

Vorwort

Die Tätigkeiten und Verantwortungsbereiche von Wirtschaftsingenieuren sind geprägt von komplexen technischen und wirtschaftlichen Aufgaben- und Problemstellungen. Das Studium vermittelt dazu fundierte naturwissenschaftlich-technische und betriebswirtschaftliche Kenntnisse und Fähigkeiten. Grundlage und Voraussetzung hierfür ist die Mathematik. Zusätzlich zu den Gebieten und Problemstellungen der Ingenieurmathematik spielen für Wirtschaftsingenieure auch die Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik sowie weitere mathematische Gebiete wie z.B. die lineare Optimierung eine wichtige Rolle. Weder Lehrbücher der Ingenieurmathematik noch Lehrbücher der Wirtschaftsmathematik behandeln alle diese Gebiete. Es besteht der Bedarf an einem Mathematiklehrbuch für Wirtschaftsingenieure, welches alle für das Studium und die Berufspraxis relevanten Gebiete der Mathematik mit technischen und wirtschaftlichen Anwendungsbeispielen behandelt.

Mit diesem Buch soll ein solches Lehrbuch bereitgestellt werden. Es ist als Lehr- und Übungsbuch konzipiert, mit dem man sich vorlesungsbegleitend oder im Selbststudium die von Wirtschaftsingenieuren benötigte Mathematik erarbeiten kann. Dabei spielen die Übungsaufgaben mit Musterlösungen sowie eine klare, aufeinander aufbauende Struktur eine wichtige Rolle. Durch diese klare Struktur und durch übersichtliche Hervorhebungen der wichtigsten Ergebnisse und Formeln eignet sich das Buch aber auch als Nachschlagewerk für die Praxis. Hauptzielgruppe dieses Buches sind Studenten des Studienganges Wirtschaftsingenieurwesen an Fachhochschulen. Da die Ingenieurmathematik einen Teil des Inhalts bildet, eignet es sich aber auch für reine Ingenieurstudiengänge an Fachhochschulen. Entsprechend dieser Zielgruppe ist eine strenge, durchgängige und vollständige Beweisführung nicht das oberste Ziel dieses Buches, weshalb auf eine Aneinanderreihung von Sätzen und Beweisen verzichtet wird. Auch aus didaktischen Gründen wird viel Wert auf die Darstellung des Anwendungsbezuges gelegt. Anwendungsbeispiele werden nicht nur als Abschluss, sondern oft am Anfang eines Gebietes vorgestellt, um dann induktiv in das Thema einzudringen und Aussagen herzuleiten. Sätze erscheinen dann als Ergebnisse dieser Ausführungen und nicht einfach hingeschrieben, um anschließend bewiesen zu werden. Entsprechend der Zielsetzung des Buches kann und soll nicht alles bewiesen werden. Manche Herleitungen werden nur skizziert, anderes wird nicht in voller All-

gemeinheit hergeleitet, manches bleibt unbewiesen. Trotzdem kann und soll jedoch nicht auf Herleitungen und Beweise verzichtet werden. Mathematik als Werkzeugkasten, aus dem man lediglich Werkzeuge (Formeln) herausnimmt und anwendet, reicht als Grundlage für das Studium und die Berufspraxis nicht aus. Vielmehr muss man in der Lage sein, die Funktionsweise und Einsatzmöglichkeiten der Werkzeuge zu verstehen und ggf. selbst Werkzeuge zu entwickeln, d.h. Ergebnisse herzuleiten.

Es war eine Herausforderung, die Fülle der für Wirtschaftsingenieure relevanten mathematischen Gebiete in einem einbändigen Werk zu behandeln. Ein sinnvoller und geeigneter Weg im Spannungsfeld von mathematischer Präzision und Verständlichkeit, Abstraktion und Anschaulichkeit, Ausführlichkeit und prägnanter Darstellung, Theorie und Anwendungsbezug musste gefunden werden. Da in der Praxis mathematische Problemstellungen oft den Einsatz von Computern erfordern, widmet sich ein eigenes Kapitel der Lösung mathematischer Probleme mit dem Computer. Am Beispiel des Mathematik-Softwaresystems Maple® wird gezeigt, wie die in diesem Buch behandelten mathematischen Probleme mit Hilfe eines solchen Systems gelöst werden können. Das System Maple® war (in Verbindung mit der Grafiksoftware Corel®) auch unerlässliches Werkzeug für die Erstellung der Bilder.

In der dritten Auflage wurden Druckfehler korrigiert. Für entsprechende Hinweise bedanke ich mich, ebenso im Voraus für weitere Anregungen und Verbesserungsvorschläge. Für die Arbeit mit diesem Buch wünsche ich allen Lesern viel Freude an der Mathematik!

Weiden, im Juli 2017

Christopher Dietmaier

Inhaltsverzeichnis

1	Grundlagen	15
1.1	Aussagen	15
1.2	Mengen	18
1.3	Abbildungen und Verknüpfungen	21
1.4	Die reellen Zahlen und Teilmengen der reellen Zahlen.....	22
1.4.1	Eigenschaften der reellen Zahlen	22
1.4.2	Wichtige Teilmengen der reellen Zahlen.....	25
1.5	Summen, Produkte und vollständige Induktion	25
1.6	Aufgaben.....	29
2	Komplexe Zahlen und algebraische Gleichungen	30
2.1	Komplexe Zahlen	31
2.1.1	Einführung.....	31
2.1.2	Grundbegriffe	33
2.1.3	Rechenoperationen	34
2.1.4	Exponentialdarstellung von komplexen Zahlen	36
2.1.5	Anwendungen.....	41
2.2	Algebraische Gleichungen	45
2.3	Aufgaben.....	50
3	Vektorrechnung.....	51
3.1	Einführung und Grundbegriffe	51
3.2	Rechnen mit Vektoren.....	54
3.2.1	Addition von Vektoren und Multiplikation mit einer Zahl	54
3.2.2	Skalarprodukt und Betrag von Vektoren	55
3.2.3	Winkel zwischen Vektoren, Zerlegung von Vektoren.....	57
3.2.4	Basisvektoren.....	60
3.2.5	Das Vektorprodukt	61
3.2.6	Das Spatprodukt und Mehrfachprodukte.....	63
3.3	Vektorrechnung und Geometrie	65

3.3.1	Punkte im Raum.....	65
3.3.2	Geraden im Raum	65
3.3.3	Ebenen im Raum	66
3.3.4	Abstände	66
3.3.5	Winkel.....	69
3.4	Aufgaben	71
4	Matrizen, Determinanten und lineare Gleichungssysteme	73
4.1	Matrizen und Determinanten.....	74
4.1.1	Grundbegriffe und spezielle Matrizen	74
4.1.2	Addition und Multiplikation von Matrizen	77
4.1.2.1	Addition von Matrizen und Multiplikation mit einer Zahl.....	77
4.1.2.2	Multiplikation von Matrizen und inverse Matrix	78
4.1.3	Determinante einer Matrix	81
4.1.4	Inversion einer Matrix mit Determinanten.....	86
4.2	Lineare Gleichungssysteme	88
4.2.1	Lösung mit dem Gaußschen Algorithmus	89
4.2.2	Lösung mit Determinanten: Cramersche Regel.....	96
4.2.3	Inversion von Matrizen als Lösung von Gleichungssystemen	97
4.2.4	Kondition eines Gleichungssystems	100
4.3	Aufgaben	102
5	Funktionen von einer Variablen	105
5.1	Grundlagen.....	106
5.2	Grenzwerte und Stetigkeit von Funktionen.....	116
5.2.1	Folgen.....	116
5.2.2	Grenzwert einer Funktion	118
5.2.2.1	Grenzwert für $x \rightarrow x_0$	118
5.2.2.2	Grenzwert für $x \rightarrow \pm \infty$ und Asymptoten	121
5.2.3	Stetigkeit einer Funktion.....	122
5.3	Elementare Funktionen	123
5.3.1	Polynomfunktion	123
5.3.2	Gebrochenrationale Funktionen	125
5.3.3	Die Exponentialfunktion	127
5.3.3.1	Definition und Eigenschaften der Exponentialfunktion	128
5.3.3.2	Anwendungsbeispiele der Exponentialfunktion.....	131
5.3.4	Die Logarithmusfunktion	132
5.3.5	Die Exponentialfunktion zur Basis a	133
5.3.6	Die Logarithmusfunktion zur Basis a	134

5.3.7	Potenz- und Wurzelfunktionen.....	136
5.3.8	Trigonometrische Funktionen.....	139
5.3.9	Arkusfunktionen.....	144
5.3.10	Hyperbelfunktionen.....	146
5.3.11	Areafunktionen.....	148
5.4	Aufgaben.....	149
6	Differenzialrechnung mit Funktionen einer Variablen.....	152
6.1	Einführung und Grundlagen.....	152
6.2	Ableitungsregeln.....	157
6.3	Ableitung elementarer Funktionen.....	160
6.4	Berechnung von Grenzwerten.....	161
6.5	Extrema, Krümmung und Wendepunkte.....	164
6.5.1	Extrema von Funktionen.....	164
6.5.2	Krümmung einer Funktion und Wendepunkte.....	175
6.6	Kurvendiskussion.....	178
6.7	Anwendungsbeispiele.....	181
6.8	Aufgaben.....	183
7	Integralrechnung mit Funktionen von einer Variablen.....	185
7.1	Einführung und Grundlagen.....	185
7.2	Der Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung.....	188
7.3	Grundintegrale.....	191
7.4	Eigenschaften des Integrals.....	192
7.5	Integrationsmethoden.....	193
7.5.1	Partielle Integration.....	193
7.5.2	Integration durch Substitution.....	194
7.5.3	Logarithmische Integration.....	197
7.5.4	Integration durch Partialbruchzerlegung.....	198
7.6	Uneigentliche Integrale.....	200
7.7	Anwendungsbeispiele.....	203
7.8	Aufgaben.....	206
8	Reihen und Reihenentwicklung von Funktionen.....	208
8.1	Grundlagen.....	210
8.1.1	Die endliche geometrische Reihe.....	210
8.1.2	Unendliche Reihen.....	211
8.2	Potenzreihen.....	213
8.3	Taylorreihen, Taylorentwicklung.....	215
8.4	Fourierreihen, Fourierentwicklung.....	222

8.5	Aufgaben	229
9	Der n-dimensionale Raum und Raumkurven	231
9.1	Der n-dimensionale Raum	231
9.1.1	Grundbegriffe	231
9.1.2	Koordinaten im \mathbb{R}^2 und \mathbb{R}^3	234
9.1.2.1	Polarkoordinaten im \mathbb{R}^2	234
9.1.2.2	Zylinderkoordinaten im \mathbb{R}^3	235
9.1.2.3	Kugelkoordinaten im \mathbb{R}^3	235
9.2	Raumkurven	237
9.2.1	Tangential- und Normalenvektoren.....	239
9.2.2	Bogenlänge.....	241
9.2.3	Krümmung	243
9.3	Aufgaben	245
10	Differenzialrechnung mit Funktionen von mehreren Variablen	246
10.1	Funktionen von mehreren Variablen.....	246
10.2	Partielle Ableitung und partielle Differenzierbarkeit	249
10.3	Differenzierbarkeit, Linearisierung und Taylorentwicklung	253
10.3.1	Differenzierbarkeit und totales Differenzial.....	253
10.3.2	Ableitung nach einem Parameter	257
10.3.3	Taylorentwicklung	258
10.4	Extrema von Funktionen von mehreren Variablen.....	261
10.4.1	Extrema ohne Nebenbedingungen	262
10.4.2	Extrema mit Nebenbedingungen.....	272
10.5	Aufgaben	278
11	Integralrechnung mit Funktionen von mehreren Variablen	279
11.1	Bereichsintegrale	279
11.1.1	Bereichsintegral einer Funktion von zwei Variablen.....	279
11.1.1.1	Integration in kartesischen Koordinaten	281
11.1.1.2	Integration in Polarkoordinaten.....	286
11.1.2	Bereichsintegral einer Funktion von drei Variablen.....	290
11.1.2.1	Integration in kartesischen Koordinaten	291
11.1.2.2	Integration in Zylinderkoordinaten	293
11.1.2.3	Integration in Kugelkoordinaten.....	294
11.2	Kurvenintegrale.....	296
11.3	Aufgaben	300

