Grundlagen der Elektrotechnik

Eine Einführung in die Gleich- und Wechselstromtechnik

Lösungen der Übungsaufgaben aus Kapitel 1

Reinhard Scholz

16. Juli 2018

Die Lösung der Übungsaufgaben erfolgt zunächst analytisch in allgemeiner Form. Anschließend wird die numerische Lösung angegeben, die mit einem Taschenrechner oder mit Octave nachvollzogen werden kann. In den beiliegenden Octave-Skripten ist es aus syntaktischen Gründen nicht möglich, alle im Text benutzten Variablennamen zu verwenden. Die Anpassung wurde jedoch so vorgenommen, dass eine Zuordnung leicht möglich ist.

Teilweise weicht die Vorgehensweise bei der Berechnung mit Octave deutlich von der analytischen Methode ab. Dies ist beispielsweise bei der Lösung von quadratischen Gleichungen der Fall. Hier wird nicht die quadratische Ergänzung verwendet, sondern die Koeffizienten des zugehörigen Polynoms werden als Vektor dargestellt, der einem Algorithmus zur Nullstellensuche übergeben wird.

Die in diesem Dokument eingebundenen Diagramme wurden einer Nachbearbeitung unterzogen, so dass deren Erscheinungsbild von der Bildschirmausgabe abweicht.

Übung 1.1 Kraftwirkung zwischen zwei Ladungen

Zwei punktförmige Ladungen $Q_1 = Q_2 = 10^{-6}$ C sind in einem Abstand von $d = 10$ cm im leeren Raum angeordnet.

a) Wie viele Elementarladungen beinhaltet jede der beiden Punktladungen und um welche Art Ladungsträger handelt es sich?

b) Wie groß ist die Kraft F zwischen den Ladungen und in welche Richtung wirkt sie?

Lösung der Übungsaufgabe 1.1 (Seite 47)

a) Anzahl und Art der Ladungsträger

$$n = \frac{Q}{e} = \frac{10^{-6}\,\text{As}}{1{,}602 \cdot 10^{-19}\,\text{As}} = 6{,}2418 \cdot 10^{12}$$

Das positive Vorzeichen von n zeigt an, dass es sich dabei um positive Elementarladungen (Protonen) handelt. Die Gesamtzahl von Elementarladungen im Volumen ist natürlich unbekannt, da sich die positiven und die negativen Ladungen nach außen hin neutralisieren. Im Volumen befinden sich also $n = 6{,}2418 \cdot 10^{12}$ mehr positive als negative Ladungsträger.

b) Kraftwirkung

$$F = \frac{Q_1\,Q_2}{4\pi\varepsilon_0\,d^2} = \frac{10^{-6}\,\text{As} \cdot 10^{-6}\,\text{As}}{4\pi \cdot 8{,}8542 \cdot 10^{-12}\,\text{As/Vm} \cdot (0{,}1\,\text{m})^2} = 0{,}89875\,\text{N}$$

Die beiden Ladungen stoßen sich ab. Die Kraft wirkt entlang der direkten Verbindungslinie zwischen den Ladungen (Wirkungslinie).

Octave-Datei: `loesung_01_01.m`

```
% Lösung der Übungsaufgabe 1.1

% Definition vom Konstanten
eps0 = 8.85419e-12;  % As/(Vm) Dielektrizitätskonstante
Qele = 1.6021e-19;   % As      Elementarladung

% Vorgaben (Aufgabenstellung)
Q1 = 1e-6;  % As
Q2 = 1e-6;  % As
d  = 0.1;   % m
disp(["Vorgaben"]);
disp(["Q1 = ",num2str(Q1)," As"]);
disp(["Q2 = ",num2str(Q2)," As"]);
disp(["d  = ",num2str(d)," m"]);
disp(" ");

% Anzahl der Ladungsträger
n1 = round(Q1/Qele);
n2 = round(Q2/Qele);
disp(["Anzahl der Ladungsträger"]);
disp(["n1 = ",num2str(n1)]);
disp(["n2 = ",num2str(n2)]);
disp(["n>0: Protonen, n<0: Elektronen"]);
disp(" ");

% Kraftwirkung
F = Q1*Q2/(4*pi*eps0*d^2);
disp(["Kraftwirkung"]);
disp(["F = ",num2str(F)," N"]);
disp(["F>0: Abstoßung, F<0: Anziehung"]);
disp(" ");
```

Übung 1.2 Permittivität (Dielektrizitätskonstante)

Zwei Protonen befinden sich im leeren Raum. Der Abstand zwischen den Ladungen beträgt $d = 0{,}3\,\mu\text{m}$.

a) Bestimmen Sie die Einheit der Permittivität. Verwenden Sie dabei nur die Basiseinheiten m, s, kg, A, K, Cd und mol.

b) Bestimmen Sie die elektrostatische Kraft zwischen den Protonen. Handelt es sich bei der Kraftwirkung um Anziehung oder Abstoßung?

Zwischen die Ladungen wird nun eine Isolierschicht mit der relativen Dielektrizitätskonstanten $\varepsilon_\mathrm{r} = 6{,}3$ eingebracht.

c) Wie verändert sich die Kraft?

d) Wie muss der Abstand der beiden Ladungen verändert werden, damit wieder die ursprüngliche Kraft wirkt?

