_0) + P(M_1) + P(M_2) = 0.0625 + 0.375 + 0.25 = 0.6875.$

Bedingte und totale Wahrscheinlichkeit

4.20 Seien die Ereignisse wie folgt bezeichnet:

A - Der Nominalwert der Spannung wird überschritten.
B - Der Fernsehapparat zeigt Bildstörungen.

Dann sind die Ereignisse

B/A - Der Fernsehapparat zeigt Bildstörungen, falls Überspannung vorliegt.
$A \cap B$ - Der Fernsehapparat zeigt Bildstörungen und es liegt Überspannung vor.

Gegeben sind durch die Aufgabenstellung die Wahrscheinlichkeiten
$P(A) = 0.2$ und $P(B/A) = 0.5.$
Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit $P(A \cap B)$. Mit der Formel der bedingten Wahrscheinlichkeit ergibt sich

$$P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}, \qquad \text{d. h.} \qquad P(B \cap A) = P(A)P(B/A) = 0.2 \cdot 0.5 = 0.1.$$

4.21 Mit den Ereignissen

A - Der Dachziegel ist brauchbar.
B - Der Dachziegel kann in die Güteklasse 1 eingeordnet werden.

ist das Ereignis

B/A - Ein brauchbarer Dachziegel kann in die Güteklasse 1 eingeordnet werden.
$B \cap A$ - Der Dachziegel kann in die Güteklasse 1 eingeordnet werden und ist brauchbar.

Offenbar sind die Ereignisse B und $B \cap A$ identisch, da aus dem Ereignis B das Ereignis A folgt.

Gegeben sind durch die Aufgabenstellung die Wahrscheinlichkeiten

$P(A) = 0.96$ und $P(B/A) = 0.75$.

Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit $P(B)$.

Aus der bedingten Wahrscheinlichkeit ergibt sich wegen $P(B) = P(B \cap A)$

$$P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}, \qquad \text{d. h.} \qquad P(B) = P(A)P(B/A) = 0.96 \cdot 0.75 \approx 0.72.$$

4.22 Seien die Ereignisse

A - Die Kugel wird aus der Urne A gezogen.
B - Die Kugel wird aus der Urne B gezogen.
C - Die Kugel wird aus der Urne C gezogen.
S - Es wird eine schwarze Kugel gezogen.
S/A - Eine schwarze Kugel wird aus der Urne A gezogen.
S/B - Eine schwarze Kugel wird aus der Urne B gezogen.
S/C - Eine schwarze Kugel wird aus der Urne C gezogen.

Gegeben sind aus der Aufgabenstellung folgende Wahrscheinlichkeiten:

$P(S/A) = 2/5,\ P(S/B) = 3/5,\ P(S/C) = 3/5$ (Auswahl einer schwarzen Kugel aus der Urne A bzw. B bzw. C),

$P(A) = 1/3,\ P(B) = 1/3,\ P(C) = 1/3$ (Auswahl einer beliebigen Urne aus drei Urnen).

a) Die Ereignisse A, B und C sind unvereinbar. Die gesuchte totale Wahrscheinlichkeit für das Ereignis S ist
$P(S) = P(S/A)P(A) + P(S/B)P(B) + P(S/C)P(C) = 1/3(2/5 + 3/5 + 3/5) = 8/15.$

b) Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit $P(A/S)$ ($P(B/S)$, $P(C/S)$). Mit der Folgerung aus der Formel der bedingten Wahrscheinlichkeit
$P(A \cap S) = P(A)P(A/S) = P(S)P(S/A)$
ergibt sich
$P(A/S) = P(A)P(S/A)/P(S) = (1/3) \cdot (2/5)/(8/15) = 1/4 = 0.25.$
Analog ist
$P(B/S) = P(B)P(S/B)/P(S) = (1/3) \cdot (3/5)/(8/15) = 3/8 = 0.375,$
$P(C/S) = P(C)P(S/C)/P(S) = (1/3) \cdot (3/5)/(8/15) = 3/8 = 0.375.$

4.23 Seien die Ereignisse

A - Das Bauelement kommt aus der Firma A.
B - Das Bauelement kommt aus der Firma B.
Q - Das Bauelement genügt den Anforderungen.
Q/A - Das Bauelement der Firma A genügt den Anforderungen.
Q/B - Das Bauelement der Firma B genügt den Anforderungen.

Gegeben sind folgende Wahrscheinlichkeiten aus der Aufgabenstellung:

$P(A) = 0.4,\quad P(B) = 0.6,\quad P(Q/A) = 0.9,\quad P(Q/B) = 0.7.$

a) Die Ereignisse A und B sind unvereinbar. Für die gesuchte totale Wahrscheinlichkeit $P(Q)$ ergibt sich
$P(Q) = P(Q/A)P(A) + P(Q/B)P(B) = 0.9 \cdot 0.4 + 0.7 \cdot 0.6 = 0.78.$

b) Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit $P(A \cap Q)$. Aus der bedingten Wahrscheinlichkeit $P(Q/A)$ ergibt sich
$P(A \cap Q) = P(Q/A)P(A) = 0.9 \cdot 0.4 = 0.36.$

4.24 Mit den Ereignissen

A - Ein Betonanker ist Ausschuss.
M_1 - Ein Betonanker wurde von der ersten Maschine produziert.
M_2 - Ein Betonanker wurde von der zweiten Maschine produziert.
M_3 - Ein Betonanker wurde von der dritten Maschine produziert.

sind folgende Wahrscheinlichkeiten gegeben:
$P(A/M_1) = 0.02,\ P(A/M_2) = 0.08,\ P(A/M_3) = 0.05,$
$P(M_1) = 0.4,\ P(M_2) = 0.35,\ P(M_3) = 0.25.$

a) Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit $P(A)$. Mit dem Satz über die totale Wahrscheinlichkeit ergibt sich

$$P(A) = \sum_{i=1}^{3} P(A \cap M_i) = \sum_{i=1}^{3} P(A/M_i)P(M_i) = 0.02 \cdot 0.4 + 0.08 \cdot 0.35 + 0.05 \cdot 0.25 = 0.0485.$$

b) Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit $P(M_2/A)$. Mit dem Satz über die bedingte Wahrscheinlichkeit ergibt sich $P(M_2/A) = P(M_2 \cap A)/P(A) = P(A/M_2)P(M_2)/P(A) = 0.08 \cdot 0.35/0.0485 \approx 0.5773.$

Diskrete Zufallsvariablen

4.25 Die Anzahl X der Fehler auf einem Abschnitt der Länge l ist poissonverteilt mit dem Parameter $\lambda = 8l/(100 \text{ m})$.

a) Mit $l = 10$ m und $\lambda = 4/5$ ergibt sich

$$P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) = \mathrm{e}^{-\frac{4}{5}} \left(1 + \frac{4}{5} + \left(\frac{4}{5}\right)^2 \cdot \frac{1}{2}\right) \approx 0.9525.$$

b) Mit $l = 2.5$ und $\lambda = 1/5$ ergibt sich

$$P(X=0) = \mathrm{e}^{-\frac{4}{5}} \approx 0.81.$$

4.26 Die Anzahl X der Sternschnuppen in einem Zeitintervall der Länge t ist poissonverteilt mit dem Parameter $\lambda = 6t/(1 \text{ h})$. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist mit $t = 1/4$ h und $\lambda = 3/2$

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - (P(X=0) + P(X=1)) = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{3}{2}} \left(1 + \frac{3}{2}\right) \approx 0.4421.$$

4.27 Die Anzahl X der vor der Bahnstrecke in einem Zeitintervall der Länge t anhaltenden Fahrzeuge ist poissonverteilt mit dem Parameter $\lambda = 75t/(1 \text{ h})$. Ein „ein Stau bis in den Kreuzungsbereich“ bedeutet, dass die Anzahl der anhaltenden Fahrzeuge im Zeitintervall $t = 4$ min $= 1/60$ h größer als 10 ist. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist daher mit $\lambda = 5$

$$P(X > 10) = 1 - P(X \leq 10) = 1 - \sum_{k=0}^{10} P(X=k) = 1 - \mathrm{e}^{-5} \sum_{k=0}^{10} \frac{5^k}{k!} \approx 1 - 0.986 \approx 0.014.$$

4.28 Die Anzahl X der Stücke Ausschuss unter den gezogenen Elektromotoren der Stichprobe ist hypergeometrisch verteilt mit $N = 200,\ n = 20,\ M = pN = 5\% \cdot 200 = 10$. Die gesuchten Wahrscheinlichkeiten sind

a) $$P(X=5) = \frac{\binom{10}{5}\binom{190}{15}}{\binom{200}{20}} = \frac{10!\ 190!\ 20!\,180!}{5!5!\ 15!175!\ 200!} = \frac{7 \cdot \ldots \cdot 10 \cdot 16 \cdot \ldots \cdot 20 \cdot 176 \cdot \ldots \cdot 180}{2 \cdot \ldots \cdot 5 \cdot 191 \cdot \ldots \cdot 200} \approx 0.0010281.$$

b) $$P(X=0) = \frac{\binom{10}{0}\binom{190}{20}}{\binom{200}{20}} = \frac{190!\ 20!\ 180!}{20!\ 170!\ 200!} = \frac{171 \cdot \ldots \cdot 180}{191 \cdot \ldots \cdot 200} \approx 0.33978.$$

c) $$P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) = \frac{\binom{10}{0}\binom{190}{20}}{\binom{200}{20}} + \frac{\binom{10}{1}\binom{190}{19}}{\binom{200}{20}} + \frac{\binom{10}{2}\binom{190}{18}}{\binom{200}{20}}$$

$$= \frac{190!\ 20!\ 180!}{20!\ 170!\ 200!} + \frac{10 \cdot 190!\ 20!\,180!}{189!\ 200!} + \frac{10!\ 190!\ 20!\,180!}{2!\,8!\ 188!\,2!\ 200!} \approx 0.93471.$$

4.29 Die Anzahl X der Kunden in der Verkaufsstelle im Zeitintervall t ist poissonverteilt mit dem Parameter $\lambda = 64t/(8 \text{ h})$. Mit $\lambda = 8$ sind die gesuchten Wahrscheinlichkeiten

a) $P(X=5)=\dfrac{8^5}{5!}\mathrm{e}^{-8}\approx 0.091.$

b) $P(X\le 5)=P(X=0)+\ldots+P(X=5)=\mathrm{e}^{-8}\left(1+8+\dfrac{8^2}{2!}+\dfrac{8^3}{3!}+\dfrac{8^4}{4!}+\dfrac{8^5}{5!}\right)\approx 0.191236.$