12	Gewöhnliche Differenzialgleichungen.....	302
12.1	Einführung und Grundlagen	304
12.2	Gewöhnliche Differenzialgleichungen erster Ordnung.....	306
12.2.1	Separable Differenzialgleichungen: Trennung der Variablen	306
12.2.2	Lineare Differenzialgleichungen erster Ordnung.....	311
12.2.2.1	Homogene lineare Differenzialgleichung erster Ordnung	311
12.2.2.2	Inhomogene lineare Differenzialgleichung erster Ordnung.....	312
12.3	Gewöhnliche Differenzialgleichungen zweiter Ordnung	314
12.3.1	Homogene lineare Differenzialgleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten	315
12.3.2	Inhomogen lineare Differenzialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten	319
12.4	Aufgaben.....	324
13	Wahrscheinlichkeitsrechnung	326
13.1	Kombinatorik.....	327
13.1.1	Permutationen	327
13.1.2	Variationen	329
13.1.3	Kombinationen.....	331
13.1.4	Zusammenfassung.....	333
13.1.5	Aufgaben zu Abschnitt 13.1	333
13.2	Zufallsexperimente und Wahrscheinlichkeit.....	334
13.2.1	Zufallsexperimente	334
13.2.2	Klassische Wahrscheinlichkeit nach Laplace	335
13.2.3	Axiome der Wahrscheinlichkeitsrechnung.....	339
13.2.4	Bedingte Wahrscheinlichkeit, stochastische Unabhängigkeit, totale Wahrscheinlichkeit und Formel von Bayes.....	340
13.2.5	Zusammenfassung.....	343
13.2.6	Aufgaben zu Abschnitt 13.2	345
13.3	Zufallsvariablen und Wahrscheinlichkeitsverteilung.....	347
13.3.1	Diskrete Zufallsvariablen	348
13.3.1.1	Wahrscheinlichkeitsfunktion und Verteilungsfunktion	348
13.3.1.2	Parameter einer diskreten Verteilung.....	350
13.3.2	Stetige Zufallsvariablen	352
13.3.2.1	Verteilungsfunktion und Wahrscheinlichkeitsdichte.....	352
13.3.2.2	Parameter einer stetigen Verteilung	354
13.3.3	Zweidimensionale stetige Zufallsvariablen.....	356
13.3.3.1	Verteilungsfunktion und Wahrscheinlichkeitsdichte.....	357
13.3.3.2	Parameter einer zweidimensionalen Zufallsvariablen	360
13.3.3.3	Summen von Zufallsvariablen	361

13.4	Spezielle Verteilungen.....	363
13.4.1	Diskrete Verteilungen	364
13.4.1.1	Die Binomialverteilung	364
13.4.1.2	Die hypergeometrische Verteilung.....	366
13.4.1.3	Die Poissonverteilung	369
13.4.2	Stetige Verteilungen	370
13.4.2.1	Die Normalverteilung	370
13.4.2.2	Die Lognormalverteilung.....	373
13.4.2.3	Die Exponentialverteilung	375
13.4.2.4	Die Weibullverteilung	377
13.4.2.5	Die t-Verteilung.....	378
13.4.2.6	Die Chi-Quadrat-Verteilung	379
13.4.2.7	Die F-Verteilung.....	380
13.4.3	Anwendungsbeispiele in der Qualitätssicherung.....	381
13.4.4	Die zweidimensionale Normalverteilung.....	384
13.5	Grenzwertsätze und Näherungen.....	386
13.5.1	Die Binomialverteilung als Näherung für die hypergeometrische Verteilung	386
13.5.2	Die Poissonverteilung als Näherung für die Binomialverteilung.....	387
13.5.3	Der zentrale Grenzwertsatz und das Gesetz der großen Zahlen.....	387
13.6	Aufgaben zu den Abschnitten 13.3 bis 13.5	392
14	Deskriptive Statistik	394
14.1	Einführung und Grundbegriffe	394
14.2	Univariate deskriptive Statistik	396
14.2.1	Häufigkeitsverteilung und grafische Darstellungen.....	397
14.2.1.1	Keine Klassenbildung.....	397
14.2.1.2	Klassenbildung	398
14.2.2	Maßzahlen	402
14.2.2.1	Lagemaßzahlen	402
14.2.2.2	Streuungsmaßzahlen	406
14.2.2.3	Konzentrationsmaßzahl: Gini-Koeffizient.....	407
14.3	Bivariate deskriptive Statistik	410
14.3.1	Häufigkeitstabellen und grafische Darstellungen	410
14.3.2	Maßzahlen	413
14.4	Aufgaben	415
15	Schließende Statistik	416
15.1	Einführung und Grundbegriffe	416

15.2	Schätzen von Parametern	417
15.2.1	Eigenschaften von Schätzfunktionen.....	418
15.2.2	Maximum-Likelihood-Schätzung	420
15.2.3	Konfidenzintervalle	422
15.2.4	Aufgaben zu Abschnitt 15.2	430
15.3	Statistische Tests.....	432
15.3.1	Einführung, Grundbegriffe und Vorgehensweise bei Tests.....	432
15.3.2	Spezielle Parametertests	443
15.3.2.1	Test für den Erwartungswert einer normalverteilten Größe	443
15.3.2.2	Test für die Varianz einer normalverteilten Größe.....	444
15.3.2.3	Test für den Erwartungswert einer beliebig verteilten Größe.....	444
15.3.2.4	Test für den Parameter p einer binomialverteilten Größe.....	445
15.3.2.5	Test für den Vergleich der Erwartungswerte zweier Größen.....	447
15.3.2.6	Test für den Vergleich der Varianzen zweier normalverteilter Größen	448
15.3.2.7	Test für den Vergleich der Parameter zweier binomialverteilter Größen	449
15.3.2.8	Test für den Korrelationskoeffizienten einer zweidimensionalen Normalverteilung	449
15.3.3	Der Chi-Quadrat-Anpassungstest	451
15.3.4	Unabhängigkeits- und Homogenitätstests.....	454
15.3.4.1	Der Chi-Quadrat-Unabhängigkeitstest	454
15.3.4.2	Der Chi-Quadrat-Homogenitätstest	456
15.3.5	Der Mann-Whitney-Wilcoxon-Test	457
15.3.6	Aufgaben zu Abschnitt 15.3	459
16	Lineare Optimierung	463
16.1	Grafische Lösung und Simplex-Algorithmus	463
16.1.1	Grafische Lösung.....	465
16.1.2	Der Simplex-Algorithmus.....	467
16.1.3	Sonderfälle	476
16.1.4	Zusammenfassung des Simplex-Algorithmus.....	484
16.1.5	Aufgaben zu Abschnitt 16.1	486
16.2	Transportprobleme.....	487
16.2.1	Die Struktur von Transportproblemen	487
16.2.2	Der Transportalgorithmus.....	491
16.2.3	Aufgaben zu Abschnitt 16.2	495
17	Mathematik mit dem Computer	497
17.1	Einführung.....	497

17.2	Lösung mathematischer Probleme mit Maple.....	503
17.2.1	Einführung.....	503
17.2.2	Lösungsbeispiele.....	505
17.2.2.1	Lösen von Gleichungen.....	505
17.2.2.2	Rechnen mit komplexen Zahlen.....	507
17.2.2.3	Vektoren, Matrizen, lineare Gleichungssysteme	509
17.2.2.4	Funktionsgraphen	512
17.2.2.5	Differenzialrechnung	514
17.2.2.6	Integralrechnung.....	515
17.2.2.7	Summen, unendliche Reihen und Reihenentwicklung von Funktionen	517
17.2.2.8	Grenzwerte.....	518
17.2.2.9	Differenzialgleichungen	518
17.2.2.10	Wahrscheinlichkeitsrechnung	518
17.2.2.11	Lineare Optimierung.....	520
A	Lösungen der Aufgaben	521
B	Statistik-Tabellen.....	568
B.1	Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung.....	568
B.2	Quantile der t-Verteilung	569
B.3	Quantile der Chi-Quadrat-Verteilung	570
B.4	Quantile der F-Verteilung.....	572
B.5	Werte für den Mann-Whitney-Wilcoxon-Test	588
	Literaturverzeichnis	590
	Sachwortverzeichnis.....	593

Ist $f(\vec{r})$ an der Stelle \vec{r}_0 zweimal stetig partiell differenzierbar, dann gilt:
 $f(\vec{r})$ hat an der Stelle \vec{r}_0 ein lokales Extremum $\Rightarrow \text{grad } f(\vec{r}_0) = \vec{0}$

$$\left. \begin{array}{l} \text{grad } f(\vec{r}_0) = \vec{0} \\ \text{und} \\ \det H_f(\vec{r}_0) > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(\vec{r}) \text{ hat an der Stelle } \vec{r}_0 \text{ ein isoliertes Extremum} \quad (10.24)$$

Für ein isoliertes Extremum an der Stelle \vec{r}_0 gilt:

$$f_{xx}(\vec{r}_0) > 0 \Rightarrow f(\vec{r}) \text{ hat an der Stelle } \vec{r}_0 \text{ ein isoliertes Minimum} \quad (10.25)$$

$$f_{xx}(\vec{r}_0) < 0 \Rightarrow f(\vec{r}) \text{ hat an der Stelle } \vec{r}_0 \text{ ein isoliertes Maximum} \quad (10.26)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{grad } f(\vec{r}_0) = \vec{0} \\ \text{und} \\ \det H_f(\vec{r}_0) < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(\vec{r}) \text{ hat an der Stelle } \vec{r}_0 \text{ kein lokales Extremum} \quad (10.27)$$

Bemerkungen:

1. Hat $f(\vec{r})$ an der Stelle \vec{r}_0 ein isoliertes Extremum, dann sind die Vorzeichen von $f_{xx}(\vec{r}_0)$ und $f_{yy}(\vec{r}_0)$ gleich. Deshalb genügt es, das Vorzeichen von $f_{xx}(\vec{r}_0)$ zu überprüfen.
2. Ist $\text{grad } f(\vec{r}_0) = \vec{0}$ und hat die Funktion $f(\vec{r})$ an der Stelle \vec{r}_0 kein lokales Extremum, dann spricht man von einem **Sattelpunkt** an der Stelle \vec{r}_0 .
3. Ist $\text{grad } f(\vec{r}_0) = \vec{0}$ und $\det H_f(\vec{r}_0) = 0$, so ist keine allgemeine Aussage über die Existenz eines Extremums an der Stelle \vec{r}_0 möglich.

Beispiel 10.13 $f(x, y) = x^2 + y^2 + 10$

$$\text{grad } f(x, y) = (f_x(x, y), f_y(x, y)) = (2x, 2y) = \vec{0} \text{ für } (x, y) = (0, 0) = (x_0, y_0).$$

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = H_f(x_0, y_0)$$

$$\left. \begin{array}{l} \det H_f(x_0, y_0) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0 \\ f_{xx}(x_0, y_0) = 2 > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{isoliertes Minimum an der Stelle } (x_0, y_0) = (0, 0)$$

Der Graph der Funktion ist in den Bildern 10.16 bis 10.20 dargestellt.

Beispiel 10.14 $f(x, y) = x^2 - y^2$

$\text{grad } f(x, y) = (f_x(x, y), f_y(x, y)) = (2x, -2y) = (0, 0)$ für $(x, y) = (0, 0) = (x_0, y_0)$.

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = H_f(x_0, y_0) \quad \det H_f(x_0, y_0) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -4 < 0$$

\Rightarrow Sattelpunkt an der Stelle $(x_0, y_0) = (0, 0)$

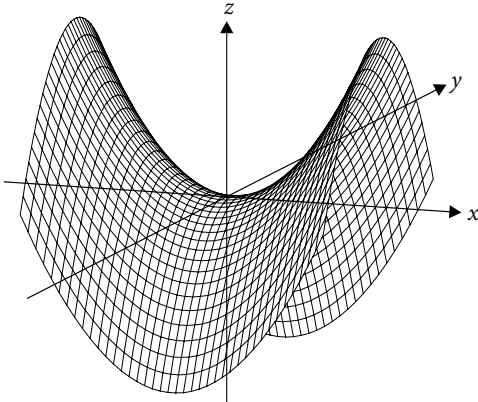


Bild 10.21

Beispiel 10.15 $f(x, y) = 2x^3 - 3x^2 - 2y^3 + 3y^2$

$\text{grad } f(x, y) = (f_x(x, y), f_y(x, y)) = (6x^2 - 6x, -6y^2 + 6y)$

$6x^2 - 6x = 6x(x - 1) = 0$ für $x = 0$ oder $x = 1$

$-6y^2 + 6y = -6y(y - 1) = 0$ für $y = 0$ oder $y = 1$

$\Rightarrow \text{grad } f(x, y) = (0, 0)$ an den vier Stellen $(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)$.

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 12x - 6 & 0 \\ 0 & -12y + 6 \end{pmatrix}$$

$\det H_f(0, 0) = \begin{vmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = -36 < 0 \Rightarrow$ Sattelpunkt an der Stelle $(0, 0)$

$\left. \begin{array}{l} \det H_f(0, 1) = \begin{vmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} = 36 > 0 \\ f_{xx}(0, 1) = -6 < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$ isoliertes Maximum an der Stelle $(0, 1)$

$\left. \begin{array}{l} \det H_f(1, 0) = \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = 36 > 0 \\ f_{xx}(1, 0) = 6 < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$ isoliertes Minimum an der Stelle $(1, 0)$

$\det H_f(1, 1) = \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} = -36 < 0 \Rightarrow$ Sattelpunkt an der Stelle $(1, 1)$

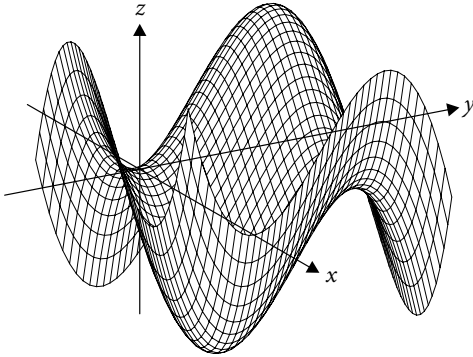


Bild 10.22

Für den Fall $\text{grad} f(x_0, y_0) = (0, 0)$ und $\det H_f(x_0, y_0) = 0$ ist keine allgemeine Aussage möglich. Die nächsten drei Beispiele sollen dies demonstrieren.