Lösung der Übungsaufgabe 1.2 (Seite 47)

a) Einheit der Permittivität

$$F = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon d^2} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi F d^2}$$

$$[F] = \mathrm{N} = \mathrm{kg{\cdot}m/s^2}, \qquad [Q] = \mathrm{A{\cdot}s}, \qquad [d] = \mathrm{m}$$

$$[\varepsilon] = \frac{\mathrm{A\cdot s\cdot A\cdot s}}{\left(\mathrm{kg\cdot m/s^2}\right)\cdot \mathrm{m^2}} = \frac{\mathrm{A^2\cdot s^4}}{\mathrm{kg{\cdot}m^3}} = \frac{\mathrm{A{\cdot}s}}{\mathrm{V{\cdot}m}}$$

Beachte: $1\ \mathrm{N} = 1\ \dfrac{\mathrm{kg{\cdot}m}}{\mathrm{s^2}}$ und $1\ \mathrm{V} = 1\ \dfrac{\mathrm{kg{\cdot}m^2}}{\mathrm{A{\cdot}s^3}}$

b) Kraft auf zwei Protonen im Vakuum $\left(Q_1 = Q_2 = +e = 1{,}602\cdot 10^{-19}\ \mathrm{A{\cdot}s}\right)$

$$F = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0 d^2} = \frac{\left(1{,}602\cdot 10^{-19}\ \mathrm{A{\cdot}s}\right)^2}{4\pi\cdot 8{,}8542\cdot 10^{-12}\ \mathrm{A{\cdot}s/(V{\cdot}m)}\cdot (0{,}3\ \mu\mathrm{m})^2} = 2{,}56\cdot 10^{-15}\ \mathrm{N}$$

Die beiden Protonen stoßen sich mit einer Kraft von $2{,}56\cdot 10^{-15}$ N ab.

c) Veränderung der Kraft aufgrund eines Dielektrikums mit $\varepsilon_\mathrm{r} = 6{,}3$

$$\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_\mathrm{r}, \qquad F = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0 d^2}, \qquad F' = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_\mathrm{r} d^2}$$

$$F' = \frac{F}{\varepsilon_\mathrm{r}} = \frac{2{,}56\cdot 10^{-15}\ \mathrm{N}}{6{,}3} = 4{,}068\cdot 10^{-16}\ \mathrm{N}$$

Die Kraft wird kleiner!

d) Abstand, bei der die ursprüngliche Kraft wirkt

$$F'' = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_\mathrm{r} d''^2} = F = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0 d^2}$$

$$\varepsilon_r d''^2 = d^2 \qquad \Rightarrow \qquad d'' = \frac{d}{\sqrt{\varepsilon_\mathrm{r}}} = \frac{0{,}3\ \mu\mathrm{m}}{\sqrt{6{,}3}} = 0{,}12\ \mu\mathrm{m}$$

Anmerkung:
Um die alten Verhältnisse wieder herzustellen, müssen die Ladungen entgegen der Abstoßungskraft zusammen gedrückt werden. Das erfordert Energie. Warum? Offensichtlich ist die potentielle Energie des Systems durch Einbringen der Isolierschicht kleiner geworden. Das Einbringen der Isolierschicht hat dem System Energie entzogen, d. h., die Isolierschicht wurde quasi unter dem Einsatz von potentieller Energie „angesaugt". Will man die alten Verhältnisse wieder herstellen, so muss dazu Energie aufgebracht werden; sei es durch zusammendrücken der beiden Ladungen oder durch herausziehen der Isolierschicht. Beides ist nur mit Kraftaufwand zu bewerkstelligen.

Octave-Datei: `loesung_01_02.m`

```
% Lösung der Übungsaufgabe 1.2

% Definition vom Konstanten
eps0 = 8.85419e-12;  % As/(Vm) Dielektrizitätskonstante
Qele = 1.6021e-19;   % As      Elementarladung (Protonenladung)

% Vorgaben (Aufgabenstellung)
d   = 0.3*10^(-6);   % m
epsr = 6.3;  % relative Dielektrizitätskonstante
disp(["Vorgaben"]);
disp(["d    = ",num2str(d*10^6)," um"]);
disp(["epsr = ",num2str(epsr)]);
disp(" ");

% Kraft zwischen den Protonen im leeren Raum
F1 = Qele*Qele/(4*pi*eps0*d^2);
disp(["Kraftwirkung bei epsr = 1"]);
disp(["F1 = ",num2str(F1)," N"]);
disp(["F1>0: Abstoßung, F1<0: Anziehung"]);
disp(" ");

% Kraft zwischen den Protonen mit Isolierschicht
F2 = Qele*Qele/(4*pi*eps0*epsr*d^2);
disp(["Kraftwirkung bei epsr = ",num2str(epsr)]);
disp(["F2 = ",num2str(F2)," N"]);
disp(["F2>0: Abstoßung, F2<0: Anziehung"]);
disp(" ");

% Abstand, bei dem die ursprüngliche Kraft wirkt
d2 = sqrt(Qele*Qele/(4*pi*eps0*epsr*F1));
disp(["Abstand, bei dem die ursprüngliche Kraft wirkt"]);
disp(["d2 = ",num2str(d2*10^6)," um"]);
```

Übung 1.3 Ladung und Strom

Die Gesamtladung $Q = -50\,\mathrm{C}$ ist in einem kreisrunden Zylinder mit dem Durchmesser $d = 5\,\mathrm{mm}$ und der Länge $l = 10\,\mathrm{cm}$ homogen verteilt.

a) Bestimmen Sie die Raumladungsdichte ϱ.

b) Wie viele Elementarladungen ($e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$) befinden sich in dem Zylinder und um welche Art Ladungsträger handelt es sich?

Der Zylinder bewegt sich mit der Geschwindigkeit $v = 300\,\mu\mathrm{m/min}$ in Längsrichtung.

c) Bestimmen Sie die Stromdichte J und den Gesamtstrom I.

d) In welche Richtung, bezogen auf v, fließt der Strom?