4.30 Die Anzahl X der Stücke in der Stichprobe, die Ausschuss sind, ist hypergeometrisch verteilt mit $N=100$, $n=10$, $M=pN=3\%\cdot 100=3$. Die gesuchten Wahrscheinlichkeiten sind

a) $P(X=3)=\dfrac{\binom{3}{3}\binom{97}{7}}{\binom{100}{10}}=\dfrac{97!}{7!\,90!}\approx 0.00074.$

b) $P(X\le 2)=P(X<3)=1-P(X=3)\approx 0.99926.$

4.31 Die Anzahl der Jungen unter $n=4$ geborenen Kindern ist binomialverteilt mit $p=0.52$ und $q=1-p=0.48$. Die gesuchten Wahrscheinlichkeiten sind

a) $P(X=2)=\binom{4}{2}0.52^2 0.48^2\approx 0.3738.$

b) $$\begin{aligned}P(X\le 2)&=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)\\&=\binom{4}{0}0.52^0 0.48^4+\binom{4}{1}0.52^1 0.48^3+\binom{4}{2}0.52^2 0.48^2\approx 0.6568.\end{aligned}$$

c) $P(X\ge 3)=1-P(X<3)=1-P(X\le 2)\approx 0.3432.$

d) $P(X=0)=\binom{4}{0}0.52^0 0.48^4\approx 0.053.$

Stetige Zufallsvariablen

4.32 Die Zufallsvariable X ist die Ankunftszeit auf dem Bahnhof. Sie ist gleichverteilt, und ihre Verteilungsfunktion ist (Einheit der Zeit in Minuten)

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{x-11\cdot 60}{120} & 11\cdot 60<x<13\cdot 60\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}\tag{2.2}$$

Für die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A - „Fahrt nach Astadt“ gilt mit dem Additionssatz für disjunkte Ereignisse

$$\begin{aligned}P(A)&=P(11.00\le X<11.10\cup 12.00\le X<12.10)\\&=P(11.00\le X<11.10)+P(12.00\le X<12.10).\end{aligned}$$

Die Intervallwahrscheinlichkeiten errechnen sich mit der Verteilungsfunktion (2.2)

$$\begin{aligned}P(11.00\le X<11.10)&=P(X<11.10)-P(X<11.00)\\&=F(11\cdot 60+10)-F(11\cdot 60)=10/120=1/12,\\P(12.00\le X<12.10)&=P(X<12.10)-P(X<12.00)\\&=F(12\cdot 60+10)-F(12\cdot 60)=10/120=1/12.\end{aligned}$$

Damit ist $P(A)=2\cdot 1/12=1/6$.
Analog ergibt sich

$$\begin{aligned}P(B)&=P(11.10\le X<11.30\cup 12.10\le X<12.30)\\&=P(11.10\le X<11.30)+P(12.10\le X<12.30)=20/120+20/120=1/3,\\P(C)&=P(11.30\le X<12.00\cup 12.30\le X<13.00)\\&=P(11.30\le X<12.00)+P(12.30\le X<13.00)=30/120+30/120=1/2.\end{aligned}$$

4.33 Die Zufallsvariable X ist der Messwert des Betonprüfgerätes.

a) Die Verteilungsdichte der Gleichverteilung von X auf dem zu r symmetrischen Intervall $[r-a,r+a]$ lautet

$$f_g(x)=\begin{cases}1/(2a), & x\in[r-a,r+a],\\ 0, & x\notin[r-a,r+a].\end{cases}$$

Der Erwartungswert dieser Gleichverteilung ist $\mu = r$, die Varianz

$$Var(X) = \int_{r-a}^{r+a} x^2 f_g(x)\,\mathrm{d}x - \mu^2 = \frac{a^2}{3}$$

und die Standardabweichung
$\sigma_g = \sqrt{3}a/3$.
Aus der Bedingung
$0.6 = P(r - \Delta r < X < r + \Delta r) = \int_{r-\Delta r}^{r+\Delta r} f_g(x)\,\mathrm{d}x = \Delta r/a$
ergibt sich
$a = \Delta r/0.6 = 0.005/0.6 \approx 0.008333$ bzw. $\sigma_g = \sqrt{3}a/3 \approx 0.0048$.

b) Die Verteilungsfunktion der Normalverteilung mit dem Erwartungswert r und der Standardabweichung σ_n lautet
$\Phi_S\left(\frac{x-r}{\sigma_n}\right)$.
Aus der Bedingung

$$0.6 = P(r - \Delta r < X < r + \Delta r) = \Phi_S\left(\frac{\Delta r}{\sigma_n}\right) - \Phi_S\left(\frac{-\Delta r}{\sigma_n}\right) = 2\Phi_S\left(\frac{\Delta r}{\sigma_n}\right) - 1$$

folgt

$$\frac{\Delta r}{\sigma_n} = \Phi_S^{-1}\left(\frac{1+0.6}{2}\right) = \Phi_S^{-1}(0.8) \approx 0.842$$

und damit die Standardabweichung
$\sigma_n = \Delta r/\Phi_S^{-1}(0.8) \approx 0.005/0.842 \approx 0.0059$.

4.34 a) Die Masse X der Zementsäcke ist eine $N(25, 0.5^2)$-verteilte Zufallsvariable. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist

$$P(X \geq 26) = 1 - P(X < 26) = 1 - \Phi_S\left(\frac{26-25}{0.5}\right) = 1 - \Phi_S(2) \approx 1 - 0.977 = 0.023.$$

b) Die Masse X der Zementsäcke ist eine $N(25, \sigma^2)$-verteilte Zufallsvariable. Für die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist

$$\begin{aligned}
0.01 &\geq P(X \geq 25.2 \cup X \leq 24.8) = 2\Phi_S\left(\frac{24.8-25}{\sigma}\right), \text{ d. h.}\\
0.005 &\geq \Phi_S\left(\frac{24.8-25}{\sigma}\right)\\
-2.576 \approx \Phi_S^{-1}(0.005) &\geq \frac{24.8-25}{\sigma}\\
\sigma &\leq 0.2/2.576 \approx 0.078.
\end{aligned}$$

Die Standardabweichung der Abfüllmaschine darf nicht mehr als 78 g betragen, damit die Wahrscheinlichkeit, einen Zementsack mit mehr als 200 g Abweichung von der Masse von 25 kg zu kaufen, nicht größer als 1% ist.

4.35 a) Fehlerhaft bedeutet, dass die Kapazität K kleiner als 198 μF ist. Man erhält

$$P(K < 198) = \Phi_S\left(\frac{198-200}{5}\right) = 1 - \Phi_S(0.4) \approx 1 - 0.6554 \approx 0.345.$$

b) Fehlerhaft bedeutet, dass die Kapazität K größer als 202 μF ist. Man erhält

$$P(K \geq 202) = 1 - P(K < 202) = 1 - \Phi_S\left(\frac{202-200}{5}\right) = 1 - \Phi_S(0.4) \approx 1 - 0.6554 \approx 0.345.$$

c) Fehlerhaft bedeutet, dass die Kapazität K außerhalb des Intervalls $[195, 205]$ $[\mu$F$]$ liegt. Man erhält
$P(K > 202 \cup K < 195) = P(K > 202) + P(K < 195) = 1 - P(K < 205) + P(K < 195)$

$$= 1 - \Phi_S\left(\frac{205-200}{5}\right) + \Phi_S\left(\frac{195-200}{5}\right) = 2 - 2\Phi_S(1) \approx 2 - 2 \cdot 0.842 \approx 0.318.$$

d) Fehlerhaft bedeutet, dass die Kapazität K außerhalb des Intervalls $[200-\alpha, 200+\alpha]$ μF liegt. Man erhält

$P((K>200+\alpha)\cup(K<200-\alpha)) = P(K>200+\alpha) + P(K<200-\alpha)$

$$= 1-P(K<200+\alpha) + P(K<200-\alpha) = 1-\Phi_S\left(\frac{\alpha}{\sigma}\right) + \Phi_S\left(-\frac{\alpha}{\sigma}\right) = 2-2\Phi_S\left(\frac{\alpha}{\sigma}\right) = 0.001$$

und daraus

$$\Phi_S\left(\frac{\alpha}{\sigma}\right) = 0.9995, \text{ d. h. } \frac{\alpha}{\sigma} \approx 3.29 \text{ und } \alpha \approx 5\cdot 3.29 = 16.45.$$

Die Toleranzen für die Kapazität K sind daher $(183.55, 216.45)$ $[\mu\text{F}]$.

4.36 **a**) Die Zufallsvariable X ist die Lebensdauer eines Akkumulators. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist mit der Verteilungsfunktion Φ_S der Standardnormalverteilung

$$P(X<1) = \Phi_S\left(\frac{1-\mu}{\sigma}\right) = \Phi_S\left(\frac{1-2}{0.5}\right) = \Phi_S(-2) = 1-\Phi_S(2) \approx 0.023.$$

b) Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist

$$P(X>3) = 1-P(X<3) = 1-\Phi_S\left(\frac{3-\mu}{\sigma}\right) = 1-\Phi_S(2) = \Phi_S(-2) \approx 0.023.$$

c) Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist

$$P(1<X<2) = P(X<2)-P(X<1) = \Phi_S\left(\frac{2-\mu}{\sigma}\right) - \Phi_S\left(\frac{2-\mu}{\sigma}\right)$$
$$= \Phi_S(0) - \Phi_S(-2) = 0.5-(1-\Phi_S(2)) \approx 0.477.$$

d) Die Zufallsvariable X_1 ist die Lebensdauer des ersten Akkumulators, die Zufallsvariable X_2 ist die Lebensdauer des zweiten Akkumulators. Die Ereignisse „$X_1>2$ Jahre“ und „$X_2>2$ Jahre“ sind unabhängig. Mit dem Multiplikationssatz ergibt sich die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$P(X_1>2\cap X_2>2) = P(X_1>2)P(X_2>2) = (1-P(X_1<2))(1-P(X_2<2))$$
$$= \left(1-\Phi_S\left(\frac{2-\mu}{\sigma}\right)\right)^2 = 0.5^2 = 0.25.$$

4.37 Der Gesamtwiderstand $R=R_1+R_2$ ist eine normalverteilte Zufallsvariable, die als Summe der Zufallsvariablen R_1 und R_2 die Verteilungsfunktion

$N(\mu_1+\mu_2, \sigma_1^2+\sigma_2^2) = N(700, 116)$

besitzt. Damit erhält man

$$P(700-\mu<R<700+\mu) = P(R<700+\mu) - P(700-\mu) = \Phi_S\left(\frac{\mu}{\sigma}\right) - \Phi_S\left(-\frac{\mu}{\sigma}\right) = 2\Phi_S\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)-1 = 0.99,$$

d. h. $\Phi_S\left(\frac{\mu}{\sigma}\right) = 0.995$ und somit $\frac{\mu}{\sigma} \approx 2.576$, d. h. $\mu = \sqrt{116}\cdot 2.576 \approx 27.74$.