Beispiel 10.16 $f(x, y) = x^4 + y^4$

$$\text{grad} f(x, y) = (f_x(x, y), f_y(x, y)) = (4x^3, 4y^3) = (0, 0) \text{ für } (x, y) = (0, 0) = (x_0, y_0).$$

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 12x^2 & 0 \\ 0 & 12y^2 \end{pmatrix} \quad H_f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \det H_f(x_0, y_0) = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

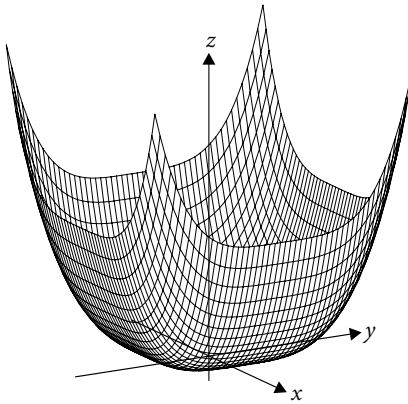


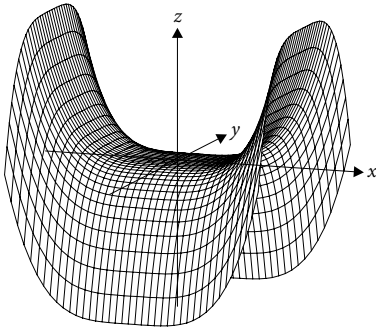
Bild 10.23

Die Funktion hat an der Stelle $(x_0, y_0) = (0, 0)$ ein isoliertes Minimum.

Beispiel 10.17 $f(x, y) = x^4 - y^4$

$$\text{grad} f(x, y) = (f_x(x, y), f_y(x, y)) = (4x^3, -4y^3) = (0, 0) \text{ für } (x, y) = (0, 0) = (x_0, y_0).$$

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 12x^2 & 0 \\ 0 & -12y^2 \end{pmatrix} \quad H_f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \det H_f(x_0, y_0) = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

**Bild 10.24**

Die Funktion hat an der Stelle $(x_0, y_0) = (0, 0)$ einen Sattelpunkt.

Beispiel 10.18 $f(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 + y^2)$

$$\text{grad } f(x, y) = (4x(x^2 + y^2 - 1), 4y(x^2 + y^2 - 1)) = (0, 0)$$

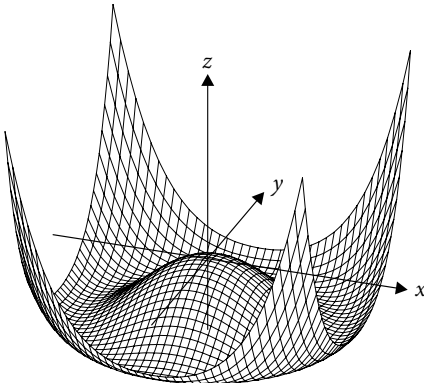
für $(x, y) = (0, 0)$ und für alle (x, y) mit $x^2 + y^2 = 1$ (Kreis mit Radius $R = 1$).

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 4(x^2 + y^2 - 1) + 8x^2 & 8xy \\ 8xy & 4(x^2 + y^2 - 1) + 8y^2 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{aligned} \det H_f(0, 0) &= \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = 16 > 0 \\ f_{xx}(0, 1) &= -4 < 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{isoliertes Maximum an der Stelle } (0, 0)$$

Für alle Punkte (x, y) auf dem Einheitskreis mit $x^2 + y^2 = 1$ gilt

$$\det H_f(x, y) = \begin{vmatrix} 8x^2 & 8xy \\ 8xy & 8y^2 \end{vmatrix} = 0$$

**Bild 10.25**

Die Funktion besitzt an jeder Stelle auf dem Einheitskreis ein nichtisoliertes Minimum: Jeder Punkt auf dem Einheitskreis besitzt eine Umgebung, in der es keine kleineren Funktionswerte gibt. Jede Umgebung eines Punktes auf dem Einheitskreis enthält aber Stellen mit gleich kleinen Funktionswerten.

Anwendungsbeispiel 10.19 Behälter mit minimaler Oberfläche

Wir wollen die Problemstellung des Einführungsbeispiels 10.1 lösen. Nach den Ausführungen zu Beginn des Abschnittes 10.4 müssen wir dazu ein Minimum der Funktion

$$f(x, y) = xy + \frac{2V}{y} + \frac{2V}{x}$$

suchen. Wir erhalten

$$\text{grad } f(x, y) = (y - 2Vx^{-2}, x - 2Vy^{-2}) \quad H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 4Vx^{-3} & 1 \\ 1 & 4Vy^{-3} \end{pmatrix}$$

Die Gleichungen $y - 2Vx^{-2} = 0$ und $x - 2Vy^{-2} = 0$ sind erfüllt für

$$(x, y) = (x_0, y_0) = (\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{2V})$$

Für die Hesse-Matrix an der Stelle (x_0, y_0) gilt

$$H_f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 4Vx_0^{-3} & 1 \\ 1 & 4Vy_0^{-3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \det H_f(x_0, y_0) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3$$

Daraus folgt, dass die Funktion $f(x, y)$ und damit die Oberfläche minimal ist für

$$(x, y) = (x_0, y_0) = (\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{2V})$$

Um Kriterien für Funktionen von mehr als zwei Variablen formulieren zu können, benötigen wir folgende Begriffe (auf die Erläuterung dieser Begriffe verzichten wir):

Wir nennen eine *symmetrische* Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

positiv definit, wenn für alle k mit $1 \leq k \leq n$ gilt

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} > 0$$

Wir nennen sie *negativ definit*, wenn $-A$ positiv definit ist. Wir nennen sie *indefinit*, wenn sie weder positiv definit, noch negativ definit ist und wenn $\det A \neq 0$ ist. Die Kriterien für Extrema von Funktionen von mehreren Variablen lassen sich damit folgendermaßen formulieren.

Ist $f(\bar{x})$ an der Stelle \bar{x}_0 zweimal stetig partiell differenzierbar, dann gilt:

$f(\bar{x})$ hat an der Stelle \bar{x}_0 ein lokales Extremum $\Rightarrow \text{grad } f(\bar{x}_0) = \vec{0}$

$$\left. \begin{array}{l} \text{grad } f(\bar{x}_0) = \vec{0} \\ \text{und} \\ H_f(\bar{x}_0) \text{ pos. definit} \end{array} \right\} \Rightarrow f(\bar{x}) \text{ hat an der Stelle } \bar{x}_0 \text{ ein isoliertes Minimum} \quad (10.28)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{grad } f(\bar{x}_0) = \vec{0} \\ \text{und} \\ H_f(\bar{x}_0) \text{ neg. definit} \end{array} \right\} \Rightarrow f(\bar{x}) \text{ hat an der Stelle } \bar{x}_0 \text{ ein isoliertes Maximum} \quad (10.29)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{grad } f(\bar{x}_0) = \vec{0} \\ \text{und} \\ H_f(\bar{x}_0) \text{ indefinit} \end{array} \right\} \Rightarrow f(\bar{x}) \text{ hat an der Stelle } \bar{x}_0 \text{ kein lokales Extremum} \quad (10.30)$$

Bemerkung: Ist $\text{grad } f(\bar{x}_0) = \vec{0}$ und $\det H_f(\bar{x}_0) = 0$, so ist keine allgemeine Aussage über die Existenz eines Extremums an der Stelle \bar{x}_0 möglich.

Beispiel 10.20 $f(x, y, z) = 2x^3 - 3x^2 + y^2 + z^2$

$$\text{grad } f(x, y, z) = (f_x(x, y, z), f_y(x, y, z), f_z(x, y, z)) = (6x^2 - 6x, 2y, 2z)$$

$$6x^2 - 6x = 6x(x-1) = 0 \text{ für } x=0 \text{ oder } x=1$$

$$\Rightarrow \text{grad } f(x, y, z) = (0, 0, 0) \text{ an den Stellen } (0, 0, 0) \text{ und } (1, 0, 0).$$

$$H_f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 12x-6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad H_f(0,0,0) = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad H_f(1,0,0) = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det(-6) = -6 < 0 \Rightarrow H_f(0,0,0) \text{ ist nicht positiv definit.}$$

$$-H_f(0,0,0) = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -12 < 0 \Rightarrow -H_f(0,0,0) \text{ ist nicht positiv definit.}$$

$$\Rightarrow H_f(0,0,0) \text{ ist nicht negativ definit.}$$

$$\det H_f(0,0,0) = -24 \neq 0 \Rightarrow H_f(0,0,0) \text{ ist indefinit.}$$

$$\Rightarrow f(x, y, z) \text{ hat an der Stelle } (0, 0, 0) \text{ kein lokales Extremum.}$$

$$\det(6) = 6 > 0 \quad \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 12 > 0 \quad \begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 24 > 0$$

$\Rightarrow H_f(1,0,0)$ ist positiv definit.

$\Rightarrow f(x, y, z)$ hat an der Stelle $(1,0,0)$ ein isoliertes lokales Minimum.

Anwendungsbeispiel 10.21 Gewinnmaximierung

Die Gewinnfunktion beim Absatz von n Gütern mit den Absatzmengen x_1, \dots, x_n , den (mengenunabhängigen) Preisen p_1, \dots, p_n und der Kostenfunktion $K(x_1, \dots, x_n)$ lautet

$$G(x_1, \dots, x_n) = p_1 x_1 + \dots + p_n x_n - K(x_1, \dots, x_n)$$

Das Gewinnmaximum erhält man aus dem Gleichungssystem

$$\text{grad } G(x_1, \dots, x_n) = (0, \dots, 0) = \vec{0}$$

Daraus folgt das Gleichungssystem

$$p_1 - K_{x_1}(x_1, \dots, x_n) = 0$$

$$p_2 - K_{x_2}(x_1, \dots, x_n) = 0$$

\vdots

$$p_n - K_{x_n}(x_1, \dots, x_n) = 0$$

Hängen die Absatzmengen von den Preisen und die Preise von den Absatzmengen ab, so sind die Mengen und die Preise Funktionen von mehreren Variablen:

$$x_1(p_1, \dots, p_n), \dots, x_n(p_1, \dots, p_n)$$

$$p_1(x_1, \dots, x_n), \dots, p_n(x_1, \dots, x_n)$$

In diesem Fall erhält man folgendes Gleichungssystem:

$$p_1(x_1, \dots, x_n) + \frac{\partial p_1(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1} x_1 + \dots + \frac{\partial p_n(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1} x_n - \frac{\partial K(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1} = 0$$

$$p_2(x_1, \dots, x_n) + \frac{\partial p_1(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_2} x_1 + \dots + \frac{\partial p_n(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_2} x_n - \frac{\partial K(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_2} = 0$$

\vdots

$$p_n(x_1, \dots, x_n) + \frac{\partial p_1(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_n} x_1 + \dots + \frac{\partial p_n(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_n} x_n - \frac{\partial K(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_n} = 0$$

10.4.2 Extrema mit Nebenbedingungen

Die Problemstellung im Einführungsbeispiel 10.1 ist ein Beispiel für die Suche nach einem Extremum unter Nebenbedingungen. Gesucht ist ein Minimum der Funktion

$$f(x, y, z) = xy + 2xz + 2yz$$

unter der Nebenbedingung

$$xyz = V$$

Die Untersuchung solcher Problemstellungen soll zunächst für Funktionen von zwei Variablen erfolgen. Sucht man ein Extremum einer Funktion $f(x, y)$ von zwei Variablen, so bedeutet eine Nebenbedingung eine Einschränkung der Definitionsmenge. Es werden nicht mehr alle Punkte $(x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2$ betrachtet, sondern nur diejenigen, welche die Nebenbedingung erfüllen. Es wird hier nur ein spezieller Typ von Nebenbedingungen betrachtet. Der eingeschränkte Definitionsbereich soll eine Kurve im \mathbb{R}^2 darstellen, welche in impliziter Darstellung durch die Gleichung $g(x, y) = 0$ beschrieben wird. Gesucht ist also ein Extremum einer Funktion

$$f(x, y)$$

unter der Nebenbedingung

$$g(x, y) = 0$$

Beispiel 10.22

Gesucht sind Extrema der Funktion $f(x, y) = x^2 + y^2$
unter der Nebenbedingung $g(x, y) = x + y - 1 = 0$