Lösung der Übungsaufgabe 1.3 (Seite 47)

a) Volumen V und Raumladungsdichte ϱ

$$V = \pi(d/2)^2 l = 1{,}963 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{m}^3 = 1{,}963\ \mathrm{cm}^3$$

$$\varrho = \frac{Q}{V} = \frac{-50\ \mathrm{C}}{1{,}963\ \mathrm{cm}^3} = -25{,}5\ \mathrm{C/cm}^3 = -25{,}5 \cdot 10^6\ \mathrm{C/m}^3$$

b) Anzahl der Elementarladungen $\left(e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{A{\cdot}s},\ 1\ \mathrm{A{\cdot}s} = 1\ \mathrm{C}\right)$

$$n = \frac{Q}{e} = \frac{-50\ \mathrm{A{\cdot}s}}{1{,}602 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{A{\cdot}s}} = -3{,}12 \cdot 10^{20}$$

Das negative Vorzeichen von n zeigt an, dass es sich dabei um negative Elementarladungen (Elektronen) handelt. Die Gesamtzahl von Elementarladungen im Volumen ist natürlich unbekannt, da sich die positiven und die negativen Ladungen nach außen hin neutralisieren. Im Volumen befinden sich also $n = 3{,}12 \cdot 10^{20}$ mehr negative als positive Ladungsträger.

c) Stromdichte J und Gesamtstrom I

$$v = 300\ \mathrm{\mu m/min} = \frac{0{,}3\ \mathrm{mm}}{60\ \mathrm{s}} = 0{,}005\ \mathrm{mm/s} = 5 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{m/s}$$

$$J = \varrho v = -25{,}5 \cdot 10^6\ \mathrm{A{\cdot}s/m}^3 \cdot 5 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{m/s} = -127{,}5\ \mathrm{A/m}^2$$

$$I = J \cdot A \quad \text{mit } A = \pi(d/2)^2 = 1{,}963 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{m}^2$$
$$I = -127{,}5\ \mathrm{A/m}^2 \cdot 1{,}963 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{m}^2 = -0{,}0025\ \mathrm{A} = -2{,}5\ \mathrm{mA}$$

d) Richtung des Stromes

Die Elektronen (d. h., die Raumladung) bewegt sich in Richtung des Geschwindigkeitsvektors. (Die Geschwindigkeit v ist hier allerdings nur skalar angegeben.) Der Strom fließt jedoch in die entgegengesetzte Richtung, da die Stromrichtung für bewegte positive Ladungsträger definiert ist (technische Stromrichtung). Somit ist der Strom I negativ.

Anmerkungen:

- Der Zylinder benötigt die Zeit $t = l/v$ um an einem festen Punkt vorbei zu laufen, d. h., der Stromfluss an dieser Stelle dauert
  $$t = \frac{0{,}1\ \mathrm{m}}{5 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{m/s}} = 20000\ \mathrm{s}.$$
  Das entspricht einer Zeit von 5 Stunden, 33 Minuten und 20 Sekunden.
- Um einen Eindruck von der Ladungsmenge $Q = 50\ \mathrm{As} = 0{,}014\ \mathrm{Ah}$ zu erhalten, können wir zum Vergleich die Kapazität von Akkumulatoren heranziehen. Ein kleiner Akku, wie er z. B. im Modellbau eingesetzt wird, hat eine Kapazität von einigen Amperestunden. Autobatterien liegen im Bereich von 40 bis 80 Ah.

Octave-Datei: `loesung_01_03.m`

```
% Lösung der Übungsaufgabe 1.3

% Definition vom Konstanten
eps0 = 8.85419e-12;  % As/(Vm) Dielektrizitätskonstante
Qele = 1.6021e-19;   % As      Elementarladung

% Vorgaben (Aufgabenstellung)
Q = -50;             % As
d = 5*10^(-3);       % m
l = 10*10^(-2);      % m
v = 300*10^(-6)/60;  % m/s
disp(["Vorgaben"]);
disp(["Q = ",num2str(Q)," As"]);
disp(["d = ",num2str(d)," m"]);
disp(["l = ",num2str(l)," m"]);
disp(["v = ",num2str(v)," m/s"]);
disp(" ");

% Raumladungsdichte
V = l*pi*(d/2)^2; % Volumen
rho = Q/V;
disp(["Raumladungsdichte"]);
disp(["rho = ",num2str(rho)," As/m³"]);

% Anzahl der Elementarladungen
n = round(Q/Qele);
disp(["Anzahl der Ladungsträger"]);
disp(["n = ",num2str(n)]);
disp(["n>0: Protonenüberschuss, n<0: Elektronenüberschuss"]);
disp(" ");

% Stromdichte und Strom
J = rho*v;
I = J*pi*(d/2)^2;
disp(["Stromdichte und Strom"]);
disp(["J = ",num2str(J)," A/m²"]);
disp(["I = ",num2str(I*10^3)," mA"]);
```

Übung 1.4 Strom und Stromdichte

Durch einen elektrischen Leiter mit kreisrundem Querschnitt fließt ein Gleichstrom der Stärke $I = 2{,}5$ A. Der Durchmesser des Leiters beträgt $d = 0{,}3$ mm.

a) Berechnen Sie die Stromdichte J.

b) Welche Ladungsmenge wird in 10 s durch den Leiter transportiert.

c) Aufgrund einer Verformung (Quetschung oder Knick) ist der effektive Querschnitt an einer Schadstelle um 25 % reduziert. Geben Sie den Strom und die Stromdichte an der Schadstelle an.

Lösung der Übungsaufgabe 1.4 (Seite 47)

a) Stromdichte J

Querschnitt des runden Leiters: $A = \pi r^2 = \pi(d/2)^2 = 0{,}071\ \mathrm{mm}^2$

$$J = \frac{I}{A} = \frac{2{,}5\ \mathrm{A}}{0{,}071\ \mathrm{mm}^2} = 35{,}4\ \mathrm{A/mm}^2 = 3{,}54 \cdot 10^7\ \mathrm{A/m}^2$$

b) Transportierte Ladungsmenge Q

$$I = \frac{Q}{T} \quad \Rightarrow \quad Q = I \cdot T \quad \text{mit } T = 10\ \mathrm{s}$$

$$Q = 25\ \mathrm{As} = 25\ \mathrm{C}$$

c) Strom I' und Stromdichte J' an Schadstelle

Der Querschnitt wird um 25 % reduziert, d. h.,

$$A' = \left(1 - \frac{25}{100}\right) \cdot A = 0{,}75 \cdot A.$$

Der Strom durch die Schadstelle ist genauso groß, wie überall im Leiter, d. h., $I' = I$.

$$J' = \frac{I}{A'} = \frac{I}{0{,}75 A} = 1{,}33\, J = 47{,}2\ \mathrm{A/mm}^2 = 4{,}72 \cdot 10^7\ \mathrm{A/m}^2$$

Die Stromdichte steigt um 33,3 % an, wenn die Querschnittsfläche um 25 % reduziert wird.