Der Gesamtwiderstand liegt mit einer Wahrscheinlichkeit von 99% in den Grenzen $(627.26, 727.74)$ $[\Omega]$.

4.38 Mit der Verteilungsfunktion der Exponentialverteilung ergibt sich die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$P(T<6\,\text{h}) = 1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{4\,\text{h}}\cdot 6\,\text{h}} = 1-\mathrm{e}^{-1.5} \approx 78\%.$$

4.39 Der Parameter der Exponentialverteilung ist $1/(10\,\text{min}) = 6/\text{h}$. Damit ergibt sich die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$P(T<0.25\,\text{h}) = 1-\mathrm{e}^{-\frac{6}{\text{h}}\cdot 0.25\,\text{h}} = 1-\mathrm{e}^{-1.5} \approx 78\%.$$

4.40 Aus der Aufgabenstellung ergibt sich mit der Verteilungsfunktion der Exponentialverteilung mit dem noch unbekannten Parameter α

$$P(X<140\,\text{h}) = 75\% = 1-\mathrm{e}^{-\alpha\cdot 140\,\text{h}}, \quad \text{d. h.} \quad \mathrm{e}^{-\alpha\cdot 140\,\text{h}} = 0.25 \quad \text{und} \quad \alpha = -\frac{\ln 0.25}{140\,\text{h}}.$$

Mit dem ermittelten Parameter α ergibt sich die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$P(X>250\,\text{h}) = 1-P(X\le 250\,\text{h}) = 1-\left(1-\mathrm{e}^{\ln 0.25\,\frac{250}{140}}\right) \approx 0.0841.$$

4.41 **a**) Aus der Aufgabenstellung entnimmt man mit der Verteilungsfunktion der Exponentialverteilung mit dem noch unbekannten Parameter λ

$$P(T<H) = 0.5 = 1-\mathrm{e}^{-\lambda H} = 1-\mathrm{e}^{-140\lambda}, \quad \text{d. h.} \quad 0.5 = \mathrm{e}^{-140\lambda} \quad \text{und somit} \quad \lambda = -\ln 0.5/140.$$

b) Mit dem berechneten Parameter λ ergibt sich

$0.095 = P(T < t_0) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t_0}$, d. h. $0.05 = \mathrm{e}^{-\lambda t_0}$ und somit die gesuchte Zeit

$t_0 = -\dfrac{\ln 0.05}{\lambda} = \dfrac{\ln 0.05}{\ln 0.5} \cdot 140 \approx 605.06$ [Tage].

4.42 Bei der Exponentialverteilung mit dem Parameter α tritt im Schnitt ein Ereignis im Zeitintervall $1/\alpha$ auf. Die Zufallgröße X ist der tatsächliche Abstand zwischen zwei Ereignissen, und es ist

$$\begin{aligned} P(X \geq 1) &= P(\text{Während des Abstandes 1 tritt kein Ereignis ein}) \\ &= P(\text{Abstand zwischen zwei Ereignissen} \geq 1) \\ &= 1 - P(\text{Abstand zwischen zwei Ereignissen} < 1) \\ &= 1 - P(X < 1) = \mathrm{e}^{-\alpha}. \end{aligned}$$

Bei der Poissonverteilung mit dem Parameter α treten im Schnitt α Ereignisse im Zeitintervall 1 auf. Die Zufallsvariable X ist die tatsächliche Anzahl der Ereignisse in diesem Zeitintervall, und es ist

$$P(X = 0) = P(\text{Anzahl der Ereignisse im Zeitintervall } \alpha \text{ ist gleich } 0) = \mathrm{e}^{-\alpha}.$$

Damit ist die Wahrscheinlichkeit, dass im Zeitintervall 1 kein Ereignis auftritt, sowohl bei Zugrundelegung einer Exponentialverteilung (im Schnitt ein Ereignis im Zeitintervall $1/\alpha$) als auch einer Poissonverteilung, (im Schnitt α Ereignisse im Zeitintervall 1), gleich und beträgt $\mathrm{e}^{-\alpha}$.

4.43 Die Verteilungsfunktion der Zeit X für die Durchsicht und Reparatur eines Baggers ist

$$F(x) = P(X < x) = 1 - \mathrm{e}^{-x/(1)},\ x \text{ [d]}. \tag{2.3}$$

a) Aus der Verteilungsfunktion (2.3) ergibt sich die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$P(X < 0.5) = 1 - \mathrm{e}^{-0.5} \approx 0.39346 = 39.34\%$.

b) Mit der Verteilungsfunktion (2.3) ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$P(1 < X < 2) = P(X < 2) - P(X < 1) = \left(1 - \mathrm{e}^{-2}\right) - \left(1 - \mathrm{e}^{-1}\right) = \mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{-2} \approx 0.36787 - 0.13533 = 0.23254 = 23.25\%$.

c) Die Durchsicht und Reparatur eines Baggers ist mit der Wahrscheinlichkeit $p = 95\%$ nach der Zeit x_p beendet, wenn gilt

$F(x_p) = P(X < x_p) = 1 - \mathrm{e}^{-x_p} = p$.

Umstellen nach der gesuchten Zeit x_p ergibt

$\mathrm{e}^{-x_p} = 1 - p$, *d. h.* $x_p = -\ln(1 - p)$.

Für $p = 95\%$ ergibt sich $x_p \approx 2.9957$ [d]. Es dauert mit 95%-iger Wahrscheinlichkeit höchstens drei Tage, bis die Durchsicht und Reparatur eines Baggers beendet ist.

4.44 **a**) Die Zufallsvariable X ist die tatsächliche Dauer der Reparatur von einer Schleifmaschine. Wenn die Zeit zur Reparatur von einer Schleifmaschine höchstens 1/7 Tag beträgt, so beträgt die Zeit zur Reparatur von sieben Schleifmaschinen höchstens einen Tag. Für die Wahrscheinlichkeit, dass die tatsächliche Dauer der Reparatur von einer Schleifmaschine höchstens 1/7 Tag beträgt, gilt

$P(X < 1/7\mathrm{d}) = 1 - \mathrm{e}^{-5/7} \approx 0.51 = 51\%$.

b) Wenn x die Mindestdauer der Reparatur von einer Schleifmaschine ist, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass die tatsächliche Dauer der Reparatur von einer Schleifmaschine kleiner x ist,

$0.9 = P(X \geq x) = 1 - P(X < x) = \mathrm{e}^{-5x}$, d. h. $x = -\ln 0.9/5 \approx 0.021$.

Die Reparatur einer Schleifmaschine dauert mit einer Wahrscheinlichkeit von 90% mindestens 0.021 Tage, das sind bei einem Arbeitstag von acht Stunden ca. 0.16 Stunden (ca 10 Minuten).

c) Wenn x die Höchstdauer der Reparatur von einer Schleifmaschine ist, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass die tatsächliche Dauer der Reparatur von einer Schleifmaschine größer oder gleich x ist,

$0.9 = P(X < x) = 1 - \mathrm{e}^{-5x}$, d. h. $x = -\ln 0.1/5 \approx 0.46$.

Die Reparatur einer Schleifmaschine dauert mit einer Wahrscheinlichkeit von 90% höchstens 0.46 Tage, die Reparatur von drei Schleifmaschinen mit einer Wahrscheinlichkeit von 90% höchstens dreimal solange, das sind ca. 1.38 Tage, d. h. bei einem Arbeitstag von acht Stunden ca. 11 Stunden.

Grenzverteilungssätze

4.45 Nach dem Grenzverteilungssatz Binomial-Poisson ergibt sich mit dem Parameter $\lambda = np = 0.2 < 10$

$P(X=0) = \frac{0.2^0}{0!}\mathrm{e}^{-0.2} \approx 0.8187.$

4.46 Die Anzahl X der fehlerhaften Schaltelemente ist binomialverteilt mit $n = 100$, $p = 0.02$. Nach dem Grenzverteilungssatz Binomial-Poisson kann auch Poissonverteilung mit dem Parameter $\lambda = np = 2 < 10$ zugrunde gelegt werden.

a) Mit der Binomialverteilung ist $P(X=0) = \binom{100}{0}0.98^{100} \approx 0.1326.$

Mit der Poissonverteilung ist $P(X=0) = \frac{2^0}{0!}\mathrm{e}^{-2} \approx 0.1353.$

b) Mit der Binomialverteilung ist

$$\begin{aligned} P(X \leq 3) &= P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) \\ &= \tbinom{100}{0}0.98^{100} + \tbinom{100}{1}0.98^{99}0.02^1 + \tbinom{100}{2}0.98^{98}0.02^2 + \tbinom{100}{3}0.98^{97}0.02^3 \\ &\approx 0.1326 + 0.2706 + 0.2734 + 0.1823 = 0.8588. \end{aligned}$$

Mit der Poissonverteilung ist bei wesentlich weniger Rechenaufwand

$$\begin{aligned} P(X \leq 3) &= P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) \\ &= \mathrm{e}^{-2}\left(1 + 2 + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!}\right) \approx 0.8571. \end{aligned}$$

4.47 Die Anzahl X der defekten Glühlampen ist binomialverteilt mit $n = 100$, $p = 0.03$. Nach dem Grenzverteilungssatz Binomial-Poisson kann auch Poissonverteilung mit dem Parameter $\lambda = np = 3 < 10$ zugrunde gelegt werden. Die gesuchten Wahrscheinlichkeiten sind in der folgenden Tabelle angegeben:

	$P(X=0)$	$P(X=1)$	$P(X=2)$	$P(X=3)$	$P(X=4)$	$P(X=5)$
B	$\binom{100}{0}0.97^{100}$ 0.0475	$\binom{100}{1}.97^{99}.03^1$ 0.1471	$\binom{100}{2}.97^{98}.03^2$ 0.2252	$\binom{100}{3}.97^{97}.03^3$ 0.2275	$\binom{100}{4}.97^{96}.03^4$ 0.1706	$\binom{100}{5}.97^{95}.03^5$ 0.1013
P	$\frac{3^0}{0!}\mathrm{e}^{-3}$ 0.0497	$\frac{3^1}{1!}\mathrm{e}^{-3}$ 0.1493	$\frac{3^2}{2!}\mathrm{e}^{-3}$ 0.2240	$\frac{3^3}{3!}\mathrm{e}^{-3}$ 0.2240	$\frac{3^4}{4!}\mathrm{e}^{-3}$ 0.1680	$\frac{3^5}{5!}\mathrm{e}^{-3}$ 0.1008