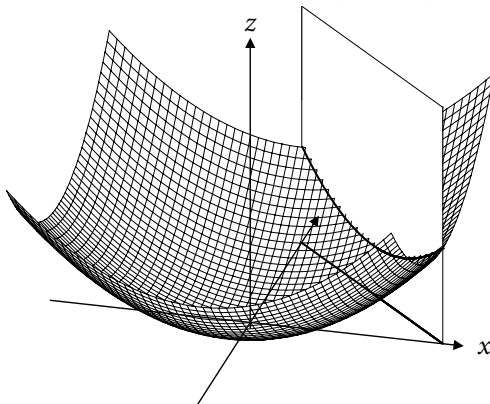


Bild 10.26

Lässt sich die Gleichung $g(x, y) = 0$ nach y auflösen, so erhält man eine Gleichung $y = h(x)$, welche die Kurve in expliziter Darstellung beschreibt. Setzt man in $f(x, y)$ für y den Ausdruck $h(x)$ ein, so erhält man eine Funktion von einer Variablen x , die auf ein Extremum hin zu untersuchen ist. Es lässt sich jedoch nicht jede Nebenbedingung der Form $g(x, y) = 0$ in expliziter Form darstellen. In einer Parameterdarstellung der Kurve wird diese beschrieben durch zwei Funktionen $x(t)$ und $y(t)$. Setzt man in $f(x, y)$ für x und y die Funktionen $x(t)$ und $y(t)$ ein, so erhält man wieder eine Funktion von einer Variablen t , die auf ein Extremum hin zu untersuchen ist. Wie aber findet man Extrema, wenn weder eine explizite noch eine Parameterdarstellung der Kurve bekannt ist? Es soll nun angenommen werden, dass die differenzierbaren Funktionen $x(t)$ und $y(t)$ die Kurve in Parameterdarstellung beschreiben (auch wenn diese Funktionen nicht bekannt sind). Auf der Kurve gilt $g(x(t), y(t)) = 0$ und damit auch $\dot{g}(x(t), y(t)) = 0$ (Ableitungen nach dem Parameter t werden mit einem Punkt gekennzeichnet). Ist die Funktion $f(x(t), y(t))$ nach t differenzierbar, so erhält man einen Parameterwert t_0 mit der Eigenschaft, dass die Funktion $f(x(t), y(t))$ an der Stelle $t = t_0$ ein Extremum besitzt, aus der Gleichung $\dot{f}(x(t), y(t)) = 0$. An einem Punkt der Kurve, an dem die Funktion ein Extremum besitzt, gelten also nach (6.12) und (10.15) die zwei Gleichungen

$$\begin{aligned}\dot{g}(x(t), y(t)) &= \text{grad } g(x(t), y(t)) \cdot (\dot{x}(t), \dot{y}(t)) = 0 \\ \dot{f}(x(t), y(t)) &= \text{grad } f(x(t), y(t)) \cdot (\dot{x}(t), \dot{y}(t)) = 0\end{aligned}$$

Ist $(x_0, y_0) = (x(t_0), y(t_0))$ solch ein Punkt, dann gilt also

$$\begin{aligned}\text{grad } g(x_0, y_0) \cdot (\dot{x}(t_0), \dot{y}(t_0)) &= g_x(x_0, y_0) \dot{x}(t_0) + g_y(x_0, y_0) \dot{y}(t_0) = 0 \\ \text{grad } f(x_0, y_0) \cdot (\dot{x}(t_0), \dot{y}(t_0)) &= f_x(x_0, y_0) \dot{x}(t_0) + f_y(x_0, y_0) \dot{y}(t_0) = 0\end{aligned}$$

Dies ist ein lineares homogenes Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} g_x(x_0, y_0) & g_y(x_0, y_0) \\ f_x(x_0, y_0) & f_y(x_0, y_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}(t_0) \\ \dot{y}(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nichttriviale Lösungen gibt es nur, wenn die Determinante der Koeffizientenmatrix gleich Null ist.

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} g_x(x_0, y_0) & g_y(x_0, y_0) \\ f_x(x_0, y_0) & f_y(x_0, y_0) \end{vmatrix} &= 0 \\ \Rightarrow g_x(x_0, y_0) f_y(x_0, y_0) &= f_x(x_0, y_0) g_y(x_0, y_0)\end{aligned}\tag{10.31}$$

Sind $g_x(x_0, y_0), g_y(x_0, y_0) \neq 0$, so folgt aus (10.31)

$$\frac{f_x(x_0, y_0)}{g_x(x_0, y_0)} = \frac{f_y(x_0, y_0)}{g_y(x_0, y_0)} \quad (10.32)$$

Bezeichnet man die Quotienten in (10.32) mit $-\lambda_0$, so folgt aus (10.31) bzw. (10.32)

$$f_x(x_0, y_0) = -\lambda_0 g_x(x_0, y_0)$$

$$f_y(x_0, y_0) = -\lambda_0 g_y(x_0, y_0)$$

Die drei Gleichungen

$$f_x(x_0, y_0) + \lambda_0 g_x(x_0, y_0) = 0$$

$$f_y(x_0, y_0) + \lambda_0 g_y(x_0, y_0) = 0$$

$$g(x_0, y_0) = 0$$

die bei einem Extremum gelten müssen, lassen sich zusammenfassen zu

$$\text{grad } F(x_0, y_0, \lambda_0) = (F_x(x_0, y_0, \lambda_0), F_y(x_0, y_0, \lambda_0), F_\lambda(x_0, y_0, \lambda_0)) = \vec{0}$$

mit der Lagrange-Funktion

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y).$$

Eine Stelle (x_0, y_0) , an der ein Extremum vorliegt, erhält man also aus einer Lösung (x_0, y_0, λ_0) des Gleichungssystems

$$\text{grad } F(x, y, \lambda) = \vec{0}.$$

Beispiel 10.23

Gesucht sind Extrema der Funktion $f(x, y) = x^2 + y^2$

unter der Nebenbedingung $g(x, y) = x + y - 1 = 0$

$$F(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(x + y - 1)$$

$$F_x(x, y, \lambda) = 2x + \lambda = 0$$

$$F_y(x, y, \lambda) = 2y + \lambda = 0$$

$$F_\lambda(x, y, \lambda) = x + y - 1 = 0$$

Aus diesen drei Gleichungen folgt $x = y = \frac{1}{2}$.

Das Extremum befindet sich an der Stelle $(x_0, y_0) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Der Graph der Funktion $f(x, y)$ und die Kurve $g(x, y) = 0$ sind in Bild 10.26 dargestellt.

Die geschilderte Methode lässt sich folgendermaßen zusammenfassen:

Lagrangesche Multiplikatorenmethode für Funktionen von zwei Variablen

Die Funktionen $f(x, y)$ und $g(x, y)$ seien stetig partiell differenzierbar. Die Funktion $f(x, y)$ mit der durch die Nebenbedingung $g(x, y) = 0$ eingeschränkten Definitionsmenge habe an der Stelle (x_0, y_0) ein Extremum. Ist $\text{grad } g(x_0, y_0) \neq \vec{0}$, dann gelten die Gleichungen

$$f_x(x_0, y_0) + \lambda_0 g_x(x_0, y_0) = 0$$

$$f_y(x_0, y_0) + \lambda_0 g_y(x_0, y_0) = 0$$

$$g(x_0, y_0) = 0$$

d.h. x_0, y_0 erhält man aus einer Lösung (x_0, y_0, λ_0) des Gleichungssystems

$$\text{grad } F(x, y, \lambda) = (F_x(x, y, \lambda), F_y(x, y, \lambda), F_\lambda(x, y, \lambda)) = \vec{0} \quad (10.33)$$

mit der *Lagrange-Funktion*

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y) \quad (10.34)$$

Die Verallgemeinerung auf Funktionen von n Variablen lautet:

Lagrangesche Multiplikatorenmethode für Funktionen von n Variablen

$f(\vec{x})$ und $g_1(\vec{x}), \dots, g_m(\vec{x})$ ($m < n$) seien stetig partiell differenzierbare Funktionen von n Variablen. Die Funktion $f(\vec{x})$ mit der durch die Nebenbedingungen $g_i(\vec{x}) = 0$ ($i = 1, \dots, m$) eingeschränkten Definitionsmenge habe an der Stelle \vec{x}_0 ein Extremum. Besitzt die Matrix

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} g_1(\vec{x}) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n} g_1(\vec{x}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_1} g_m(\vec{x}) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n} g_m(\vec{x}) \end{pmatrix}$$

für $\vec{x} = \vec{x}_0$ eine m -reihige Untermatrix, deren Determinante ungleich Null ist, dann ergibt sich \vec{x}_0 aus einer Lösung des Gleichungssystems

$$\text{grad } F(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m) = \vec{0} \quad (10.35)$$

mit der *Lagrange-Funktion*

$$F(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m) = f(\vec{x}) + \lambda_1 g_1(\vec{x}) + \dots + \lambda_m g_m(\vec{x}) \quad (10.36)$$

Bemerkung: (10.33) bis (10.36) sind notwendige, aber keine hinreichenden Kriterien. Es lassen sich auch hinreichende Kriterien und Kriterien für Maxima und Minima formulieren. Diese sind jedoch sehr kompliziert und werden deshalb nicht angegeben. Die Entscheidung, ob es sich um ein Maximum oder Minimum handelt, erfolgt hier durch Vergleich mit Funktionswerten an anderen Stellen, welche die Nebenbedingungen erfüllen.

Beispiel 10.24

Gesucht sind Extrema der Funktion $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ unter den Nebenbedingungen $g_1(x, y, z) = x + y - 1 = 0$ und $g_2(x, y, z) = x + z + 4 = 0$.

$$\text{Die Matrix } \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} g_1(x, y, z) & \frac{\partial}{\partial y} g_1(x, y, z) & \frac{\partial}{\partial z} g_1(x, y, z) \\ \frac{\partial}{\partial x} g_2(x, y, z) & \frac{\partial}{\partial y} g_2(x, y, z) & \frac{\partial}{\partial z} g_2(x, y, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ besitzt für alle}$$

(x, y, z) eine zweireihige Untermatrix, deren Determinante ungleich Null ist.

$$F(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda_1(x + y - 1) + \lambda_2(x + z + 4)$$

$$\text{grad } F(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} 2x + \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ 2y + \lambda_1 = 0 & \Rightarrow \lambda_1 = -2y \\ 2z + \lambda_2 = 0 & \Rightarrow \lambda_2 = -2z \\ x + y - 1 = 0 \\ x + z + 4 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - y - z = 0 \\ x + y = 1 \text{ bzw.} \\ x + z = -4 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \Rightarrow x = -1, y = 2, z = -3$$

Eine andere Stelle, welche die Nebenbedingungen erfüllt, ist $(x, y, z) = (0, 1, -4)$

$f(-1, 2, -3) = 14 < f(0, 1, -4) = 17 \Rightarrow$ Die Stelle $(x, y, z) = (-1, 2, -3)$ ist ein Minimum.

Anwendungsbeispiel 10.25 Behälter mit minimaler Oberfläche

Wir wollen die Problemstellung des Einführungsbeispiels 10.1 lösen. Dazu suchen wir ein Extremum der Funktion

$$f(x, y, z) = xy + 2xz + 2yz$$

unter der Nebenbedingung

$$g(x, y, z) = xyz - V = 0$$

$\left(\frac{\partial}{\partial x} g(x, y, z), \frac{\partial}{\partial y} g(x, y, z), \frac{\partial}{\partial z} g(x, y, z) \right) = (yz, xz, xy) \neq \vec{0}$ für alle (x, y, z) , welche die Nebenbedingung erfüllen.

$$F(x, y, z, \lambda) = xy + 2xz + 2yz + \lambda(xyz - V)$$

$$F_x(x, y, z, \lambda) = y + 2z + \lambda yz = 0 \Rightarrow xy + 2xz + \lambda xyz = 0 \quad (\text{I})$$

$$F_y(x, y, z, \lambda) = x + 2z + \lambda xz = 0 \Rightarrow xy + 2yz + \lambda xyz = 0 \quad (\text{II})$$

$$F_z(x, y, z, \lambda) = 2x + 2y + \lambda xy = 0 \Rightarrow 2xz + 2yz + \lambda xyz = 0 \quad (\text{III})$$

$$F_\lambda(x, y, z, \lambda) = xyz - V = 0 \Rightarrow xyz = V \quad (\text{IV})$$

$$(I), (II) \Rightarrow 2xz = 2yz \Rightarrow x = y$$

$$(I), (III) \Rightarrow xy + 2xz = 4xz \Rightarrow xy = 2xz \Rightarrow z = \frac{1}{2}y = \frac{1}{2}x$$

$$(IV) \Rightarrow xyz = \frac{1}{2}x^3 = V \Rightarrow x = \sqrt[3]{2V} = y, \quad z = \frac{1}{2}\sqrt[3]{2V}$$

$$f(\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{2V}, \frac{1}{2}\sqrt[3]{2V}) = \sqrt[3]{108\sqrt[3]{V}^2} \approx 4,76\sqrt[3]{V} < f(\sqrt[3]{V}, \sqrt[3]{V}, \sqrt[3]{V}) = 5\sqrt[3]{V}^2$$