Octave-Datei: `loesung_01_04.m`

```
% Lösung der Übungsaufgabe 1.4

% Vorgaben (Aufgabenstellung)
I = 2.5;     % A
d = 0.3e-3; % m
T = 10;      % s
p = 25;      % Prozent

disp(["Vorgaben"]);
disp(["I = ",num2str(I)," A"]);
disp(["d = ",num2str(d)," m"]);
disp(["T = ",num2str(T)," s"]);
disp(["p = ",num2str(p)," %"]);
disp(" ");

% Stromdichte
A = pi*(d/2)^2; % Querschnittsfläche
J = I/A;
disp(["Stromdichte"]);
disp(["J = ",num2str(J)," A/m²"]);
disp(" ");

% Transportierte Ladungsmenge
Q = I*T;
disp(["Transportierte Ladungsmenge (in T = ",num2str(T)," s)"]);
disp(["Q = ",num2str(Q)," As"]);
disp(" ");

% Stromdichte an Schadstelle
A1 = (1-p/100)*A;
J1 = I/A1;
disp(["Stromdichte an der Schadstelle"]);
disp(["J1 = ",num2str(J1)," A/m²"]);
disp(" ");
p1 = 100*(J1-J)/J;
disp(["Prozentualer Anstieg der Stromdichte an der Schadstelle"]);
disp(["p1 = ",num2str(p1)," %"]);
disp(" ");
```

Übung 1.5 Freie Elektronen im Vakuum

Ein Elektron wird in einer Vakuumröhre mittels einer Anodenspannung von 10 kV beschleunigt. Der Abstand zwischen Kathode und Anode beträgt 20 cm.
(Elementarladung $e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}$ C, Elektronenmasse $m_\mathrm{e} = 9{,}109 \cdot 10^{-31}$ kg)

a) Welche Energie wird dem Elektron in der Vakuumröhre zugeführt?

b) Mit welcher Geschwindigkeit trifft das Elektron auf die Anode. (An der Kathode war das Elektron im Ruhezustand.)

c) Welche Beschleunigung erfährt das Elektron und wie lange dauert die Flugzeit von der Kathode zur Anode?

d) Welche Kraft wirkt auf das Elektron?

Lösung der Übungsaufgabe 1.5 (Seite 48)

a) Zugeführte Energie

Anodenspannung $U = 10\,\text{kV} \quad \Rightarrow \quad W = 10\,\text{k eV} = 1{,}6 \cdot 10^{-15}\,\text{J}$

b) Geschwindigkeit des Elektrons an der Anode

$$W = \frac{1}{2}\, m_\text{e}\, v^2 = e \cdot U$$

$$v = \sqrt{\frac{2\,e\,U}{m_\text{e}}}$$

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-19}\,\text{A·s} \cdot 10\,\text{kV}}{9{,}1091 \cdot 10^{-31}\,\text{kg}}} = 59{,}307 \cdot 10^{6} \sqrt{\frac{\text{A·s·kg·m}^2}{\text{kg}}} = 59307\,\frac{\text{km}}{\text{s}}$$

Anmerkung: $1\,\text{V} = 1\,\dfrac{\text{kg·m}^2}{\text{A·s}^3}$

c) Beschleunigung a des Elektrons und Flugzeit

Das Elektron wird entlang der Strecke s gleichmäßig beschleunigt. In der Zeit t durchläuft das Elektron den Weg zwischen Kathode und Anode.

1. Alternative: Berechnung mittels Beschleunigungsgesetz

$$\left.\begin{array}{rcl} v & = & a\,t \\ s & = & \dfrac{a\,t^2}{2} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad s = \frac{v^2}{2\,a} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{v^2}{2\,s}$$

2. Alternative: Berechnung mittels Energiebetrachtung

$$\left.\begin{array}{rcl} F & = & m_\text{e}\,a \\ W & = & F\,s \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad W = m_\text{e}\,a\,s \quad \Rightarrow \quad a = \frac{W}{m_\text{e}\,s}$$

Mit $W = \dfrac{1}{2}\, m_\text{e}\, v^2$ folgt $a = \dfrac{v^2}{2\,s}$.

Numerische Berechnung der Beschleunigung

$$a = \frac{(59{,}307 \cdot 10^{6}\ \text{m/s})^2}{2 \cdot 0{,}2\,\text{m}} = 8{,}79 \cdot 10^{15}\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Berechnung der Flugzeit

$$t_d = \frac{v}{a} = \frac{59{,}307 \cdot 10^{6}\ \text{m/s}}{8{,}79 \cdot 10^{15}\ \text{m/s}^2} = 6{,}75\,\text{ns}$$

d) Kraft auf das Elektron

$$F = \frac{W}{s} = e \cdot \frac{U}{s} = 1{,}602 \cdot 10^{-19}\,\text{A·s} \cdot \frac{10\,\text{kV}}{0{,}2\,\text{m}} = 8 \cdot 10^{-15}\,\frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2} = 8 \cdot 10^{-15}\,\text{N}$$

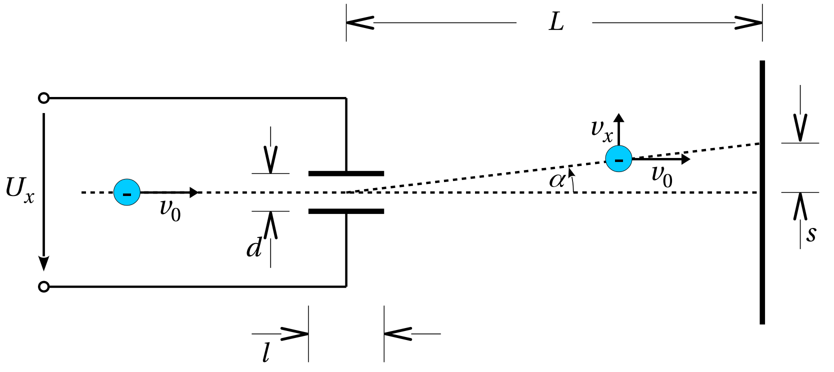
Die Kraft auf das Elektron ist nur von der auf den Abstand bezogenen Spannung abhängig, d. h., $F \sim U/s$.