4.48 Die Anzahl X der gezogenen roten Murmeln ist binomialverteilt mit $n = 8$ (Anzahl der Züge), $p = 1/8$ (Wahrscheinlichkeit, dass unter acht Murmeln die einzige rote gezogen wird). Nach dem Grenzverteilungssatz Binomial-Poisson kann auch Poissonverteilung mit dem Parameter $\lambda = np = 1 < 10$ zugrunde gelegt werden.

a) Mit der Binomialverteilung ist $P(X=3) = \binom{8}{3}\left(\frac{1}{8}\right)^3\left(\frac{7}{8}\right)^5 \approx 0.05610.$

b) Mit der Poissonverteilung ist $P(X=3) = \frac{1^3}{3!}\mathrm{e}^{-1} \approx 0.06131.$

4.49 Die Anzahl X der bei einem Unfall Ertrunkenen pro Jahr ist binomialverteilt mit $n = 200\,000$ (Anzahl der Einwohner), $p = 0.000\,003$ (Wahrscheinlichkeit, dass ein Einwohner pro Jahr ertrinkt). Die Berechnung der gesuchten Wahrscheinlichkeiten, insbesondere e) und f), ist relativ aufwendig. Nach dem Grenzverteilungssatz Binomial-Poisson kann auch Poissonverteilung mit dem Parameter $\lambda = np = 6 < 10$ zugrunde gelegt werden. Die gesuchten Wahrscheinlichkeiten sind

a) $P(X=0) = \frac{6^0}{0!}\mathrm{e}^{-6} \approx 0.00248,$ **b)** $P(X=2) = \frac{6^2}{2!}\mathrm{e}^{-6} \approx 0.04462$

c) $P(X=6) = \frac{6^6}{6!}\mathrm{e}^{-6} \approx 0.1606,$ **d)** $P(X=8) = \frac{6^8}{8!}\mathrm{e}^{-6} \approx 0.1033,$

e)
$$\begin{aligned} P(4 \leq X \leq 8) &= P(X=4) + P(X=5) + P(X=6) + P(X=7) + P(X=7) \\ &= \mathrm{e}^{-6}\left(\frac{6^4}{4!} + \frac{6^5}{5!} + \frac{6^6}{6!} + \frac{6^7}{7!} + \frac{6^8}{8!}\right) \approx 0.6960, \end{aligned}$$

f)
$$\begin{aligned} P(X < 3) &= P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) \\ &= \mathrm{e}^{-6}\left(\frac{6^0}{0!} + \frac{6^1}{1!} + \frac{6^2}{2!}\right) \approx 0.062. \end{aligned}$$

4.50 Die Anzahl X der Ausschussstücke ist binomialverteilt mit $n = 40\,000$ (Anzahl der Erzeugnisse der Lieferung), $p = 0.2$ (Wahrscheinlichkeit, dass ein Erzeugnis Ausschuss ist). Die Poissonverteilung kann wegen $np = 8\,000 > 10$ nicht zugrunde gelegt werden. Nach dem Grenzverteilungssatz Binomial-Normal kann die Normalverteilung $N(np, np(1-p)) = N(8\,000, 6\,400)$ zugrunde gelegt werden. Die Voraussetzung $np(1-p) = 6\,400 > 9$ ist erfüllt.

Mit der Binomialverteilung ist

$$P(X = 8\,240) = \binom{40\,000}{8\,240}\left(\frac{1}{5}\right)^{8\,240}\left(\frac{4}{5}\right)^{40\,000-8\,240} \approx 0.000\,056\,640\,9.$$

Wegen des Binomialkoeffizienten ist diese Zahl allerdings „schwer" zu berechnen.

Mit der Normalverteilung ist bei Verwendung des Erwartungswertes $\mu = np = 8\,000$ und der Standardabweichung $\sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{6\,400} = 80$ sowie der Stetigkeitskorrektur

$$P(8\,239.5 < X < 240.5) = P(X < 8\,240.5) - P(X < 8\,239.5) = \Phi_S\left(\frac{8\,240.5 - 8\,000}{80}\right) - \Phi_S\left(\frac{8\,239.5 - 8\,000}{80}\right) \approx 0.000\,055\,401.$$

Bemerkung: Der Wert der Dichtefunktion dieser Normalverteilung ist

$$\varphi(8\,240, 8\,000, 80) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(8\,240-\mu)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{80\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(8\,240-8\,000)^2}{2\cdot 6\,400}} \approx 0.000\,055\,398\,1.$$

4.51 Die Anzahl X des Eintritts des Ereignisses A ist binomialverteilt mit 1 000 (Anzahl der Versuche), $p = 0.5$ (Wahrscheinlichkeit, dass das Ereignis A eintritt). Die Poissonverteilung kann wegen $np = 500 > 10$ nicht zugrunde gelegt werden. Nach dem Grenzverteilungssatz Binomial-Normal kann Normalverteilung $N(np, np(1-p)) = N(500, 250)$ zugrunde gelegt werden. Die Voraussetzung $np(1-p) = 250 > 9$ ist erfüllt. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} P(400 \le X \le 600) &= P(X \le 600) - P(X < 400) \\ &= \Phi_S\left(\frac{600-500}{\sqrt{250}}\right) - \Phi_S\left(\frac{400-500}{\sqrt{250}}\right) = 2\Phi_S\left(\frac{100}{\sqrt{250}}\right) - 1 \approx 1. \end{aligned}$$

Daher kann mit an Sicherheit grenzender Wahrscheinlichkeit behauptet werden, dass das Ereignis A bei 1000 unabhängigen Versuchen mindestens 400 Mal und höchstens 600 Mal eintritt.

4.52 Die Anzahl X der unbrauchbaren Bauteile eines Postens ist binomialverteilt mit n (Anzahl der Bauteile im Posten) und $p = 0.1$ (Wahrscheinlichkeit, dass ein Bauteil unbrauchbar ist). Unter Zugrundelegung der Normalverteilung mit $\mu = np$ und $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$ ergibt sich aus der Aufgabenstellung

$$0.6 = P(X > 9) = 1 - P(X \le 9) = 1 - \Phi_S\left(\frac{9 - 0.1n}{\sqrt{0.09n}}\right), \qquad \text{d. h.}$$

$$\Phi_S\left(\frac{0.1n - 9}{\sqrt{0.09n}}\right) = 0.6 \qquad \text{und} \qquad \frac{0.1n - 9}{\sqrt{0.09n}} \approx 0.253.$$

Die sich daraus ergebende quadratische Gleichung bezüglich n hat die positive Lösung $n \approx 91.4$. Ein Posten mit 92 Bauteilen wird mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.6% abgelehnt (hat mindestens neun unbrauchbare Bauteile).

4.53 Die Anzahl X der in der Zeit t ausgefallenen Kondensatoren ist binomialverteilt mit $n = 100$ (Anzahl der Kondensatoren insgesamt) und $p = 0.5$ (Wahrscheinlichkeit, dass ein Kondensator ausfällt). Nach dem Grenzverteilungssatz Binomial-Normal kann auch Normalverteilung $N(np, np(1-p)) = N(50, 25)$ zugrunde gelegt werden. Die Voraussetzung $np(1-p) = 25 > 9$ ist erfüllt.

a) Mit der Binomialverteilung ist

$$P(X \ge 60) = \sum_{k=60}^{100}\binom{100}{k}0.5^k 0.5^{100-k} \qquad \text{und} \qquad P(45 \le X \le 55) = \sum_{k=45}^{55}\binom{100}{k}0.5^k 0.5^{100-k}.$$

Diese Zahlen sind aufwändig zu berechnen.

Mit der Normalverteilung ist mit $\mu = np = 50$ und $\sigma = \sqrt{np(1-p)} = 5$

$$P(X \ge 60) = 1 - P(X < 60) = 1 - \Phi_S\left(\frac{60-50}{5}\right) \approx 0.02275 \qquad \text{und}$$

$$P(45 \le X \le 55) = P(X \le 55) - P(X < 45) \approx \Phi_S(1) - \Phi_S(-1) = 2\Phi_S(1) - 1 \approx 0.68268.$$

b) Die Anzahl der Kondensatoren, die mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% in der Zeit t ausfallen, sei x. Aus der Aufgabenstellung ergibt sich

$$0.95 = P(X < x) = \Phi_S\left(\frac{x-50}{5}\right) \qquad \text{und daraus} \qquad \frac{x-50}{5} \approx 1.645, \text{ d. h. } x = 50 + 1.645 \cdot 5 \approx 58.$$

Daher sollten 58 Kondensatoren in Reserve gehalten werden.

4.54 Die Anzahl X der brauchbaren Gehäuse ist binomialverteilt mit n (Anzahl der Gehäuse insgesamt) und $p = 0.9$ (Wahrscheinlichkeit, dass ein Gehäuse brauchbar ist). Nach dem Grenzverteilungssatz Binomial-Normal kann auch Normalverteilung $N(np, np(1-p)) = N(0.9n, 0.09n)$ zugrunde gelegt werden. Die Voraussetzung $np(1-p) = 0.09n > 9$ ist erfüllt, wenn $n > 100$ ist. Unter Zugrundelegung der Normalverteilung mit $\mu = np = 0.9n$ und $\sigma = \sqrt{np(1-p)} = 0.09n$ ergibt sich aus der Aufgabenstellung

$$0.99 = P(X \geq 100) = 1 - P(X < 100) = 1 - \Phi_S\left(\frac{100-\mu}{\sigma}\right), \text{ d. h. } \frac{100-\mu}{\sigma} \approx 2.33.$$

Die sich daraus ergebende quadratische Gleichung bezüglich n lautet

$(100 - 0.9n)^2 = 2.33^2 \cdot 0.09n.$

Sie hat die Lösungen $n_1 \approx 119.56$ und $n_2 \approx 103.26$. Es müssen mindestens 120 Gehäuse hergestellt werden, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von 99% darunter 100 brauchbare sind, einen durchschittlichen Ausschuss von 10% vorausgesetzt.