Die Oberfläche ist minimal für $(x, y, z) = (\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{2V}, \frac{1}{2}\sqrt[3]{2V})$

Anwendungsbeispiel 10.26 Kostenminimierung

Die Kostenfunktion $K(r_1, \dots, r_n)$ für die Produktion mit n Inputfaktoren und dem Output (Produktionsfunktion) $x(r_1, \dots, r_n)$ ist eine Funktion der Mengen r_1, \dots, r_n der n verschiedenen Inputfaktoren. Soll ein vorgegebener Output $x(r_1, \dots, r_n) = c$ mit minimalen Kosten produziert werden, so ist ein Minimum der Funktion $K(r_1, \dots, r_n)$ gesucht unter der Nebenbedingung $g(r_1, \dots, r_n) = x(r_1, \dots, r_n) - c = 0$. Das Minimum erhält man aus der Lösung des Gleichungssystems

$$\text{grad } F(r_1, \dots, r_n, \lambda) = \vec{0}$$

mit der Lagrange-Funktion

$$F(r_1, \dots, r_n, \lambda) = K(r_1, \dots, r_n) + \lambda g(r_1, \dots, r_n) = K(r_1, \dots, r_n) + \lambda(x(r_1, \dots, r_n) - c)$$

10.5 Aufgaben

Aufgabe 10.1

Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen alle Stellen, an denen die Funktionen lokale Extrema besitzen und bestimmen Sie die Art der Extrema. Bestimmen Sie, ob es sich bei einem Extremum um ein Maximum oder Minimum handelt und ob das Extremum isoliert ist.

a) $f(x, y) = 2x^3 + 4xy - 2y^3 + 5$

b) $f(x, y) = \ln(xy) - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2$

c) $f(x, y) = x^4 - 2x^2 - 2y^3 + 3y^2$

d) $f(x, y) = 2x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2$

e) $f(x, y) = x^3 - 3xy^2$

f) $f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{-(x^2 + y^2)}$

g) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy + 2z + x$

h) $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^2 - 2(x^2 + y^2 + z^2)$

Aufgabe 10.2

Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen alle Stellen, an denen die Funktionen Extrema unter den angegebenen Nebenbedingungen besitzen und bestimmen Sie die Art der Extrema (Maximum oder Minimum).

a) $f(x, y) = xy$

$g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$

b) $f(x, y) = xy^2$

$g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$

c) $f(x, y) = 3x^3 + 3y^3 - x - y$

$g(x, y) = x + y - 2 = 0$

d) $f(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 + y^2)$

$g(x, y) = x + y - 2 = 0$

e) $f(x, y) = e^{-(x^2 + y^2)}$

$g(x, y) = x + y - 1 = 0$

f) $f(x, y, z) = e^{-(x^2 + y^2 + z^2)}$

$g(x, y, z) = x + y + z - 3 = 0$

g) $f(x, y, z) = e^{-(x + y + z)}$

$g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$

h) $f(x, y, z) = -3x + y + 5z$

$g_1(x, y, z) = x + y + z = 0$

$g_2(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$

11 Integralrechnung mit Funktionen von mehreren Variablen

11.1 Bereichsintegrale

Einführungsbeispiel 11.1 Ladung auf einer Oberfläche

Befindet sich eine Punktladung Q im Abstand h über einer leitenden (unendlich ausgedehnten) Ebene (x - y -Ebene), so stellt sich auf der Ebene eine Ladungsverteilung ein, die durch folgende Flächenladungsdichte beschrieben wird:

$$\sigma(x, y) = -\frac{hQ}{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{(x^2 + y^2 + h^2)^3}}$$

Die Frage nach der Ladung Q_A auf einer Fläche $A \subset \mathbb{R}^2$ führt zu dem Bereichsintegral

$$Q_A = \iint_A \sigma(x, y) dF.$$

11.1.1 Bereichsintegral einer Funktion von zwei Variablen

Um ein Bereichsintegral einer Funktion von zwei Variablen zu erläutern und zu klären, wie es berechnet werden kann, betrachten wir das Einführungsbeispiel 11.1. Auf der in Bild 11.1 gezeigten Fläche A sei eine Ladung verteilt. Die Verteilung werde beschrieben durch eine Ladungsverteilungsfunktion $\sigma(x, y)$. Nimmt man an, dass die Funktion $\sigma(x, y)$ in A stetig oder sogar differenzierbar ist und in einer kleinen Teilfläche ΔA mit Flächeninhalt ΔF nicht sehr stark variiert, so ist die Ladung ΔQ auf der Teilfläche ΔA näherungsweise $\sigma(x, y)\Delta F$, wobei (x, y) eine Stelle auf der Fläche ΔA ist. Die Fläche A wird nun in n kleine Teilflächen ΔA_i mit den Flächeninhalten ΔF_i und den Ladungen $\Delta Q_i \approx \sigma(x_i, y_i)\Delta F_i$ zerlegt, wobei (x_i, y_i) eine Stelle auf der Fläche ΔA_i ist (s. Bild 11.2).

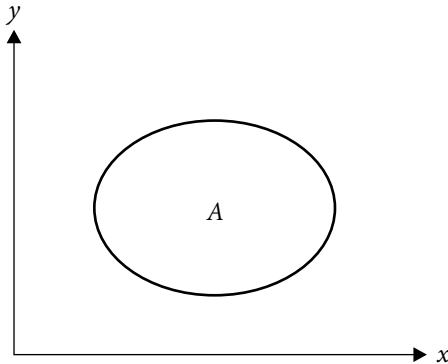


Bild 11.1

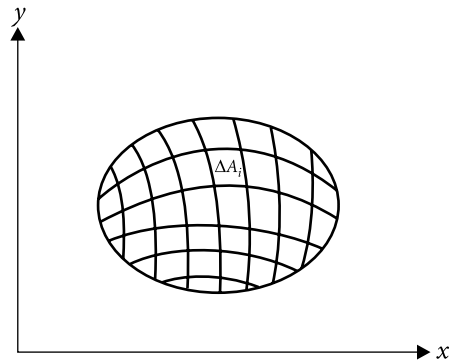


Bild 11.2

Für die Gesamtladung Q_A gilt

$$Q_A \approx \sum_{i=1}^n \Delta Q_i = \sum_{i=1}^n \sigma(x_i, y_i) \Delta F_i$$

Im Grenzprozess einer „unendlich feinen“ Zerlegung, d.h. für $n \rightarrow \infty$ und $\Delta F_i \rightarrow 0$ erhält man die Ladung Q_A exakt.

$$Q_A = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta F_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n \sigma(x_i, y_i) \Delta F_i = \iint_A \sigma(x, y) dF \quad (11.1)$$

Dieser Grenzwert heißt *Bereichs-, Gebiets- oder Flächenintegral* der Funktion $\sigma(x, y)$ über den Bereich (Fläche) A und wird durch ein Zweifachintegral dargestellt.

Bereichsintegral einer Funktion von zwei Variablen

$A \subset \mathbb{R}^2$ sei ein Bereich im \mathbb{R}^2 mit endlichem Flächeninhalt $F \neq 0$. Die Funktion $f(x, y)$ sei in A beschränkt und stetig. Z_n sei eine Zerlegung des Bereiches A in n Teilbereiche ΔA_i mit den Flächeninhalten ΔF_i und beliebigen Stellen $(x_i, y_i) \in \Delta A_i$. Gilt für alle Folgen (Z_n) von Zerlegungen mit $n \rightarrow \infty$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta F_i = 0$

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta F_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta F_i = I \quad (11.2)$$

dann heißt I das *Bereichsintegral* der Funktion $f(x, y)$ über den Bereich A .

Schreibweise: $I = \iint_A f(x, y) dF$

Für Bereichsintegrale von Funktionen von zwei Variablen gelten folgende Aussagen:

$a, b \in \mathbb{R}$ seien reelle Zahlen und $A, B \subset \mathbb{R}^2$ zwei Bereiche mit endlichen Flächeninhalten $F_A, F_B \neq 0$, die höchstens Randpunkte gemeinsam haben. Dann gilt:

$$F_A = \iint_A dF \quad (11.3)$$

$$\iint_A (af(x, y) + bg(x, y)) dF = a \iint_A f(x, y) dF + b \iint_A g(x, y) dF \quad (11.4)$$

$$\iint_{A \cup B} f(x, y) dF = \iint_A f(x, y) dF + \iint_B f(x, y) dF \quad (11.5)$$

11.1.1.1 Integration in kartesischen Koordinaten

Um zu klären, wie das Bereichsintegral (11.1) berechnet werden kann, betrachten wir einen Bereich A , wie er in Bild 11.3 zu sehen ist. Für diesen Bereich A gilt

$$A = \{(x, y) \mid x_1 \leq x \leq x_2 \wedge y_1(x) \leq y \leq y_2(x)\} \quad (11.6)$$

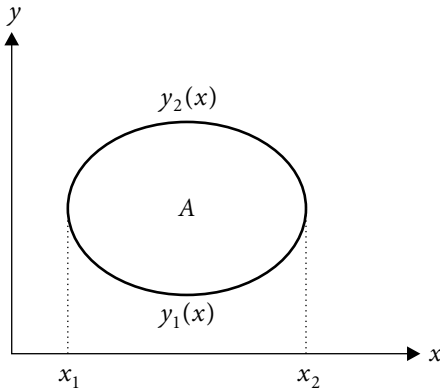


Bild 11.3

Wir zerlegen die Fläche A in streifenförmige Teilflächen ΔA_j der Breite Δx_j an den Stellen x_j und zerlegen jeden Streifen in Teilflächen ΔA_{jk} mit der Höhe Δy_k an den Stellen (x_j, y_k) , wie in Bild 11.4 gezeigt. Außer der obersten und untersten Teilfläche sind alle diese Teilflächen Rechtecke mit den Seitenlängen $\Delta x_j, \Delta y_k$ und den Flächeninhalten $\Delta F_{jk} = \Delta x_j \Delta y_k$. Für die Ladung ΔQ_{jk} auf der Teilfläche ΔA_{jk} gilt

$$\Delta Q_{jk} \approx \sigma(x_j, y_k) \Delta x_j \Delta y_k$$

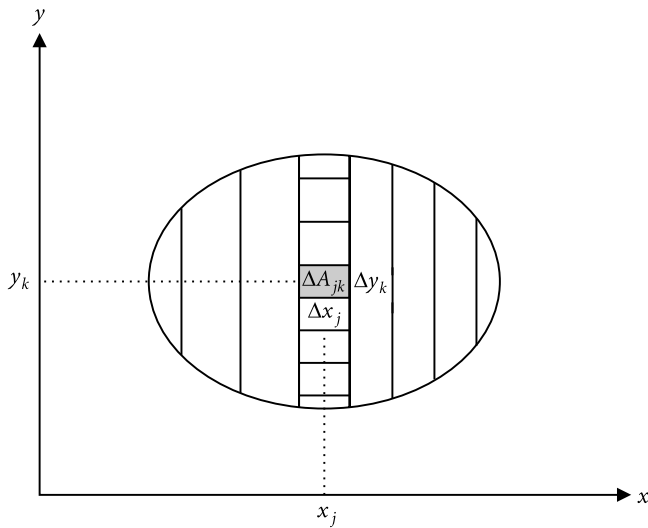


Bild 11.4

Für die Ladung ΔQ_j auf dem Streifen ΔA_j gilt

$$\Delta Q_j \approx \sum_k \sigma(x_j, y_k) \Delta x_j \Delta y_k = \left(\sum_k \sigma(x_j, y_k) \Delta y_k \right) \Delta x_j$$

Für die Ladung Q_A auf der Fläche A gilt

$$Q_A \approx \sum_j \left(\sum_k \sigma(x_j, y_k) \Delta y_k \right) \Delta x_j$$

Im Grenzprozess einer „unendlich feinen“ Zerlegung $\Delta y_k \rightarrow 0$ erhält man

$$\sum_j \left(\sum_k \sigma(x_j, y_k) \Delta y_k \right) \Delta x_j \rightarrow \sum_j \left(\int_{y_1(x_j)}^{y_2(x_j)} \sigma(x_j, y) dy \right) \Delta x_j .$$

Im Grenzprozess einer „unendlich feinen“ Zerlegung $\Delta x_j \rightarrow 0$ erhält man

$$\sum_j \left(\int_{y_1(x_j)}^{y_2(x_j)} \sigma(x_j, y) dy \right) \Delta x_j \rightarrow \int_{x_1}^{x_2} \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \sigma(x, y) dy \right) dx .$$