Octave-Datei: `loesung_01_05.m`

```
% Lösung der Übungsaufgabe 1.5

% Definition vom Konstanten
eps0 = 8.85419e-12; % As/(Vm) Dielektrizitätskonstante
Qele = 1.6021e-19;  % As      Elementarladung
mele = 9.109e-31;   % kg      Elektronenmasse

% Vorgaben (Aufgabenstellung)
U = 10e3; % V
s = 0.2;   % m
disp(["Vorgaben"]);
disp(["U = ",num2str(U*10^(-3))," kV"]);
disp(["s = ",num2str(s)," m"]);
disp(" ");

% Zugeführte Energie
W = U*Qele;
disp(["Zugeführte Energie"]);
disp(["W = ",num2str(W)," J"]);
disp(" ");

% Geschwindigkeit des Elektrons an der Anode
v = sqrt(2*U*Qele/mele);
disp(["Geschwindigkeit des Elektrons an der Anode"]);
disp(["v = ",num2str(v)," m/s"]);
disp(" ");

% Beschleunigung und Flugzeit
a = v*v/(2*s);
t = v/a;
disp(["Beschleunigung und Flugzeit"]);
disp(["a = ",num2str(a)," m/s²"]);
disp(["t = ",num2str(t*10^9)," ns"]);
disp(" ");

% Kraftwirkung auf Elektron
F = W/s;
disp(["Kraftwirkung"]);
disp(["F = ",num2str(F)," N"]);
disp(" ");
```

Übung 1.6 Elektrostatische Elektronenablenkung

Ein Elektron wird mit konstanter Geschwindigkeit $v_0 = 50\,000$ km/s durch zwei Ablenkplatten geschossen und trifft auf einen im Abstand $L = 30$ cm angebrachten Auffangschirm. Die Ablenkplatten haben einen Abstand von $d = 2$ mm und eine Länge von $l = 10$ mm. Die Ablenkspannung U_x beträgt 100 V.



a) Welche Spannung zwischen Kathode und Anode ist erforderlich, um das Elektron auf die Geschwindigkeit v_0 zu beschleunigen?

b) Welche Querbeschleunigung (in Ablenkrichtung) erfährt das Elektron und wie groß ist die Querkomponente der Elektronengeschwindigkeit (Ablenkgeschwindigkeit v_x) nach dem Durchlaufen der Ablenkplatten?

c) Stellen Sie die Ablenkgeschwindigkeit in Abhängigkeit von der Zeit und in Abhängigkeit vom zurückgelegten Weg in jeweils einem Diagramm dar.

d) Stellen Sie die Flugbahn des Elektrons in einem Diagramm dar.

e) Berechnen Sie den Punkt, an dem das Elektron auf den Schirm auftrifft, d. h. den Ablenkweg s und den Ablenkwinkel α.

Hinweis: Das Elektron wird gleichmäßig beschleunigt, während es die Ablenkplatten durchläuft. Danach ist die Querkomponente der Elektronengeschwindigkeit v_x konstant. Da $l \ll L$ und die Durchlaufzeit sehr kurz ist, kann der Beschleunigungsvorgang bei der Berechnung des Ablenkwegs und des Ablenkwinkels vernachlässigt werden.

Lösung der Übungsaufgabe 1.6 (Seite 48)

a) Anodenspannung

$$v_0 = \sqrt{\frac{2\,e\,U_A}{m_e}} \quad \Rightarrow \quad U_A = \frac{v_0^2\,m_e}{2\,e} \qquad \text{(siehe Aufgabe 1.5)}$$

$$U_A = \frac{(50\cdot 10^6)^2\cdot 9{,}1091\cdot 10^{-31}}{2\cdot 1{,}602\cdot 10^{-19}}\;\frac{\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{kg}}{\mathrm{s}^2\cdot\mathrm{A}\cdot\mathrm{s}} = 7108\,\mathrm{V}$$

Anmerkung: $1\,\mathrm{V} = 1\,\dfrac{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2}{\mathrm{A}\cdot\mathrm{s}^3}$

b) Querbeschleunigung und Ablenkgeschwindigkeit

Während das Elektron die Ablenkplatten durchläuft erfährt es eine Querbeschleunigung. Nach dem Durchlaufen der Ablenkplatten bleibt die Querkomponente der Elektronengeschwindigkeit konstant.

$$F_x = e\,\frac{U_x}{d} \qquad \text{(siehe Aufgabe 1.5)}$$

Mit $F = m\,a$ ergibt sich

$$a_x = \frac{F_x}{m_\mathrm{e}} = \frac{e}{m_\mathrm{e}}\cdot\frac{U_x}{d} = \frac{1{,}602\cdot 10^{-19}\,\mathrm{A\cdot s}}{9{,}1091\cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}}\cdot\frac{100\,\mathrm{V}}{2\cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}} = 8{,}8\cdot 10^{15}\,\mathrm{m/s^2}\,.$$

Das Elektron benötigt zum Durchlaufen der Ablenkplatten die Zeit

$$t_d = \frac{l}{v_0} = \frac{10\cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}}{50\cdot 10^6\,\mathrm{m/s}} = 2\cdot 10^{-10}\,\mathrm{s} = 0{,}2\,\mathrm{ns}\,.$$

Die Endgeschwindigkeit in Querrichtung beträgt somit

$$\begin{aligned} v_x &= a_x\,t_d = a_x\,\frac{l}{v_0} = \frac{e}{m_e}\cdot\frac{U_x}{d}\cdot\frac{l}{v_0} \\ &= 8{,}8\cdot 10^{15}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot 2\cdot 10^{-10}\,\mathrm{s} = 1758681\,\mathrm{m/s} = 1759\,\mathrm{km/s}\,. \end{aligned}$$

Beim Durchlaufen der Ablenkplatten wird das Elektron um die Strecke

$$s_d = \frac{1}{2}\,a_x\,t_d^2 = \frac{1}{2}\cdot 8{,}8\cdot 10^{15}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot\left(2\cdot 10^{-10}\right)^2\,\mathrm{s}^2 = 1{,}76\cdot 10^{-5}\,\mathrm{m} = 0{,}176\,\mathrm{mm}$$

abgelenkt.