4.55 Die Anzahl X der erhaltenen „Kopf“ ist binomialverteilt mit $n = 10$ (Anzahl der Würfe insgesamt) und $p = 0.5$ (Wahrscheinlichkeit, dass bei einem Wurf „Kopf“ erscheint). Nach dem Grenzverteilungssatz Binomial-Normal kann die Normalverteilung $N(np, np(1-p)) = N(5, 2.5)$ eigentlich nicht zugrunde gelegt werden, denn die Voraussetzung $np(1-p) = 2.5 > 4$ ist nicht erfüllt.

a) Mit der Binomialverteilung ist

$$P(3 \leq X \leq 6) = \sum_{k=3}^{6} \binom{10}{k} 0.5^k 0.5^{10-k} = 0.5^{10}\left(\binom{10}{3} + \binom{10}{4} + \binom{10}{5} + \binom{10}{6}\right) \approx 0.7734.$$

b) Mit der Normalverteilung ist

$$\begin{aligned} P(3 \leq X \leq 6) &= P(X \leq 6) - P(X < 3) \approx P(X < 7) - P(X < 3) \\ &= \Phi_S\left(\frac{7-5}{\sqrt{2.5}}\right) - \Phi_S\left(\frac{3-5}{\sqrt{2.5}}\right) = 2\Phi_S\left(\frac{2}{\sqrt{2.5}}\right) - 1 \approx 0.7923. \end{aligned}$$

Bemerkung: Besser ist die Näherung

$$\begin{aligned} P(3 \leq X \leq 6) &= P(X \leq 6) - P(X < 3) \approx P(X < 6.5) - P(X < 3) \\ &= \Phi_S\left(\frac{6.5-5}{\sqrt{2.5}}\right) - \Phi_S\left(\frac{3-5}{\sqrt{2.5}}\right) \approx 0.7718. \end{aligned}$$

Bemerkung: Die Poissonverteilung mit dem Parameter $\lambda = np = 5 < 10$ kann wegen $n = 10 < 1\,500p = 750$ nicht zugrunde gelegt werden. Es ergäbe sich

$$P(3 \leq X \leq 6) = \mathrm{e}^{-5} \sum_{k=3}^{6} \frac{5^k}{k!} \approx 0.6375.$$

4.56 Die Anzahl X der richtig erratenen Antworten ist binomialverteilt mit n (Anzahl der Antworten insgesamt) und $p = 0.5$ (Wahrscheinlichkeit, dass eine Antwort richtig erraten wird). Nach dem Grenzverteilungssatz Binomial-Normal kann die Normalverteilung $N(np, np(1-p))$ zugrunde gelegt werden.

a) Mit $n = 20$ ergibt sich nach der Normalverteilung mit $\mu = np = 10$ und $\sigma^2 = np(1-p) = 5 > 4$ als brauchbarer Näherung

$$P(X \geq 12) = 1 - P(X < 12) = 1 - \Phi_S\left(\frac{12-10}{\sqrt{5}}\right) \approx 0.187.$$

Bemerkung: Besser ist folgende Näherung:

$$P(X \geq 12) \approx 1 - P(X < 11.5) = 1 - \Phi_S\left(\frac{11.5-10}{\sqrt{5}}\right) \approx 0.2544.$$

b) Mit $n = 40$ ergibt sich nach der Normalverteilung mit $\mu = np = 20$ und $\sigma^2 = np(1-p) = 10 > 9$ als guter Näherung

$$P(X \geq 24) = 1 - P(X < 24) = 1 - \Phi_S\left(\frac{24-20}{\sqrt{10}}\right) \approx 0.1038.$$

Bemerkung: Besser ist folgende Näherung:

$$P(X \geq 24) \approx 1 - P(X < 23.5) = 1 - \Phi_S\left(\frac{23.5-20}{\sqrt{10}}\right) \approx 0.1357.$$

4.57 Die Zufallsvariable X_k bezeichnet die Abweichung des k-ten Sackes von der Normmasse, $k = 1, 2, \ldots, 117$. Da sie laut Aufgabenstellung als gleichverteilt angenommen wird, gilt

$E(X_k) = (-0.6 + 1.8)/2 = 0.6$ [kg] und $Var(X_k) = (1.8 - (-0.6))^2/12 = 0.48$ [kg^2].

Die Zufallsvariable Y_k ist die Füllmasse des k-ten Sackes. Wegen des linearen Zusammenhanges $Y = X + 25$ [kg]ist

$E(Y_k) = \mu = E(X_k) + 25 = 25.06$ [kg] und $Var(Y_k) = \sigma^2 = Var(X_k) = 0.48$ [kg^2].

Nach dem Zentralen Grenzwertsatz ist die Summe der Füllmassen aller $n = 117$ Säcke, d. h. die Zufallsvariable

$$\sum_{k=1}^{117} Y_k, \qquad \text{näherungsweise} \qquad N\left(n\mu, n\sigma^2\right) = N\,(117 \cdot 25.0.6, 117 \cdot 0.48)\text{-verteilt.}$$

Damit ergibt sich die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$P\left(\sum_{k=1}^{117} Y_k > 3000[\text{kg}]\right) = 1 - P\left(\sum_{k=1}^{117} Y_k \le 3000\ [\text{kg}]\right) = 1 - \Phi_S\left(\frac{3000 - 117 \cdot 25.0.6}{\sqrt{117 \cdot 0.48}}\right) \approx 1 - \Phi_S\,(0.640513) \approx 0.261.$$

Stichprobenfunktionen

4.58 Lage- und Streuungsmaßzahlen der angegebenen Stichprobenrealisierung sind in der folgenden **Tabelle d** zusammengefasst.

Tabelle 2.6 Maßzahlen der Stichprobe Wasserverbrauch

Lagemaßzahl	Wert	Streuungsmaßzahl	Wert
arithmetisches Mittel	87.6000	Spannweite	155
geometrisches Mittel	78.0258	mittlere Abweichung	25.7200
harmonisches Mittel	60.4913	empirische Varianz	1250.3600
quadratisches Mittel	94.1361	Standardabweichung	35.3604
Median	84.5	empirischer Variationskoeffizient	0.4036
0.1-Quantil	43	empirisches zentrales Moment 3-ter Ordnung	7086.9700
0.25-Quantil	65	empirisches zentrales Moment 4-ter Ordnung	$4.6985 \cdot 10^6$
0.5-Quantil	83	Schiefe	0.1731
Modalwert	83, 99	Kurtosis	3.3300

4.59 Stichprobenverteilung der Summe

Die Stichprobenfunktion X ist die Summe der zufälligen Gewichte X_i der $n = 25$ Pakete, $i = 1, 2, \ldots, 25$: $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

Dabei sind alle Zufallsvariablen X_i $N(\mu, \sigma^2)$-verteilt mit $\mu = 300$ lb und $\sigma = 50$ lb. Daher ist X $N(n\mu, n\sigma^2)$-verteilt. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ergibt sich als

$$\begin{aligned} P(X > 8200) &= 1 - P(X \le 8200) = 1 - \Phi_S\left(\frac{8200 - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\right) = 1 - \Phi_S\left(\frac{8200 - 7500}{250}\right) \\ &= 1 - \Phi_S(2.8) \approx 1 - 0.99744 = 0.00256. \end{aligned}$$

4.60 Stichprobenverteilung von Anteilen

Die Zufallsvariable X ist die Anzahl defekter Glühlampen unter $n = 100$ Glühlampen in einem Paket. Sie ist binomialverteilt mit $p = 0.05$. Nach dem Grenzverteilungssatz Binomial-Normal kann die Normalverteilung $N(np, np(1-p))$ mit $\mu = np = 5$ und $\sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{4.75} \approx 2.18$ zugrunde gelegt werden. Wegen $np(1-p) = 4.75 > 4$ handelt es sich um eine brauchbare Näherung.

a) Die Wahrscheinlichkeit, dass in einem Paket weniger als 90 intakte Glühlampen enthalten sind, ist

$$P(X > 10) = 1 - P(X \le 10) \approx 1 - P(X < 9.5) = 1 - \Phi_S\left(\frac{9.5 - 5}{2.18}\right) \approx 1 - \Phi_S\,(2.0642) = 1 - 0.9805 = 0.0195.$$

Bei 1000 Paketen ist daher die Anzahl derer mit weniger als 90 intakten Glühlampen ca. 19.

b) Die Wahrscheinlichkeit, dass in einem Paket 98 oder mehr intakte Glühlampen enthalten sind, ist

$$P(X \leq 2) \approx P(X < 2.5) = \Phi_S\left(\frac{2.5-5}{2.18}\right) = \Phi_S\,(1.1468) \approx 1 - 0.8741 = 0.1259.$$

Von 1000 Paketen ist daher die Anzahl derjenigen mit 98 oder mehr intakten Glühlampen ca. 125.

4.61 Stichprobenverteilung von Differenzen

Die Zahl der Punkte eines Studenten ist $N(\mu, \sigma^2)$-verteilt mit $\mu = 72$ und $\sigma = 8$. Das arithmetische Mittel der Punkte einer Gruppe von n Studenten ist $N(\mu, \sigma^2/n)$-verteilt. Das Punktemittel $\overline{X}_A$ der Gruppe mit $n_A = 28$ Studenten ist daher $N(\mu, \sigma^2/n_A)$-verteilt.

Das Punktemittel $\overline{X}_A$ der Gruppe mit $n_B = 36$ Studenten ist daher $N(\mu, \sigma^2/n_B)$-verteilt.

Die Differenz der Punktemittel $\overline{X}_A - \overline{X}_B$ ist

$$N\left(\mu-\mu, \sigma^2/n\left(\frac{1}{n_A}+\frac{1}{n_B}\right)\right) = N\left(0, 64\cdot\left(\frac{1}{28}+\frac{1}{36}\right)\right) \approx N(0, 4.063)\text{-verteilt.}$$

a) Es gilt

$$\begin{aligned}
P\left(\left|\overline{X}_A - \overline{X}_B\right| < 3\right) &= P\left(-3 < \overline{X}_A - \overline{X}_B < 3\right)\\
&\approx P(\overline{X}_A - \overline{X}_B < 2.5) - P(\overline{X}_A - \overline{X}_B < -2.5)\\
&\approx 2\Phi_S\left(\frac{2.5}{\sqrt{4.063}}\right) - 1 = 2\Phi_S\,(1.24) - 1 \approx 0.784
\end{aligned}$$

Damit ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$P\left(\left|\overline{X}_A - \overline{X}_B\right| \geq 3\right) = 1 - P\left(\left|\overline{X}_A - \overline{X}_B\right| < 3\right) \approx 0.216.$$

b) Es gilt

$$\begin{aligned}
P\left(\left|\overline{X}_A - \overline{X}_B\right| < 6\right) &= P\left(-6 < \overline{X}_A - \overline{X}_B < 6\right)\\
&\approx P(\overline{X}_A - \overline{X}_B < 5.5) - P(\overline{X}_A - \overline{X}_B < -5.5)\\
&\approx 2\Phi_S\left(\frac{5.5}{\sqrt{4.063}}\right) - 1 = 2\Phi_S\,(2.728) - 1 \approx 0.9936.
\end{aligned}$$