Damit ist die Berechnung dieses Flächenintegrals zurückgeführt auf zwei aufeinander folgende Integrationen. Die Integrationsgrenzen bei dem Integral mit der Integrationsvariablen y hängen von x ab und sind damit Funktionen von x . Die in Bild 11.3

gezeigte Fläche A könnte man statt in der Form (11.6) auch folgendermaßen beschreiben (s. Bild 11.5):

$$A = \{(x, y) \mid y_1 \leq y \leq y_2 \wedge x_1(y) \leq x \leq x_2(y)\}$$

Für das Bereichsintegral über die Fläche A gilt damit:

$$\iint_A \sigma(x, y) dF = \int_{y_1}^{y_2} \left(\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} \sigma(x, y) dx \right) dy$$

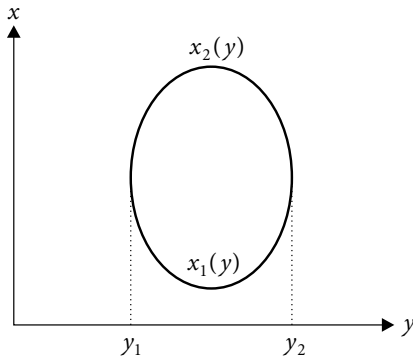


Bild 11.5

Die Ergebnisse lassen sich folgendermaßen zusammenfassen:

Bereichsintegrale im \mathbb{R}^2 in kartesischen Koordinaten

$f(x, y)$ sei eine in $A \in \mathbb{R}^2$ stetige Funktion. Ist A gegeben durch

$$A = \{(x, y) \mid x_1 \leq x \leq x_2 \wedge y_1(x) \leq y \leq y_2(x)\} \quad (11.7)$$

mit zwei stetigen Funktionen $y_1(x), y_2(x)$, dann gilt

$$\iint_A f(x, y) dF = \int_{x_1}^{x_2} \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy \right) dx \quad (11.8)$$

Ist A gegeben durch

$$A = \{(x, y) \mid y_1 \leq y \leq y_2 \wedge x_1(y) \leq x \leq x_2(y)\} \quad (11.9)$$

mit zwei stetigen Funktionen $x_1(y), x_2(y)$, dann gilt

$$\iint_A f(x, y) dF = \int_{y_1}^{y_2} \left(\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx \right) dy \quad (11.10)$$

Mengen A mit der Eigenschaft (11.7) oder (11.9) heißen *Normalbereiche*.

Beispiel 11.2 Flächenmoment eines Viertelkreises

A sei ein Viertelkreis mit Radius R und Kreismittelpunkt im Koordinatenursprung:

$$A = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq R \wedge 0 \leq y \leq \sqrt{R^2 - x^2}\}$$

Für das Flächenmoment $I_x = \iint_A y^2 dF$ erhält man

$$\begin{aligned} I_x &= \iint_A y^2 dF = \int_0^R \left(\int_0^{\sqrt{R^2 - x^2}} y^2 dy \right) dx = \int_0^R \left[\frac{1}{3} y^3 \right]_0^{\sqrt{R^2 - x^2}} dx = \frac{1}{3} \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2}^3 dx \\ &= \frac{1}{3} \left[\frac{x}{4} \sqrt{R^2 - x^2}^3 + \frac{3}{8} R^2 x \sqrt{R^2 - x^2} + \frac{3}{8} R^4 \arcsin\left(\frac{x}{R}\right) \right]_0^R \\ &= \frac{1}{8} R^4 \arcsin(1) = \frac{\pi}{16} R^4 \end{aligned}$$

Beispiel 11.3 Flächeninhalt eines Halbkreises

A sei ein Halbkreis mit Radius R und Kreismittelpunkt im Koordinatenursprung:

$$A = \{(x, y) \mid -R \leq x \leq R \wedge 0 \leq y \leq \sqrt{R^2 - x^2}\}$$

$$\begin{aligned} F &= \iint_A dF = \int_{-R}^R \left(\int_0^{\sqrt{R^2 - x^2}} dy \right) dx = \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - x^2} dx = \left[\frac{x}{2} \sqrt{R^2 - x^2} + \frac{R^2}{2} \arcsin\left(\frac{x}{R}\right) \right]_{-R}^R \\ &= \frac{R^2}{2} \arcsin(1) - \frac{R^2}{2} \arcsin(-1) = \frac{\pi}{2} R^2 \end{aligned}$$

Beispiel 11.4 Geometrischer Schwerpunkt eines Halbkreises

$$A = \{(x, y) \mid -R \leq x \leq R \wedge 0 \leq y \leq \sqrt{R^2 - x^2}\}$$

Die y -Komponente y_S des geometrischen Schwerpunktes ist

$$\begin{aligned} y_S &= \frac{1}{F} \iint_A y dF = \frac{1}{F} \int_{-R}^R \left(\int_0^{\sqrt{R^2 - x^2}} y dy \right) dx = \frac{1}{F} \int_{-R}^R \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_0^{\sqrt{R^2 - x^2}} dx = \frac{1}{2F} \int_{-R}^R (R^2 - x^2) dx \\ &= \frac{1}{2F} \cdot \frac{4}{3} R^3 = \frac{4}{3\pi} R \end{aligned}$$

Für rechteckige Normalbereiche mit Seiten parallel zu den Koordinatenachsen sind die Integrationsgrenzen Konstanten.

16 Lineare Optimierung

Einführungsbeispiel 16.1 Optimales Produktionsprogramm

Ein mittelständisches Unternehmen produziert zwei Artikel (Artikel A_1 und Artikel A_2). Der Artikel A_1 benötigt je Mengeneinheit eine Herstellungszeit von 0,5 Stunden auf Maschine M_1 , zwei Stunden auf Maschine M_2 und 1,5 Stunden auf Maschine M_3 . Der Artikel A_2 benötigt je Mengeneinheit eine Herstellungszeit von zwei Stunden auf Maschine M_1 , drei Stunden auf Maschine M_2 und 0,5 Stunden auf Maschine M_3 . Die Maschine M_1 steht täglich 12 Stunden, die Maschine M_2 23 Stunden und die Maschine M_3 12 Stunden zur Verfügung. Mit einer Mengeneinheit von Artikel A_1 erzielt man einen Gewinn von 2000 €, mit einer Mengeneinheit von Artikel A_2 einen Gewinn von 4000 €. Es werden täglich x_1 Mengeneinheiten von Artikel A_1 und x_2 Mengeneinheiten von Artikel A_2 produziert. Es stellt sich die Frage, wie x_1 und x_2 gewählt werden müssen, damit der Gewinn maximal wird.

16.1 Grafische Lösung und Simplex-Algorithmus

In vielen Fällen führt die Suche nach der optimalen Lösung einer Problemstellung auf die Suche nach dem Maximum oder Minimum einer bestimmten Größe, z.B. zur

- Maximierung des Gewinns
- Minimierung von Kosten

Die Größe, die maximiert oder minimiert werden soll, hängt i.d.R. von mehreren anderen Größen ab, die variiert werden können, um ein Optimum (Maximum oder Minimum) zu erhalten. Die mathematische Aufgabenstellung ist die Bestimmung des Extremums einer Funktion von mehreren Variablen. Die Größen, die variiert werden können (Variablen), dürfen i.d.R. jedoch nicht beliebig variiert werden, sondern müssen bestimmten Nebenbedingungen genügen. Sind die Nebenbedingungen und die zu maximierende bzw. minimierende Funktion linear in den Variablen, so spricht man von *linearer Optimierung*. Für lineare Optimierung wird im Folgenden häufig die Kurzschreibweise *LO* verwendet. Beim Einführungsbeispiel 16.1 ist dies der Fall.

Die Suche nach dem optimalen Produktionsprogramm ist ein typisches Beispiel für lineare Optimierung. Anhand dieses Beispiels soll die Problemstellung und Lösung dargestellt werden.

Die Angaben im Einführungsbeispiel 16.1 führen zu folgenden Größen und Beziehungen:

Gewinn an einem Tag:	$G = x_1 2000\text{€} + x_2 4000\text{€}$ $= (x_1 + 2x_2) 2000\text{€}$
Tägl. Einsatzzeit der Maschine M_1 :	$t_1 = x_1 0,5\text{h} + x_2 2\text{h} \leq 12\text{h}$
Tägl. Einsatzzeit der Maschine M_2 :	$t_2 = x_1 2\text{h} + x_2 3\text{h} \leq 23\text{h}$
Tägl. Einsatzzeit der Maschine M_3 :	$t_3 = x_1 1,5\text{h} + x_2 0,5\text{h} \leq 12\text{h}$

Die mathematische Problemstellung lautet (Um ganze Zahlen zu erhalten, wurden zwei Ungleichungen mit der Zahl 2 multipliziert.):

Gesucht ist das Maximum der Funktion	$Z(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2$
unter den Nebenbedingungen	$x_1 + 4x_2 \leq 24$ $2x_1 + 3x_2 \leq 23$ $3x_1 + x_2 \leq 24$ $x_1, x_2 \geq 0$

Dieses Problem hat die Form eines LO-Problems in der Standard- oder Grundform.

Grundform eines LO-Problems

Maximiere die Funktion	$Z(x_1, \dots, x_n) = c_1 x_1 + \dots + c_n x_n$	(16.1)
------------------------	--	--------

unter den m Nebenbedingungen	$a_{11} x_1 + \dots + a_{1n} x_n \leq b_1$	(16.2)
	$a_{21} x_1 + \dots + a_{2n} x_n \leq b_2$	
	\vdots	

$a_{m1} x_1 + \dots + a_{mn} x_n \leq b_m$	(16.3)
$x_1, \dots, x_n \geq 0$	

Die Funktion $Z(x_1, \dots, x_n) = c_1 x_1 + \dots + c_n x_n$ heißt **Zielfunktion**.

Die Variablen x_1, \dots, x_n werden **Strukturvariablen** genannt.

Die Zahlen b_1, \dots, b_m heißen **Restriktionswerte** oder **Primalwerte**.

Die Zahlen c_1, \dots, c_n nennt man **Zielfunktionskoeffizienten** oder **Dualwerte**.

Die Zahlen a_{ij} heißen **technische Koeffizienten**.

16.1.1 Grafische Lösung

Hat man nur zwei Variablen, so kann man die Lösung eines LO-Problems grafisch ermitteln. Dies soll anhand des Einführungsbeispiels 16.1 geschehen.

Gesucht ist das Maximum der Funktion	$Z(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2$
unter den Nebenbedingungen	$x_1 + 4x_2 \leq 24$ $2x_1 + 3x_2 \leq 23$ $3x_1 + x_2 \leq 24$ $x_1, x_2 \geq 0$

Die Nebenbedingungen können folgendermaßen formuliert werden:

$$x_2 \leq -\frac{1}{4}x_1 + 6$$

$$x_2 \leq -\frac{2}{3}x_1 + \frac{23}{3}$$

$$x_2 \leq -3x_1 + 24$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

Die Menge der Punkte (x_1, x_2) in einem kartesischen Koordinatensystem, für welche diese fünf Nebenbedingungen erfüllt sind, wird eingegrenzt durch die fünf Geraden

$$g_1: x_2 = -\frac{1}{4}x_1 + 6$$

$$g_2: x_2 = -\frac{2}{3}x_1 + \frac{23}{3}$$

$$g_3: x_2 = -3x_1 + 24$$

$$g_4: x_1 = 0$$

$$g_5: x_2 = 0$$

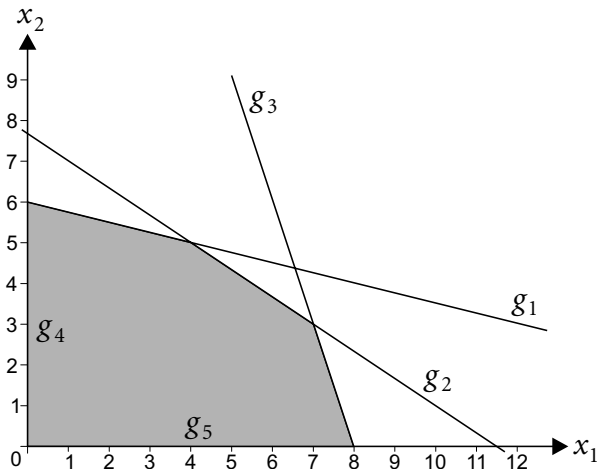


Bild 16.1

Diese in Bild 16.1 grau schattiert dargestellte Menge wird *zulässiger Bereich* genannt. Gesucht ist der Punkt im zulässigen Bereich, für den $Z = x_1 + 2x_2$ maximal wird. Für einen festen Wert von Z liegen die Punkte mit $Z = x_1 + 2x_2$ auf einer Geraden mit

$$x_2 = -\frac{1}{2}x_1 + \frac{Z}{2}$$

Die Steigung dieser Geraden ist $-\frac{1}{2}$. Sie schneidet die x_2 -Achse bei dem x_2 -Wert

$$x_2 = \frac{Z}{2}$$

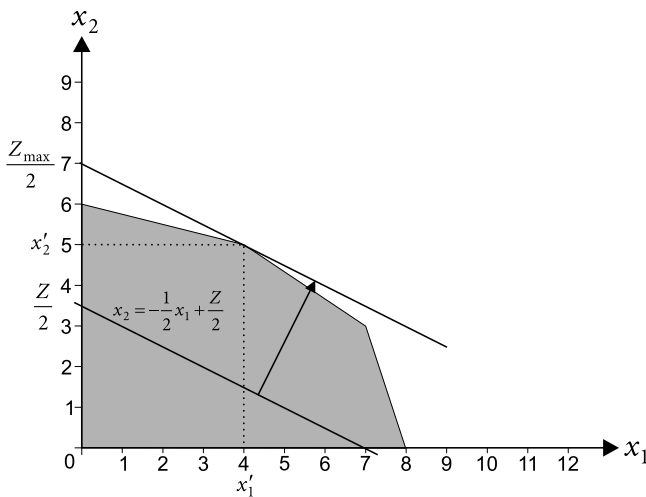


Bild 16.2

Durch Parallelverschiebung dieser Geraden (Beibehaltung der Steigung) nach oben vergrößern wir den Wert von Z . Dies tun wir so lange, bis gerade noch ein Punkt auf der Geraden im zulässigen Bereich liegt. Für diesen Punkt (x'_1, x'_2) beträgt der Wert der Zielfunktion

$$Z = x'_1 + 2x'_2 = Z_{\max}$$

Für jeden größeren Wert $Z > Z_{\max}$ liegen alle Punkte auf der Geraden

$$Z = x_1 + 2x_2$$

außerhalb des zulässigen Bereiches. Der Wert Z_{\max} ist das gesuchte Maximum, die Werte x'_1 und x'_2 sind die gesuchten Werte von x und y , für welche die Zielfunktion maximal wird. In unserem Beispiel erhält man folgende Werte: $x'_1 = 4$, $x'_2 = 5$, $Z_{\max} = 14$.