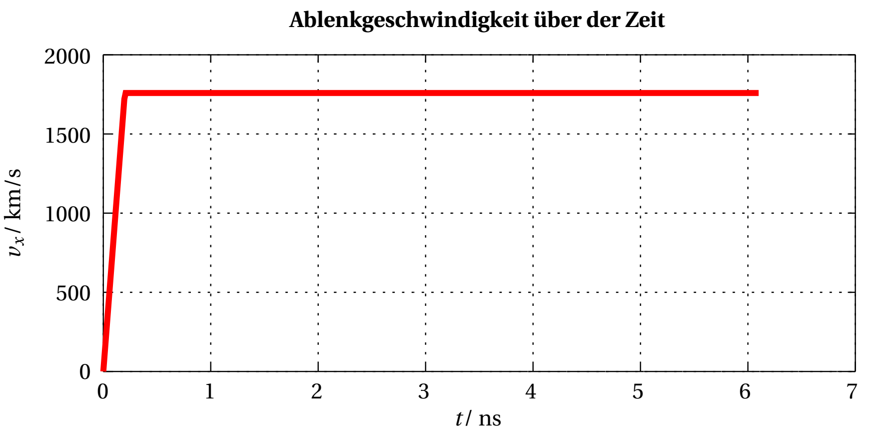
c) Ablenkgeschwindigkeit in Abhängigkeit von Zeit und Weg

Der Abstand zwischen der Kathode und den Ablenkplatten ist nicht definiert und im Prinzip auch nicht von Bedeutung, da sich das Elektron mit konstanter Geschwindigkeit in z-Richtung (zum Auffangschirm hin) bewegt. Dies wird erreicht, indem vor den Ablenkplatten eine gelochte Anode angebracht ist und der Auffangschirm auf Anodenpotential liegt. Für die Simulation wird der Beginn des Ablenkvorgangs als Referenz herangezogen, d. h., das Elektron erreicht zum Zeitpunkt $t = 0$ von links die Ablenkplatten. Der Ursprung der z-Achse befindet sich dementsprechend auf der linken Seite der Ablenkplatten. Während der Zeit $0 \le t \le l/v_0$ durchläuft das Elektron die Ablenkplatten und erfährt eine Beschleunigung in x-Richtung (Ablenkrichtung). Für das Durchlaufen der restlichen Strecke bis zum Auffangschirm benötigt das Elektron bei konstanter Geschwindigkeit in x-Richtung die Zeit

$$t_D = \frac{L - l/2}{v_0} = \frac{30 \cdot 10^{-2} -\ \mathrm{m} 5 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}}{50 \cdot 10^{6}\ \mathrm{m/s}} = 5{,}9 \cdot 10^{-10}\ \mathrm{s} = 5{,}9\ \mathrm{ns}\,.$$

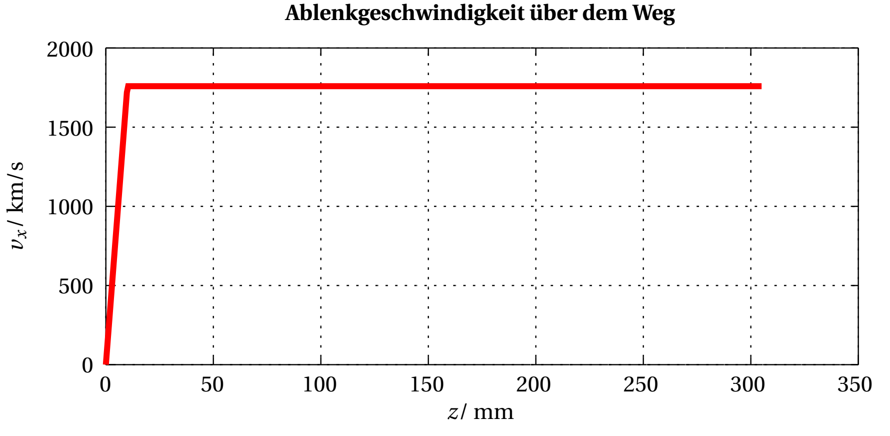
Darstellung der Ablenkgeschwindigkeit über der Zeit

$$v_x(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ a_x \cdot t & \text{für } 0 \le t \le l/v_0 \\ a_x \cdot l/v_0 & \text{für } t > l/v_0 \end{cases}$$



Darstellung der Ablenkgeschwindigkeit über dem Weg

$$v_x(z) = \begin{cases} 0 & \text{für } z < 0 \\ a_x \cdot z / v_0 & \text{für } 0 \leq z \leq l \\ a_x \cdot l / v_0 & \text{für } z > l \end{cases}$$



d) Flugbahn des Elektrons

Zur Darstellung der Flugbahn bestimmen wir die Position (x, z) des Elektrons in Abhängigkeit von der Zeit t.