Damit ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$P\left(\left|\overline{X}_A - \overline{X}_B\right| \geq 6\right) = 1 - P\left(\left|\overline{X}_A - \overline{X}_B\right| < 6\right) \approx 0.0064.$$

c) Es gilt

$$\begin{aligned}
P\left(2 \leq \left|\overline{X}_A - \overline{X}_B\right| \leq 5\right) &= P\left(2 \leq \overline{X}_A - \overline{X}_B \leq 5 \;\cup\; -5 \leq \overline{X}_A - \overline{X}_B \leq -2\right)\\
&= 2P\left(2 \leq \overline{X}_A - \overline{X}_B \leq 5\right)\\
&\approx 2\left(\Phi_S\left(\frac{5.5}{\sqrt{4.063}}\right) - \Phi_S\left(\frac{1.5}{\sqrt{4.063}}\right)\right)\\
&\approx 2\,(\Phi_S(2.2781) - \Phi_S(0.744)) \approx 2\,(0.9972 - 0.7704) = 0.4536.
\end{aligned}$$

4.62 Stichprobenverteilung einer Linearkombination von Zufallsvariablen

a) Sei die Zufallsvariable X die Punktzahl eines zufällig ausgewählten Studenten und x_B die minimale Punktzahl der besten 20% der Studenten. Dann ist laut Aufgabenstellung X normalverteilt mit $\mu = 72$ und $\sigma = 8$, und es gilt

$$0.2 = P(X \geq x_B) = 1 - P(X < x_B) = 1 - \Phi_S\left(\frac{x_B - 72}{8}\right) \text{ und somit}$$

$$\frac{x_B - 72}{8} = \Phi_S^{-1}(0.8) \approx 0.842, \text{ d. h. } x_B \approx 0.842\sigma + \mu = 0.842\cdot 8 + 72 = 78.736.$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass die Punktzahl eines zufällig ausgewählten Studenten mindestens 79 Punkte beträgt, ist gleich $0.2 = 20\%$.

b) Die minimale Punktzahl X_B der besten 20% der $n = 100$ Studenten ist eine Zufallsvariable, die sich (siehe a)) als Linearkombination der Zufallsvariablen μ (Punktemittel) und σ (Standardabweichung) wie folgt berechnet:

$X_B = \Phi_S^{-1}(1-0.2)\sigma + \mu.$

Dabei ist μ $N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$-verteilt und σ ist $N\left(\sigma, \frac{\sigma^2}{2n}\right)$-verteilt. Daher ist X_B

$$N\left(\mu+\Phi_S^{-1}(1-0.2)\sigma, \frac{\sigma^2}{n}+\left(\Phi_S^{-1}(1-0.2)\right)^2\frac{\sigma^2}{2n}\right) = N\left(72+0.842\cdot 8, \frac{8^2}{100}+0.842^2\cdot\frac{8^2}{200}\right) \approx N(78.736, 0.867)\text{-verteilt.}$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist

$$P(X_B < 76) = \Phi_S\left(\frac{76-78.736}{0.867}\right) \approx 1-\Phi_S(3.156) \approx 1-0.9991 = 0.0009.$$

4.63 Stichprobenverteilung der Differenzen von Anteilen

Die Zufallsvariable X ist die Anzahl der Stimmen für den Kandidaten, wobei die Wahrscheinlichkeit, dass eine Stimme für den Kandidaten gestimmt hat, $p = 0.65$ beträgt. Sie ist binomialverteilt. Der Anteil $\overline{X}_n = X/n$ der Stimmen für den Kandidaten unter $n = 200$ Stimmen ist eine

$$N\left(p, \frac{p(p-1)}{n}\right) = N(0.65, \frac{0.65\cdot 0.35}{200}) \approx N(0.65, 0.03372^2)\text{-verteilte}$$

Zufallsvariable. Die Stichprobe A hat daher einen Anteil X_A der Stimmen für den Kandidaten mit dieser Verteilung, die Stichprobe B hat einen Anteil X_B der Stimmen für den Kandidaten mit derselben Verteilung. Die Differenz der Anteile $X_A - X_B$ ist eine $N(0, 2\frac{p(p-1)}{n})$-verteilte Zufallsvariable, und es gilt für die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$\begin{aligned} P(|X_A - X_B| > 0.1) &= P(X_A - X_B > 0.1 \ \cup \ X_A - X_B < -0.1) = 2\left(1-P(X_A-X_B < 0.1)\right) \\ &= 2\left(1-\Phi_S\left(\frac{0.1}{\sqrt{2}0.03372}\right)\right) = 2\left(1-\Phi_S\left(\frac{0.1}{0.0477}\right)\right) \\ &= 2\left(1-\Phi_S(2.0964)\right) \approx 2(1-0.9817) \approx 0.0366. \end{aligned}$$

Bemerkung: Die Anzahl der Wähler, die unter $n = 200$ Wählern für den Kandidaten gestimmt haben, ist nach dem Grenzverteilungssatz Binomial-Normal wegen $np(1-p) = 45.5 > 9$ annähernd normalverteilt mit $\mu = np = 130$ und $\sigma = \sqrt{np(1-p)} \approx 6.75$.

Konfidenzschätzungen

4.64 Gegeben ist der Stichprobenumfang $n = 10$ und die Schätzwerte $\overline{x} = 2$ μm und $s = 2.4$ μm. Die Irrtumswahrscheinlichkeit beträgt $\alpha = 0.1$. Gesucht ist ein zweiseitiges Konfidenzintervall für den Erwartungswert, da die Wellendurchmesser sowohl größer als auch kleiner als die Mitte des Toleranzgebietes sein können. Der Tabelle der Quantile der t - Verteilung entnimmt man $t_{n-1,1-\alpha/2} = t_{9,0.95} = 1.833$. Das gesuchte Konfidenzintervall ist

$$KI(\overline{X}_{10}) = \left(2 - \frac{1.833}{\sqrt{10}}\cdot 2.4,\ 2+\frac{1.833}{\sqrt{10}}\cdot 2.4\right) \approx (0.6088, 3.3911)\ [\mu\text{m}].$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 90% gehört der Erwartungswert der Wellendurchmesser diesem Intervall an.

4.65 Gegeben ist der Stichprobenumfang $n = 10$ und die Schätzwerte $\overline{x} = 10.02$ mm und $s = 0.024$ mm. Die Irrtumswahrscheinlichkeit beträgt $\alpha = 0.1$.

Gesucht ist ein zweiseitiges Konfidenzintervall für den Erwartungswert bei unbekannter Varianz, da die Innendurchmesser der Buchsen sowohl größer als auch kleiner als die Mitte des Toleranzgebietes sein können und für die Varianz lediglich ein Schätzwert vorliegt. Der Tabelle der Quantile der t - Verteilung entnimmt man $t_{n-1,1-\alpha/2} = t_{9,0.995} = 3.25$. Das gesuchte Konfidenzintervall ist

$$KI(\overline{X}_{10}) = \left(10.02 - \frac{3.25}{\sqrt{10}}\cdot 0.024,\ 10.02+\frac{3.25}{\sqrt{10}}\cdot 0.024\right) \approx (9.9953, 10.0446)\ [\text{mm}].$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 99% gehört der Erwartungswert der Innendurchmesser der Buchsen diesem Intervall an.

Gesucht ist ein zweiseitiges Konfidenzintervall für die Varianz bei unbekanntem Erwartungswert, da für diesen lediglich ein Schätzwert vorliegt. Die Quantile $\chi^2_{n-1,1-\alpha/2} = \chi^2_{9,0.005} = 23.6$ und $\chi^2_{n-1,\alpha/2} = \chi^2_{9,0.995} = 1.73$ liest man aus der Tabelle ab. Das gesuchte Konfidenzintervall ist

$$\begin{aligned} KI(S_{10}^2) &= \left(\frac{9}{23.6}\cdot 0.024^2,\ \frac{9}{1.73}\cdot 0.024^2\right) \approx (0.0002196, 0.00299)\ [\text{mm}^2],\ \text{d. h.} \\ KI(S_{10}) &\approx (0.01482, 0.0547)\ [\text{mm}]. \end{aligned}$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 99% gehört die Standardabweichung der Innendurchmesser der Buchsen diesem Intervall an.

4.66 Gesucht ist ein zweiseitiges Konfidenzintervall für den Erwartungswert bei unbekannter Varianz, da die gemessenen Entfernungen zwischen zwei Punkten sowohl größer als auch kleiner als die Mitte des Toleranzgebietes sein können und für die Varianz lediglich ein Schätzwert vorliegt. Die geschätzte Standardabweichung ist $s = 0.014$ km. Der Tabelle der Quantile der t - Verteilung entnimmt man $t_{n-1,1-\alpha/2} = t_{24,0.995} = 2.797$. Das gesuchte Konfidenzintervall ist

$$\begin{aligned} KI(\overline{X}_{24}) &= \left(24.325 - \frac{2.797}{\sqrt{10}} \cdot 0.014,\ 24.325 + \frac{2.797}{\sqrt{10}} \cdot 0.014\right) \\ &\approx (24.325 - 0.0078, 24.325 + 0.0078) \approx (24.3172, 24.3328)\ [\text{km}]. \end{aligned}$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 99% gehört der Erwartungswert der Entfernung diesem Intervall an.

Gesucht ist ein zweiseitiges Konfidenzintervall für die Varianz bei unbekanntem Erwartungswert, da für diesen lediglich ein Schätzwert vorliegt. Die Quantile $\chi^2_{n-1,1-\alpha/2} = \chi^2_{24,0.005} = 9.886$ und $\chi^2_{n-1,\alpha/2} = \chi^2_{24,0.995} = 45.559$ liest man aus der Tabelle ab. Das gesuchte Konfidenzintervall ist

$$\begin{aligned} KI(S^2_{24}) &= \left(\frac{24}{45.559} \cdot 0.014^2,\ \frac{24}{9.886} \cdot 0.014^2\right) \approx (103.16, 475, 63)[10^{-6}\ \text{km}^2],\ \text{d. h.} \\ KI(S_{24}) &\approx (0.0106, 0.0218)\ [\text{km}]. \end{aligned}$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 99% gehört die Standardabweichung der Entfernung vom Erwartungswert diesem Intervall an.

4.67 X_A (X_B) ist die Zufallsvariable, die angibt, ob das Fernsehprogramms einem Erwachsenen (Jugendlichen) gefällt. Beide Zufallsvariablen sind $(0,1)$-verteilt. Ihre Stichprobenanteile (arithmetischen Mittel) sind annähernd normalverteilt:

$\overline{X}_A$: $N(\mu_A, \sigma_A^2)$ mit $\mu_A = p_A = 100//400 = 0.25$, $\sigma_A = \sqrt{p_A(1-p_A)/N_A} = \sqrt{0.25 \cdot 0.75/400} \approx 0.0216$.