16.1.2 Der Simplex-Algorithmus

Die Grundform eines LO-Problems lautet:

$$\text{Maximiere die Funktion} \quad Z(x_1, \dots, x_n) = c_1 x_1 + \dots + c_n x_n \quad (16.4)$$

$$\begin{aligned} \text{unter den Nebenbedingungen} \quad & a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ & a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ & \vdots \end{aligned} \quad (16.5)$$

$$\begin{aligned} & a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m \\ & x_1, \dots, x_n \geq 0 \end{aligned} \quad (16.6)$$

Ein Punkt bzw. Element $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ mit der Eigenschaft, dass die Zahlen x_1, \dots, x_n alle Nebenbedingungen (16.5) und (16.6) erfüllen, heißt *zulässige Lösung* des LO-Problems. Die Menge aller zulässigen Lösungen heißt *zulässiger Bereich*. Bei zwei Variablen ist der zulässige Bereich ein Bereich im \mathbb{R}^2 , der von Geraden eingegrenzt wird. Die Eckpunkte des zulässigen Bereiches sind Schnittpunkte zweier Geraden. Bei drei Variablen ist der zulässige Bereich ein Bereich im \mathbb{R}^3 , der von Ebenen eingegrenzt wird. Die Eckpunkte des zulässigen Bereiches sind Schnittpunkte dreier Ebenen. Eine zulässige Lösung mit der Eigenschaft, dass es keine andere zulässige Lösung mit einem größeren Wert der Zielfunktion gibt, heißt die *optimale Lösung* des LO-Problems. Da die Ungleichung

$$a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i$$

äquivalent ist zu

$$a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n = b_i - y_i \quad \text{mit } y_i \geq 0$$

bzw. zu

$$a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n + y_i = b_i \quad \text{mit } y_i \geq 0,$$

kann ein LO-Problem in der Grundform auch folgendermaßen formuliert werden:

$$\text{Maximiere die Funktion} \quad Z(x_1, \dots, x_n) = c_1 x_1 + \dots + c_n x_n \quad (16.7)$$

$$\begin{aligned} \text{unter den Nebenbedingungen} \quad & a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n + y_1 = b_1 \\ & a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n + y_2 = b_2 \\ & \vdots \end{aligned} \quad (16.8)$$

$$\begin{aligned} & a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n + y_m = b_m \\ & x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m \geq 0 \end{aligned} \quad (16.9)$$

Die Variablen y_1, \dots, y_m heißen *Schlupfvariablen* oder *Leerlaufvariablen*. In dieser Formulierung lautet das LO-Problem des Einführungsbeispiels 16.1:

$$\begin{array}{ll} \text{Maximiere die Funktion} & Z(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2 \\ \text{unter den Nebenbedingungen} & x_1 + 4x_2 + y_1 = 24 \\ & 2x_1 + 3x_2 + y_2 = 23 \\ & 3x_1 + x_2 + y_3 = 24 \\ & x_1, x_2, y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{array}$$

Auf jeder Geraden, die den zulässigen Bereich eingrenzt, ist eine Variable Null. An jedem Eckpunkt des zulässigen Bereiches (Schnittpunkt zweier Geraden) sind zwei Variablen Null.

Gerade	Variable, die Null ist
$x_1 + 4x_2 = 24$	y_1
$2x_1 + 3x_2 = 23$	y_2
$3x_1 + x_2 = 24$	y_3
$x_1 = 0$	x_1
$x_2 = 0$	x_2

Eckpunkt	Variablen, die Null sind
$P_1 = (0,0)$	x_1, x_2
$P_2 = (0,6)$	x_1, y_1
$P_3 = (4,5)$	y_1, y_2
$P_4 = (7,3)$	y_2, y_3
$P_5 = (8,0)$	y_3, x_2

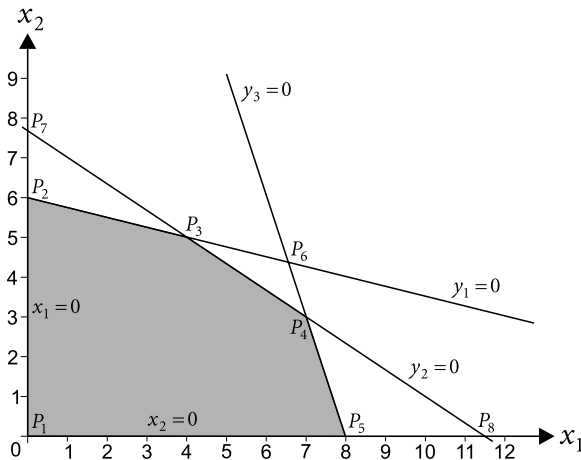


Bild 16.3

Nicht jeder Schnittpunkt ist Eckpunkt des zulässigen Bereiches. Die Punkte P_6, P_7, P_8 in Bild 16.3 gehören z.B. nicht zum zulässigen Bereich. Von den insgesamt zehn Schnittpunkten liegen fünf nicht im zulässigen Bereich. Diese Punkte sind dadurch gekennzeichnet, dass mindestens eine der drei Variablen, die nicht Null sind, einen negativen Wert hat.

Sachwortverzeichnis

A

- Abbildung 21
- Abgeschlossene Menge 232
- Ableitung 153, 154
 - , elementare Funktionen 160
 - nach einem Parameter 257
 - , partielle 250
- Ableitungsregeln 157, 160
- Abstand 66
 - eines Punktes von einer Ebene 67
 - eines Punktes von einer Gerade 66
 - zweier Geraden 68
 - zweier Punkte 66
- Additionstheoreme 142
- Algebraische Gleichung 45
- Alternativhypothese 432
- Anfangsbedingungen 305
- Anfangswertproblem 305
- Annahmestichprobenprüfung 381
- Anordnungsaxiome 23
- Areafunktionen 148
- Argument
 - einer Funktion 106
 - einer komplexen Zahl 33
- Arkusfunktionen 144
- Assoziativ 21
- Asymptote 121, 163
- Ausfallrate 375
- Aussage 15
- Aussageform 17
- Aussagenlogik 15

B

- Basis 60
- Basisvariable 470
- Basisvektoren 60

- Bayessche Formel 342
- Bereichsintegral 279, 280, 290
 - einer Funktion von drei Variablen 290
 - einer Funktion von zwei Variablen 280
 - in kartesischen Koordinaten 283, 292
 - in Kugelkoordinaten 295
 - in Polarkoordinaten 288
 - in Zylinderkoordinaten 293
- Beschreibende Statistik 394
- Bestimmtheitsmaß 413
- Betrag
 - einer komplexen Zahl 33
 - eines Vektors 56
- Bijektiv 109
- Bildmenge 106
- Binomialkoeffizient 27
- Binomialverteilung 365, 387
- Binomischer Lehrsatz 27
- Bivariate Statistik 394
- Bogenlänge 242
- Bogenmaß 139

C

- Cauchy-Schwarzsche Ungleichung 58
- Charakteristische Gleichung 316
- Chi-Quadrat-Anpassungstest 451, 452
- Chi-Quadrat-Homogenitätstest 456
- Chi-Quadrat-Unabhängigkeitstest 454
- Chi-Quadrat-Verteilung 379
- Computeralgebrasystem 498
- Cramersche Regel 96

D

- De Morgansche Regeln 20

Definitionsmenge 106
 Deskriptive Statistik 394
 –, bivariate 410
 –, univariate 396
 Determinante 81, 84
 – einer (2,2)-Matrix 82
 – einer (3,3)-Matrix 83
 –, Entwicklung 83
 Diagonalmatrix 76
 Dichotom 417
 Differenzialgleichung
 –, allgemeine Lösung 304
 –, erster Ordnung 306
 –, gewöhnliche 304
 –, homogene 306
 –, implizite Lösung 310
 –, lineare 306
 –, lineare, erster Ordnung 311
 –, lineare, zweiter Ordnung 315
 –, logistische 303, 308
 –, n-ter Ordnung 304
 –, partikuläre Lösung 304, 320
 –, separable 306
 –, Trennung der Variablen 306
 –, Variation der Konstanten 312, 317, 319
 – zweiter Ordnung 314
 Differenzialquotient 154
 Differenzierbarkeit 153, 255
 –, partielle 250
 Differenzmenge 20
 Disjunktion 15
 Diskriminante 46, 48
 Divergent 116
 Dreibein 240
 Dreiecksmatrix
 –, obere 76
 –, untere 76
 Dreiecksungleichung 56

E

Ebene 66
 Effiziente Schätzfunktion 418
 Einheitsmatrix 77
 Elastizität 181, 204

Elementare Funktionen 123
 –, Ableitung 160
 Empirische Verteilungsfunktion 397
 Entartung 481, 482
 Entwicklungspunkt 213, 216
 Ereignis 334
 Ereignisraum 334
 Ergebnismenge 334
 Erwartungstreue Schätzfunktion 418
 Erwartungswert 351, 354, 355, 360
 Eulersche Gleichung 38
 Eulersche Zahl 131
 Euler-Venn-Diagramm 19
 Explizite Funktion 115
 Exponentialdarstellung 38
 Exponentialfunktion 128
 –, Anwendungen 131
 –, Eigenschaften 131, 134
 – zur Basis a 133
 – zur Basis e 128
 Exponentialverteilung 376
 Extrema
 – mit Nebenbedingungen 275
 Extremaum
 – ohne Nebenbedingung 262
 Extremum 165, 261
 –, Funktionen von einer Variablen 165
 –, Funktionen von n Variablen 261, 269
 –, Funktionen von zwei Variablen 264
 –, globales 165
 –, lokales 165, 261
 – mit Nebenbedingungen 272

F

Fakultät 27
 Falk-Schema 78
 Fehler 1. Art 433
 Fehler 2. Art 434
 Fermat
 – Satz von 166
 Folgen 116
 Fourierentwicklung 223, 226
 Fourierkoeffizienten 224

Fourierreihe 224
 Fundamentalsatz der Algebra 45
 Funktion 106
 –, explizite Darstellung 115
 –, ganzrationale 123
 –, gebrochenrationale 125
 –, implizite Darstellung 115
 –, Parameterdarstellung 115
 –, von n Variablen 246
 Funktionsgleichung 106
 F-Verteilung 380

G

Gammafunktion 202, 207
 Ganze Zahlen 25
 Gaußsche Zahlenebene 33
 Gebrochenrationale Funktion 125
 Geometrische Folge 117
 Geometrische Reihe 210
 Gerade 65
 Gerade Funktion 112
 Geschwindigkeit 152
 Gesetz der großen Zahlen 388
 Gini-Koeffizient 409
 Glattheit 153
 Gleichung
 –, charakteristische 316
 –, Eulersche 38
 –, kubische 48
 –, lineare 46
 –, quadratische 46
 Gradient 250
 Graph 107, 247
 Grenzwert 247
 – einer Folge 116
 – einer Funktion 118, 121
 –, linksseitiger 119
 –, rechtsseitiger 119
 –, Regeln von L'Hospital 161
 Grenzwertsatz
 – von Moivre-Laplace 389
 – zentraler 388
 Grenzwertsätze 117, 120
 Grundgesamtheit 394
 –, dichotome 417

Grundintegrale 191
 Grundmenge 18
 Gruppe 22

H

Häufigkeit 397
 –, relative 397
 Häufigkeitstabelle 410
 Hesse-Matrix 251
 Histogramm 399
 Historamm 411
 Hyperbelfunktionen 146
 Hypergeometrische Verteilung 367, 386