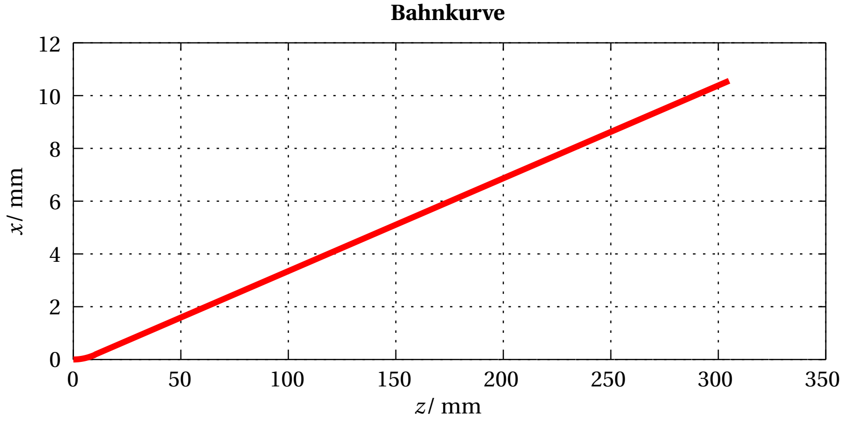
$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ \dfrac{a_x}{2} \cdot t^2 & \text{für } 0 \leq t \leq l/v_0 \\ \dfrac{a_x l}{v_0} \cdot t - \dfrac{a_x l^2}{2\,v_0^2} & \text{für } t > l/v_0 \end{cases}$$

$$z(t) = v_0 \cdot t$$

Diese Parameterdarstellung können wir unmittelbar in einem Diagramm auftragen. Alternativ kann auch der Ablenkweg x in Abhängigkeit von z bestimmt werden.

$$x(z) = \begin{cases} 0 & \text{für } z < 0 \\ \dfrac{a_x}{2v_0^2} \cdot z^2 & \text{für } 0 \leq z \leq l \\ \dfrac{a_x l}{2v_0^2} \cdot z - \dfrac{a_x l^2}{2\,v_0^2} & \text{für } z > l \end{cases}$$

In beiden Darstellungen müssen wir berücksichtigen, dass das Elektron beim Verlassen des Ablenkbereichs bereits den Weg s_d in x-Richtung zurückgelegt hat. Aus dem Diagramm sowie den nachfolgenden Berechnungen ist aber auch zu erkennen, dass die Beschleunigungsphase die Bahnkurve und den Punkt, an dem das Elektron auf den Schirm trifft, nur wenig beeinflusst.



e) Auftreffpunkt des Elektrons (Ablenkweg s und Ablenkwinkel α)

Nach dem Verlassen der Ablenkplatten benötigt das Elektron noch die Zeit

$$t_D = \frac{L - l/2}{v_0} = \frac{295 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}}{50 \cdot 10^6\ \mathrm{m/s}} = 5{,}9 \cdot 10^{-9}\ \mathrm{s} = 5{,}9\ \mathrm{ns}$$

bis zum Auftreffen auf dem Schirm. In dieser Zeit legt es in Querrichtung den Weg

$$s_D = v_x \cdot t_D = 1759\ \mathrm{km/s} \cdot 5{,}9\ \mathrm{ns} = 10{,}376\ \mathrm{mm}$$

zurück. Dazu kommt noch der Weg s_d, den es zwischen den Platten zurückgelegt hat. (Dieser spielt aber praktisch keine Rolle.) Insgesamt ergibt sich also die Ablenkstrecke

$$s = s_D + s_d = 10{,}376\ \mathrm{mm} + 0{,}176\ \mathrm{mm} = 10{,}55\ \mathrm{mm}\ .$$

Für den Ablenkwinkel erhalten wir mit $\tan\alpha = s/L$ den Wert

$$\alpha = \arctan\frac{s}{L} = \arctan\frac{10{,}55\ \mathrm{mm}}{300\ \mathrm{mm}} = \arctan 0{,}035167 \approx 2^\circ\ .$$

Der Ablenkwinkel kann auch durch

$$\tan\alpha = \frac{v_x}{v_0} = \frac{e}{m_\mathrm{e}} \cdot \frac{U_x}{d} \cdot \frac{l}{v_0^2} = \frac{e}{m_\mathrm{e}} \cdot \frac{U_x}{d} \cdot l \cdot \frac{m_\mathrm{e}}{2\,e\,U_\mathrm{A}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{U_x}{U_\mathrm{A}}$$

bestimmt werden. Entsprechend ist der Ablenkweg durch

$$s = \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{d} \cdot L \cdot \frac{U_x}{U_\mathrm{A}}$$

gegeben. Ablenkweg und Ablenkwinkel sind also nur abhängig von der Geometrie der Anordnung und vom Spannungsverhältnis U_x/U_A.

Octave-Datei: `loesung_01_06.m`

```
% Lösung der Übungsaufgabe 1.6

% Definition vom Konstanten
eps0 = 8.85419e-12; % As/(Vm) Dielektrizitätskonstante
Qele = 1.6021e-19;  % As      Elementarladung
mele = 9.109e-31;   % kg      Elektronenmasse

% Vorgaben (Aufgabenstellung)
v0 = 50e6;   % m/s
L  = 0.3;    % m
d  = 2e-3;   % m
l  = 10e-3;  % m
Ux = 100;    % V
disp(["Vorgaben"]);
disp(["v0 = ",num2str(v0*10^(-3))," km/s"]);
disp(["L  = ",num2str(L*10^3)," mm"]);
disp(["d  = ",num2str(d*10^3)," mm"]);
disp(["l  = ",num2str(l*10^3)," mm"]);
disp(["Ux = ",num2str(Ux)," V"]);
disp(" ");

% Anodenspannung
UA = v0*v0*mele/(2*Qele);
disp(["Anodenspannung"]);
disp(["UA = ",num2str(UA*10^(-3))," kV"]);
disp(" ");

% Querbeschleunigung und Ablenkgeschwindigkeit
ax = Qele*Ux/(mele*d);
vx = Qele*Ux*l/(mele*d*v0);
disp(["Querbeschleunigung und Ablenkgeschwindigkeit"]);
disp(["ax = ",num2str(ax)," m/s^2"]);
disp(["vx = ",num2str(vx)," m/s"]);
disp(" ");

% Durchlaufzeiten
td = l/v0;       % Durchlaufen der Ablenkplatten
tD = (L-l/2)/v0; % Durchlaufen der Reststrecke bis zum Auffangschirm
disp(["Durchlaufzeiten"]);
disp(["td = ",num2str(td*10^9)," ns (Ablenkplatten)"]);
disp(["tD = ",num2str(tD*10^9)," ns (Reststrecke)"]);
disp(" ");
```