$\overline{X}_B$: $N(\mu_B, \sigma_B^2)$ mit $\mu_B = p_B = 300//600 = 0.5$, $\sigma_B = \sqrt{p_B(1-p_B)/N_B} = \sqrt{0.5 \cdot 0.5/600} \approx 0.0204$.

Die Differenz der Anteile $\overline{X}_A - \overline{X}_B$ ist $N(\mu_A - \mu_B, \sigma_A^2 + \sigma_B^2)$-verteilt. Das Konfidenzintervall für die Differenz der Anteile $\overline{X}_A - \overline{X}_B$ zum Konfidenzniveau α ist damit

$K(\overline{X}_A - \overline{X}_B) = \left(p_A - p_B - z_{1-\alpha/2}\sqrt{\sigma_A^2 + \sigma_B^2}, p_A - p_B + z_{1-\alpha/2}\sqrt{\sigma_A^2 + \sigma_B^2}\right)$.

a) $K(\overline{X}_A - \overline{X}_B) = (0.25 - 1.96 \cdot 0.0296, 0.25 + 1.96 \cdot 0.0296) \approx (0.19, 0.31)$.

Der Unterschied in den Anteilen von Erwachsenen und Jugendlichen, denen das Fernsehprogramm gefällt, liegt mit 95% Wahrscheinlichkeit zwischen 19% und 31%.

b) $K(\overline{X}_A - \overline{X}_B) = (0.25 - 2.57 \cdot 0.0296, 0.25 + 2.57 \cdot 0.0296) \approx (0.17, 0.33)$.

Der Unterschied in den Anteilen von Erwachsenen und Jugendlichen, denen das Fernsehprogramm gefällt, liegt mit 99% Wahrscheinlichkeit zwischen 17% und 33%.

4.68 X ist die Zufallsvariable, die angibt, ob beim Werfen einer Münze Kopf erscheint. Sie ist $(0,1)$-verteilt. Ihr Stichprobenanteil (arithmetisches Mittel) ist annähernd normalverteilt:

$\overline{X}_n$: $N(\mu, \sigma^2)$ mit $\mu = p = \overline{X}_n = 24//40 = 0.6$, $\sigma = \sqrt{p(1-p)/n} = \sqrt{0.6 \cdot 0.4/40} \approx 0.0774596$.

Das Konfidenzintervall für den Anteil von Kopf bei einer großen Anzahl von Münzwürfen ist

$KI(\overline{X}_n) = (\mu - z_{1-\alpha/2}\sigma, \mu + z_{1-\alpha/2}\sigma)$.

a) $\alpha = 0.05$, $\alpha/2 = 0.025$, $KI(\overline{X}_n) = (0.6 - 1.96 \cdot 0.0774596, 0.6 + 1.96 \cdot 0.0774596) \approx (0.4481, 0.7518)$

b) $\alpha = 0.0027$, $\alpha/2 = 0.00135$, $KI(\overline{X}_n) = (0.6 - 3 \cdot 0.0774596, 0.6 + 3 \cdot 0.0774596) \approx (0.3676, 0.8323)$

4.69 X ist die Zufallsvariable, die angibt, ob beim Werfen des Geldstückes das Ergebnis „Wappen“ erscheint. Sie ist $(0,1)$-verteilt. Ihr Stichprobenanteil (arithmetisches Mittel) ist annähernd normalverteilt:

$\overline{X}_n$: $N(\mu, \sigma^2)$ mit $\mu = p = \overline{X}_n = 12\,012/24\,000 = 0.5005$, $\sigma = \sqrt{p(1-p)/n} = \sqrt{0.5005 \cdot 0.4995/24\,000} \approx 0.0032274$.

Das Konfidenzintervall zum Konfidenzniveau $\alpha = 0.01$ für den Anteil des Ergebnisses „Wappen“ bei einer großen Anzahl von Würfen des Geldstückes ist mit $z_{1-\alpha/2} = z_{0.995} \approx 2.576$

$KI(\overline{X}_n) = (\mu - z_{1-\alpha/2}\sigma, \mu + z_{1-\alpha/2}\sigma) = (0.5005 - 2.576 \cdot 0.0032274, 0.5005 + 2.576 \cdot 0.0032274) \approx (0.4921, 0.5088)$.

4.70 X_A (X_B) ist die Zufallsvariable, die die Lebensdauer einer Glühlampe der Marke A (B) angibt. Die mittlere Lebensdauer ist $\overline{X}_A$ ($\overline{X}_B$).

$\overline{X}_A$: $N(\mu_A, \sigma_A^2)$-verteilt mit $\mu_A = 1400$ h, $\sigma_A = 120/\sqrt{150}$ h,

$\overline{X}_B$: $N(\mu_B, \sigma_B^2)$-verteilt mit $\mu_B = 1200$ h, $\sigma_B = 80/\sqrt{200}$ h.

Die Differenz der mittleren Lebensdauer $\overline{X}_A - \overline{X}_B$ ist $N(\mu_A - \mu_B, \sigma_A^2 + \sigma_B^2)$-verteilt. Das Konfidenzintervall für die Differenz der Anteile $\overline{X}_A - \overline{X}_B$ zum Konfidenzniveau α ist damit

$K(\overline{X}_A - \overline{X}_B) = \left(\mu_A - \mu_B - z_{1-\alpha/2}\sqrt{\sigma_A^2 + \sigma_B^2}, \mu_A - \mu_B + z_{1-\alpha/2}\sqrt{\sigma_A^2 + \sigma_B^2}\right)$.

a) $\alpha = 0.05$, $z_{1-\alpha/2} = z_{0.975} \approx 1.96$, $K(\overline{X}_A - \overline{X}_B) \approx (200 - 1.96 \cdot 11.31, 200 + 1.96 \cdot 11.31) \approx (177.83, 222.16)$.

b) $\alpha = 0.01$, $z_{1-\alpha/2} = z_{0.995} \approx 2.576$, $K(\overline{X}_A - \overline{X}_B) \approx (200 - 2.576 \cdot 11.31, 200 + 2.576 \cdot 11.31) \approx (170.82, 229.17)$.

Prüfen von Hypothesen

4.71 $n = 49$, $\overline{x}_n = 1.7\%$, $s_n^2 = 0.5$, $s_n \approx 0.2236$

1. Nullhypothese H_0: $\mu_0 = 2\%$
2. $\alpha = 0.05$ zweiseitig (Abweichung des Kohlenstoffgehaltes ist nach oben bzw. unten möglich)
3. $U = T_{n-1} = \sqrt{n}\dfrac{\overline{X}_n - \mu_0}{S_n} = \sqrt{49}\dfrac{\overline{X}_n - 2}{0.2236}$ genügt einer t_{48}-Verteilung.
4. $K = (-\infty, -t_{48,0.975}) \cup (t_{48,0.975}, \infty) \approx (-\infty, -2.009) \cup (2.009, \infty)$
5. $U(\overline{X}_n = 1.7\%) \approx -0.3\sqrt{49}/0.2236 \approx -9.392 \in K$
6. H_0 ist abzulehnen, da $U(\overline{X}_n = 1.7\%) \in K$. Die Abweichung ist mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% signifikant, d. h. mit einer Wahrscheinlichkeit von 5% ist H_0 doch richtig.

4.72 $n = 25$, $s_n^2 = 0.65\ 10^{-4}$

1. Nullhypothese H_0: $\sigma_0^2 < 10^{-4}$
2. $\alpha = 0.05$ einseitig (für die Brauchbarkeit des Messgerätes darf σ^2 nur nach unten abweichen)
3. $U = Y_{n-1} = \sqrt{n}\dfrac{(n-1)\overline{S}_n^2}{\sigma_0^2} = \dfrac{24\overline{S}_n^2}{10^{-4}}$ genügt einer χ_{24}^2-Verteilung.
4. $K = \left(0, \chi_{24,0.95}^2\right) \approx (0, 13.8)$
5. $U(\overline{S}_n^2 = 0.65 \cdot 10^{-4}) = 24 \cdot 0.65 \cdot 10^{-4}/10^{-4} = 15.6 \notin K$
6. H_0 ist anzunehmen, da $U(\overline{S}_n^2 = 0.65 \cdot 10^{-4}) \notin K$. Mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% ist H_0 richtig (mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 5% richtig). Man darf auf die Brauchbarkeit des Messgerätes schließen.

4.73 $n = 100$, $\overline{x}_n = 7\%$

a)
1. Nullhypothese H_0: $p_0 \leq 5\%$
2. $\alpha = 0.05$ einseitig (wenn sich weniger als 5 von 100 Batterien als defekt erweisen, wird die Hypothese bestätigt)
3. $U = \sqrt{n}\dfrac{\overline{X}_n - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)}} = 10\dfrac{\overline{X}_n - 0.05}{\sqrt{0.05 \cdot 0.95}}$ genügt einer $N(0,1)$-Verteilung.
4. $K = (z_{0.95}, \infty) \approx (1.645, \infty)$
5. $U(\overline{X}_n = 7\%) \approx 0.02/0.02179 \approx 0.7168 \notin K$
6. H_0 ist anzunehmen, da $U(\overline{X}_n = 7\%) \notin K$. Mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% ist H_0 richtig (mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 5% richtig). Man darf den Angaben des Herstellers mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% trauen. Das Kontrollergebnis widerspricht den Angaben des Herstellers nicht signifikant.

b) Die minimale Anzahl der unbrauchbaren Batterien sei m. Damit Signifikanz mit der Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 0.01$ vorliegen soll, muss für die Prüfgröße gelten ($\overline{X}_n = m/n$)

$$U = \sqrt{n}\frac{\overline{X}_n - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)}} = 10\frac{m/100 - 0.05}{\sqrt{0.05 \cdot 0.95}} \in K$$

mit $K = (z_{0.99}, \infty) \approx (2.326, \infty)$. Umstellen der Ungleichung $U \geq 2.326$ nach m ergibt

$m > 5 + 2.326 \cdot 0.02179 \cdot 100 \approx 10.06,$

d. h. damit signifikanter Widerspruch mit der Irrtumswahrscheinlichkeit 0.01 vorliegt, müssten mindestens 11 Batterien unbrauchbar sein.