I

Imaginäre Einheit 31
 Imaginäre Zahlen 31
 Imaginärteil 32
 Implikation 15
 Implizite Funktion 115
 Indefinit 269
 Indirekter Beweis 17
 Infimum 24
 Injektiv 108
 Integral
 –, bestimmtes 187
 –, Eigenschaften 192
 –, unbestimmtes 189
 –, uneigentliches 202
 Integralfunktion 188
 Integralkriterium 213
 Integration
 – durch Partialbruchzerlegung 198
 – durch Substitution 195
 –, logarithmische 197
 –, numerische 501
 –, partielle 193
 –, Trapezformel 502
 Integrationsmethoden 193
 Interner Zinssatz 30, 49
 Intervalle 25
 Intervallschätzung 422
 Inverse Matrix 80, 87, 98
 Inverses Element 21
 Investitionsrechnung 30

Irrtumswahrscheinlichkeit 423

K

Kettenlinie 148

Kettenregel 158, 160

Klassenbildung 398

Klassenhäufigkeit 399

–, relative 399

Klassensummenhäufigkeit 400

–, relative 400

Koeffizientenmatrix 88

–, erweiterte 88

Kombination 331

– mit Wiederholung 332

– ohne Wiederholung 331

Kombinatorik 327

Kommutativ 21

Komplement 20

Komplexe Zahlen 31, 32

Komplexe Zahlenebene 33

Komponentendarstellung 53

Kondition 100

Konditionszahl 101

Konfidenzintervall 423, 427

– für den Erwartungswert 427

– für den Korrelationskoeffizienten
428

– für den Parameter einer

Binomialverteilung 427, 428

– für die Varianz 427

– und statistischer Test 433, 442

Konfidenzniveau 423

Konjugiert komplexe Zahl 33

Konjunktion 15

Konkav 176

Konservativ 299

Konsistente Schätzfunktion 418

Konsumentenrente 205

Kontingenztafel 410

Konvergent 116, 211

–, absolut 211

Konvergenzradius 214

Konvex 176

Konzentrationsmaßzahl 407, 409

Koordinatendarstellung 53

Körper 22

Körperaxiom 23

Korrelationskoeffizient 360, 414

Kosinus Hyperbolicus 146

Kosinusfunktion 140, 141

Kotangens Hyperbolicus 146

Kotangensfunktion 142

Kovarianz 360, 414

Kovarianzmatrix 361

Krümmung 176, 177, 244

–, Linkskrümmung 176

–, Rechtskrümmung 176

Krümmungsradius 244

Kubische Gleichung 48

Kugelkoordinaten 235

Kurve 237

–, reguläre 237

Kurvendiskussion 178

Kurvenintegral 296, 297

L

L'Hospital

–, Grenzwertregeln 162

Lagemaßzahl 396, 402

Lagrange

–, Funktion 275

–, Multiplikatorenmethode 275

Laplace-Experiment 336

Leere Menge 18

Leerlaufvariable 468

Leibniz-Kriterium 212

Leontief-Modell 98

Lineare Gleichung 46

Lineare Optimierung 463

–, Entartung 481, 482

–, grafische Lösung 465

–, Grundform 464

–, Sonderfälle 476

Lineares Gleichungssystem 88

–, homogenes 88

–, quadratisches 93

Linearisierung 156, 255

Linearkombination 60

Logarithmusfunktion 132

–, dekadischer 135

–, dualer/binärer 135
–, Eigenschaften 133, 135
– zur Basis a 134
– zur Basis e 132
Lognormalverteilung 374
Lorenzkurve 408, 409

M

Mann-Whitney-Wilcoxon-Test 457
Maple 503
Maßzahlen 396
–, bivariate Statistik 413
Matrix 74
Matrixelemente 74
Matrixumformungen 85, 89
Maximum 24, 165, 261
–, absolutes 165
–, globales 165
–, isoliertes 165, 261
–, lokales 165, 261
Maximum-Likelihood
– -Funktion 420
– -Schätzung 420, 422
Median 403
Menge 18
Merkmal 394
Merkmalsarten 395
Merkmalsausprägungen 394
Mindeststichprobenumfang 437, 441, 443, 445
Minimum 24, 165, 261
–, absolutes 165
–, globales 165
–, isoliertes 165, 261
–, lokales 165, 261
Mittelwert 403, 413
Mittelwertsatz 168
Monotonie 113
Multivariate Statistik 394

N

Natürliche Zahlen 25
Negation 15
Negativ definit 269
Neutrales Element 21

Newton
– Tangentenverfahren 498
Nichtbasisvariable 470
Norm
– einer Matrix 101
– eines Vektors 56
Normalbereich 283, 292
Normalenvektor 66, 240
Normalverteilung 370
–, zweidimensionale 290, 384
Nullhypothese 432
Nullmatrix 76
Nullstelle 112
Nullvektor 54
Numerische Rechnungen 498

O

Offene Menge 232
Operationscharakteristik 381, 435
Optimale Lösung 467
Orthogonal 59
Orthogonale Vektoren 59
Orthonormalbasis 60
Ortsvektor 65

P

Parameterdarstellung 115
Parameterschätzung 417
Parametertest 443
Partialsomme 210
Partielle Ableitung 250
Partielle Integration 193
Partikuläre Lösung 320
Pascal-Dreieck 28
Periodizität 113
Permutation 327
– mit Wiederholung 328
– ohne Wiederholung 327
Pivotelement 472
Pivotspalte 471
Pivotzeile 471
Poissonverteilung 369, 387
Polarkoordinaten 36, 234
Polstelle 125
Polynomdivision 126

Polynomfunktion 123
 Positiv definit 269
 Potenzfunktion 136, 138
 Potenzreihe 213
 Produktmenge 20
 Produktregel 157, 160
 Produzentenrente 205
 Projektion eines Vektors 60
 Prozessfähigkeitskennzahlen 382
 Punktschätzung 422

Q

Quadratische Gleichung 46
 Quadratische Matrix 75
 Qualitätsregelkarte 451
 Quantil 354, 405, 428
 Quantoren 18
 Quotientenkriterium 212
 Quotientenregel 159, 160

R

Rand 233
 Randbedingungen 305
 Randdichte 358
 Randpunkt 232
 Randverteilung 358
 Randwertproblem 305
 Rang einer Matrix 92
 Rationale Zahlen 25
 Raum
 –, 2-dimensionaler 231
 –, 3-dimensionaler 231
 –, n-dimensionaler 231
 Realisierung 347, 357
 Realteil 32
 Rechte-Hand-Regel 62
 Rechtssystem 52
 Reelle Zahlen 23
 Reihe
 –, divergente 211
 –, endliche 210
 –, geometrische 210, 212
 –, konvergente 211
 –, trigonometrische 222
 –, unendliche 211

Relative Häufigkeit 397
 Relative Klassenhäufigkeit 399
 Relative Klassensummenhäufigkeit 400
 Relative Summenhäufigkeit 397
 Rentenrechnung 211
 Restglied 217
 Richtungswinkel 59
 Rolle
 –, Satz von 167

S

Sattelpunkt 265
 Sättigungsprozess 303
 Säulendiagramm 411, 412
 Schätzfunktion 417
 –, effiziente 418
 –, Eigenschaften 418
 –, erwartungstreue 418
 –, konsistente 418
 Schließenden Statistik 416
 Schlupfvariable 468
 –, gesperrte 479
 Schmiegeebene 240
 Schnittmenge 19
 Schraubenlinie 238, 241, 243, 245
 Schwarz
 –, Satz von 252
 Schwingung 47, 144, 322
 Signifikanz 442
 Signifikanzniveau 438
 Simplex-Algorithmus 470, 485
 –, Sonderfälle 476
 Simplex-Tableau 470, 484
 –, Umrechnung 474
 Sinus Hyperbolicus 146
 Sinusfunktion 140, 141
 Skalarprodukt 55
 Spaltenmatrix 75
 Spaltenvektor 53
 Spannweite 406
 Spatprodukt 64
 Stabdiagramm 397
 Stammfunktion 188
 Standardabweichung 351, 356, 406
 Standardbasis 61

- Standardnormalverteilung 372
 Statistik
 –, beschreibende 394
 –, bivariate 394
 –, deskriptive 394
 –, multivariate 394
 –, schließende 416
 –, univariate 394
 Statistische Einheiten 394
 Statistische Prozessregelung 450
 Statistischer Test 417, 432
 –, Alternativhypothese 432
 –, einseitiger 438
 –, Fehler 1. Art 433
 –, Fehler 2. Art 434
 –, Nullhypothese 432
 –, Signifikanz 442
 –, Signifikanzniveau 438
 – und Konfidenzintervall 433, 442
 –, zweiseitiger 437
 –, Zweistichprobentest 442
 Steigung 153
 Stetigkeit 122, 248
 Stichprobe 394
 – mit Klassenbildung 398
 –, unverbundene 442
 –, verbundene 442
 Stichprobefunktion 417
 Stichprobenprüfung 381
 Stichprobenumfang 394
 Stochastische Unabhängigkeit 341, 359
 Streudiagramm 412
 Streuungsmaßzahl 396, 402, 406
 Strukturvariable 464
 –, freie 477
 Substitution 195
 Summenhäufigkeit 397
 –, relative 397
 Supremum 24
 Surjektiv 109
 Symbolischen Rechnungen 498
 Symmetrische Matrix 76
- T**
- Tangens Hyperbolicus 146
 Tangensfunktion 142
 Tangente 156
 Tangentenverfahren von Newton 498
 Tangentialvektor 240
 Taylorentwicklung 216, 259
 Taylorpolynom 218
 Taylorreihe 216
 Teilmenge 19
 Test
 – für den Erwartungswert 443, 444
 – für den Korrelationskoeffizienten 449
 – für den Parameter einer Binomialverteilung 445
 – für den Vergleich der Parameter zweier Binomialverteilungen 449
 – für den Vergleich zweier Erwartungswerte 447
 – für den Vergleich zweier Varianzen 448
 – für die Varianz 444
 Totales Differenzial 255
 Transponierte Matrix 75
 Transportalgorithmus 491
 Transportproblem 487
 –, geschlossenes 488
 –, offenes 490
 Trapezformel 502
 Trennung der Variablen 306
 Trigonometrische Funktionen 139
 –, Eigenschaften 143
 –, Produkte 142
 –, Summen und Differenzen 142
 Trigonometrische Reihe 222
 t-Verteilung 378
- U**
- Überlebensfunktion 375
 Umgebung 25, 232
 Umkehrfunktion 110
 –, Ableitung 159, 160
 Uneigentliches Integral 202
 Unendliche Reihe 211
 Ungerade Funktion 112
 Univariate Statistik 394

V

- Varianz 351, 356, 360, 406, 413
- Variation 329
 - mit Wiederholung 330
 - ohne Wiederholung 329
- Variation der Konstanten 312, 317, 319
- Vektor 52
- Vektorfeld 297
 - , konservatives 299
- Vektorprodukt 61
- Vektorraum 55
- Vektorrechnung 51
- Vereinigungsmenge 19
- Verknüpfung 21
- Verteilungsfunktion 348, 352, 357
 - , empirische 397
- Vertrauensintervall 422, 423
- Vertrauensniveau 423
- Verzinsung 118
 - , stetige 127
- Vielfachheiten 46, 124
- Vollständige Induktion 26
- Vollständigkeitsaxiom 24
- Volumenberechnung 292, 294, 295

W

- Wachstumsprozess 303
- Wahrscheinlichkeit
 - , Axiome nach Kolmogorov 339
 - , bedingte 338, 340
 - , Eigenschaften/Rechenregeln 343
 - , klassische 336
 - nach Laplace 336
 - , statistische 336
 - , totale 342
- Wahrscheinlichkeitsdichte 352, 357
- Wahrscheinlichkeitsfunktion 348
- Weibullverteilung 377

- Wellen 43, 144
- Wendepunkt 176
- Wertemenge 107, 347
- Windschiefe Gerade 68
- Winkel
 - in Bogenmaß 139
 - in Grad 140
- Winkel zwischen Vektoren 58
- Wronski-Determinante 315
- Wurzel 39
 - Wurzel ziehen 39
- Wurzelfunktion 137
- Wurzelkriterium 213

Z

- Zeilenmatrix 75
- Zeilenvektor 53
- Zentraler Grenzwertsatz 388
- Zielfunktion 464
- Zinssatz 118
 - , interner 30, 49
- Zufallsexperiment 334
- Zufallsstichprobe 416
 - , einfache 417
- Zufallsvariable 347
 - , diskrete 348
 - , Realisierung 347
 - , stetige 352
- Zufallsvariablen
 - , Korrelation 360
 - , stochastische Unabhängigkeit 359
 - , Summen 361
- Zufallsvektor 357
- Zulässige Basislösung 469
- Zulässige Lösung 467
- Zulässiger Bereich 466, 467
- Zykloide 115, 238, 243
- Zylinderkoordinaten 235