4.74 $n = 30$, $\overline{x}_n = 5/30 = 1/6\%$

1. Nullhypothese H_0: $p_0 \le 1/6$
2. α einseitig
3. $U = \sqrt{n}\dfrac{\overline{X}_n - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)}} = \sqrt{30}\dfrac{\overline{X}_n - 1/6}{\sqrt{1/6 \cdot 5/6}}$ genügt einer $N(0,1)$-Verteilung.
4. $K = (z_{1-\alpha}, \infty)$
5. $U(\overline{X}_n = 8/30) = \sqrt{30} \cdot 6(4/15 - 1/6)/\sqrt{5} \approx 1.4696$
6. H_0 ist mit der Irrtumswahrscheinlichkeit α anzunehmen, wenn gilt $U(\overline{X}_n = 8/30) \notin K$, d. h. $1.4696 < z_{1-\alpha}$. Es ergibt sich $1 - \alpha \approx 0.9279$, d. h. $\alpha \approx 0.0721$. Mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von ca. 7% beruht der Unterschied auf der Zufälligkeit der Stichprobenergebnisse.

4.75
1. Nullhypothese H_0: $\mu \le 40$ N/mm^2, die neue Materialzusammensetzung ist nicht besser die alte. (Die Ablehnung von H_0 bedeutet $\mu > 40$ N/mm^2, die neue Materialzusammensetzung ist besser als die alte).
2. Irrtumswahrscheinlichkeit für die Ablehnung von H_0 (Bevorzugung der neuen Materialzusammensetzung): $\alpha = 1\%$
   Da die Druckfestigkeit nur größer, nicht aber geringer werden darf, liegt eine einseitige Fragestellung vor.
3. Prüfgröße: $\overline{Z}_n = \sqrt{n}\dfrac{\overline{X}_n - \mu_0}{\sqrt{\sigma}} = \sqrt{25}\dfrac{\overline{X}_n - 40}{\sqrt{2}}$ genügt einer $N(0,1)$-Verteilung.
4. Kritischer Bereich: $K = (z_{1-\alpha}, \infty) = (z_{0.99}, \infty) = (2.326, \infty)$ [N/mm^2], dabei ist $z_{1-\alpha} = z_{0.99} \approx 2.326$ das 0.99-Quantil der $N(0,1)$-Verteilung.
5. $\overline{Z}_n > 2.326$ bedeutet $\overline{X}_n > 40 + 2 \cdot 2.326/5 \approx 40.9304$ [N/mm^2].
6. Ergibt der Test der 25 Balken eine mittlere Druckfestigkeit größer als 40.9304 N/mm^2, so ist die neue Materialzusammensetzung zu bevorzugen, andernfalls ist die alte weiter zu verwenden.

4.76 Zufallsvariable $X \in \{0, 1\}$, 1 - Anker defekt, 0 - Anker nicht defekt.

$N = 12\,000$ - Anzahl der Injektionsbohranker insgesamt, Sichprobenumfang $n = 3N/100 = 360$

1. Nullhypothese H_0: $p_0 \le 1/5$, der Anteil $\overline{X}_n$ der defekten Injektionsbohranker beträgt durchschnittlich nicht mehr als 1/5.
2. Irrtumswahrscheinlichkeit für die Ablehnung von H_0 (Anteil $\overline{X}_n$ der defekten Injektionsbohranker beträgt durchschnittlich mehr als 1/5): $\alpha = 0.05$
   Da der Anteil der defekten Anker nur geringer, nicht aber größer werden darf, liegt eine einseitige Fragestellung vor.
3. Prüfgröße: $\overline{Z}_n = \sqrt{n}\dfrac{\overline{X}_n - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)}} = \sqrt{360}\dfrac{\overline{X}_n - 1/5}{\sqrt{1/5 \cdot 4/5}}$ genügt einer $N(0,1)$-Verteilung.
4. Kritischer Bereich: $K = (z_{1-\alpha}, \infty) = (z_{0.95}, \infty)$, dabei ist $z_{0.95} \approx 1.6449$ das 0.95-Quantil der $N(0,1)$-Verteilung.
5. $\overline{Z}_n > z_{1-\alpha}$ bedeutet $\overline{X}_n > p_0 + z_{1-\alpha}\sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n}} \approx 0.2329$.
6. Die maximale Anzahl der defekten Anker sollte
   $n\overline{X}_n = np_0 + z_{1-\alpha}\sqrt{p_0(1-p_0)n} \approx 93$
   betragen, um mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 5% davon ausgehen zu können, dass der Anteil der defekten Injektionsbohranker durchschnittlich nicht mehr als 1/5 beträgt.

χ^2-Anpassungstest

4.77
1. Die angenommene Verteilungsfunktion ist wie in der Aufgabenstellung angegeben die $N\left(\overline{\mu}, \overline{\sigma}^2\right)$-Verteilung mit $\overline{\mu} = 14.37$ bzw. $\overline{\sigma}^2 = 0.0086$.
2. Die Irrtumswahrscheinlichkeit ist in der Aufgabenstellung mit $\alpha = 0.1$ angegeben.

3. Die Prüfgröße ist

$$U\left(N\left(\overline{\mu},\ \overline{\sigma}^2\right), H_{a1}, \ldots, H_{a10}\right) = \sum_{k=1}^{10} \frac{(H_{ak} - np_k^0)^2}{np_k^0} = \sum_{k=1}^{10} \frac{H_{ak}^2}{np_k^0} - n \text{ mit}$$

$$p_k^0 = \Phi_S\left(\frac{b_k - \overline{\mu}}{\overline{\sigma}}\right) - \Phi_S\left(\frac{b_{k-1} - \overline{\mu}}{\overline{\sigma}}\right),\ k = 1, \ldots, 10,\ b_0 = -\infty,\ b_{10} = \infty.$$

4. Der kritische Bereich K ist, da die Parameterschätzungen nicht aus den Intervallhäufigkeiten ermittelt wurden, $K = (\chi^2_{10-1,0.9}, \infty) \approx (14.684, \infty)$.

5. Der Wert der Prüfgröße für die gegebene Klasseneinteilung errechnet sich mit der Tabelle

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
b_k	14.15	14.20	14.25	14.30	14.35	14.40	14.45	14.50	14.55	
$\Phi_S\left(\frac{b_k - \overline{\mu}}{\overline{\sigma}}\right)$	0.009	0.033	0.098	0.225	0.415	0.627	0.0806	0.920	0.974	1.000
p_k^0	0.009	0.024	0.065	0.127	0.190	0.212	0.179	0.114	0.054	0.026
h_{ak}	2	4	12	23	39	42	36	24	12	6
$\frac{h_{ak}^2}{200p_k^0}$	2.27	3.25	11.18	20.78	40.13	41.49	36.26	25.33	13.26	6.90

zu $u\left(N\left(\overline{\mu},\ \overline{\sigma}^2\right), 2, 4, 12, 23, 39, 42, 36, 24, 12, 6\right) = \sum_{k=1}^{10} \frac{h_{ak}^2}{200p_k^0} - 200 \approx 0.85.$

6. Es ist $u \approx 0.85 \notin K \approx (14.684, \infty)$, d. h. die Annahme, dass die Messdaten aufgrund der Klasseneinteilung $N\left(\overline{\mu},\ \overline{\sigma}^2\right)$-verteilt sind, kann mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von $\alpha = 0.1$ angenommen werden.

4.78 1. Die angenommene Verteilungsfunktion ist wie in der Aufgabenstellung angegeben die (diskrete) Gleichverteilung mit $p_k^0 = 1/5$, $k = 1, 2, \ldots, 5$, wobei p_k^0 die Wahrscheinlichkeit dafür ist, dass ein Fehltag auf den k-ten Wochentag fällt.

2. Die Irrtumswahrscheinlichkeit ist in der Aufgabenstellung mit $\alpha = 0.05$ angegeben.

3. Die Prüfgröße ist

$$U(F_0, H_{a1}, \ldots, H_{a5}) = \sum_{k=1}^{5} \frac{(H_{ak} - np_k^0)^2}{np_k^0} = \sum_{k=1}^{5} \frac{H_{ak}^2}{np_k^0} - n \text{ mit } n = 100.$$

4. Der kritische Bereich K ist wegen der angenommenen Gleichverteilung $K = (\chi^2_{5-1,0.95}, \infty) \approx (9.488, \infty)$.

5. Der Wert der Prüfgröße für die gegebene Klasseneinteilung errechnet sich mit der Tabelle

k	1	2	3	4	5
p_k^0	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2
h_{ak}	22	19	16	18	25
$\frac{h_{ak}^2}{100p_k^0}$	24.2	18.05	12.8	16.2	31.25

zu $u(F_0, 22, 19, 16, 18, 25) = \sum_{k=1}^{5} \frac{h_{ak}^2}{100p_k^0} - 100 = 2.5.$

6. Es ist $u = 2.5 \notin K \approx (9.488, \infty)$, d. h. die Annahme, dass die Fehltage der Arbeitnehmer auf die Wochentage gleichverteilt sind, kann mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von $\alpha = 0.05$ angenommen werden.

4.79 1. Die angenommene Verteilungsfunktion ist die geometrische Verteilung mit $p = 0.8$, bei der
$p_k^0 = (1 - p)^k\, p,\ k = 0, 1, 2$
die Wahrscheinlichkeit dafür ist, dass ein Brief nach k Fehlversuchen fehlerfrei ist, und
$p_3^0 = 1 - \left(p_0^0 + p_1^0 + p_2^0\right)$
die Wahrscheinlichkeit dafür ist, dass ein Brief nach mindestens drei Fehlversuchen fehlerfrei ist.

2. Die Irrtumswahrscheinlichkeit ist in der Aufgabenstellung mit $\alpha = 0.05$ angegeben.
3. Die Prüfgröße ist
$$U\left(F_0, H_{a0}, \ldots, H_{a3}\right) = \sum_{k=0}^{3} \frac{(H_{ak} - np_k^0)^2}{np_k^0} = \sum_{k=0}^{3} \frac{H_{ak}^2}{np_k^0} - n \text{ mit } n = 60.$$
4. Der kritische Bereich K ist, da die Wahrscheinlichkeit p eines fehlerfreien Schreibens vorgegeben ist, $K = (\chi^2_{4-1,0.95}, \infty) \approx (7.815, \infty)$.
5. Der Wert der Prüfgröße für die gegebene Klasseneinteilung errechnet sich mit der Tabelle

k	0	1	2	3
p_k^0	0.8	0.16	0.032	0.008
h_{ak}	39	11	6	4
$\frac{h_{ak}^2}{60p_k^0}$	31.6875	12.6042	18.7500	33.3333

zu $u\left(F_0, 39, 11, 6, 4\right) = \sum_{k=0}^{3} \frac{h_{ak}^2}{60p_k^0} - 60 \; approx \; 36.3750.$
6. Es ist $u \approx 36.3750 \notin K \approx (7.815, \infty)$, d. h. die Annahme, dass die Sekretärin einen Brief mit der Wahrscheinlichkeit $p = 0.8$ fehlerfrei schreibt, kann mit der Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 0.05$ nicht unterstützt werden.