Octave-Datei: `loesung_01_06.m` (Fortsetzung)

```
% Ablenkstrecken und Ablenkwinkel
sd = ax*td*td/2;    % Ablenkweg beim Durchlaufen der Ablenkplatten
sD = vx*tD;         % Ablenkweg beim Durchlaufen der Reststrecke
s = sD+sd;          % Gesamtablenkstrecke
alpha = atan(s/L); % Ablenkwinkel
disp(["Ablenkstrecken"]);
disp(["sd    = ",num2str(sd*10^3)," mm (Ablenkplatten)"]);
disp(["sD    = ",num2str(sD*10^3)," mm (Reststrecke)"]);
disp(["s     = ",num2str(s*10^3)," mm (Gesamtablenkung)"]);
disp(["alpha = ",num2str(180*alpha/pi)," Grad"]);
disp(" ");

% Ablenkgeschwindigkeit über der Zeit
hFig1 = figure("Name","Ablenkgeschwindigkeit über der Zeit");
K = 500;
k = 0:K-1;
tmin = 0;
tmax = td+tD; % Gesamtlaufzeit
t = tmin+(tmax-tmin)*k/(K-1);
k1 = find((t<=td)&(t>=0)); % Beschleunigungsphase
k2 = find(t>td); % Phase konstanter Ablenkgeschwindigkeit
v = zeros(size(t));
v(k1) = ax*(t(k1)-t(k1(1))); % Beschleunigung
v(k2) = vx; % Konstante Ablenkgeschwindigkeit
hPlot1 = plot(t*10^9,v*10^(-3),"r"); % t in ns, v in km/s
grid on;
title("\\bf Ablenkgeschwindigkeit über der Zeit","FontSize",14);
xlabel("t / ns","FontSize",12);
ylabel("v_x / km/s","FontSize",12);

% Ablenkgeschwindigkeit über dem Weg
hFig2 = figure("Name","Ablenkgeschwindigkeit über dem Weg");
z = v0*t; % Der Ort z wird hier der Zeit t zugeordnet, wobei t=0 <=> z=0 ist.
hPlot2 = plot(z*10^3,v*10^(-3),"r"); % z in mm, v in km/s
grid on;
title("\\bf Ablenkgeschwindigkeit über dem Weg","FontSize",14);
xlabel("z / mm","FontSize",12);
ylabel("v_x / km/s","FontSize",12);
```

Octave-Datei: `loesung_01_06.m` (Fortsetzung)

```
% Flugbahn des Elektrons
hFig3 = figure("Name","Flugbahn des Elektrons");
x = zeros(size(t));
x(k1) = (1/2)*ax*(t(k1)-t(k1(1))).^2; % Beschleunigung
x(k2) = vx*(t(k2)-t(k1(length(k1))))+sd; % Konstante Ablenkgeschwindigkeit
hPlot3 = plot(z*10^3,x*10^3,"r"); % z und x in mm
grid on;
title("\\bf Flugbahn des Elektrons","FontSize",14);
xlabel("z / mm","FontSize",12);
ylabel("x / mm","FontSize",12);
```

Übung 1.7 Spezifischer Widerstand

Eine Doppelleitung aus Kupfer ist 50 m lang. Der Querschnitt des verwendeten Drahtes beträgt $A = 2{,}5\ \text{mm}^2$. Kupfer hat den spezifischen Widerstand $\varrho_\text{R} = 1{,}75 \cdot 10^{-8}\ \Omega\text{m}$.

a) Bestimmen Sie den Drahtdurchmesser.

b) Wie groß ist der Widerstand der Leitung?

c) Welche maximale Länge darf die Doppelleitung haben, wenn der Widerstand der Leitung $1{,}2\ \Omega$ nicht überschreiten soll?

Lösung der Übungsaufgabe 1.7 (Seite 49)

a) Drahtdurchmesser

$$A = \pi d^2/4 \quad \Rightarrow \quad d = 2\sqrt{A/\pi} = 1{,}784\ \text{mm}$$

b) Leitungswiderstand

Die Drahtlänge der Doppelleitung beträgt 2×50 m.

$$R = \varrho_R \frac{2\,l}{A} = 1{,}75 \cdot 10^{-8}\ \Omega{\cdot}\text{m} \cdot \frac{2 \cdot 50\ \text{m}}{2{,}5 \cdot (10^{-3}\ \text{m})^2} = 1{,}75 \cdot 10^{-8} \cdot 40 \frac{\Omega{\cdot}\text{m}^2}{10^{-6}\ \text{m}^2} = 0{,}7\ \Omega$$

c) Maximale Leitungslänge ($R \leq R_{\text{max}} = 1{,}2\ \Omega$)

$$l_{\text{max}} = \frac{R_{\text{max}} \cdot A}{2\varrho_R} = \frac{1{,}2\ \Omega \cdot 2{,}5\ \text{mm}^2}{2 \cdot 1{,}75 \cdot 10^{-8}\ \Omega{\cdot}\text{m}} = 85{,}71\ \text{m}$$

Alternativer Lösungsweg: Dreisatz

$$\left.\begin{array}{lcl} 0{,}7\ \Omega & \widehat{=} & 50\ \text{m} \\ 1{,}2\ \Omega & \widehat{=} & \dfrac{1{,}2}{0{,}7} \cdot 50\ \text{m} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad l_{\text{max}} = 1{,}714 \cdot 50\ \text{m} = 85{,}71\ \text{m}$$

Octave-Datei: `loesung_01_07.m`

```
% Lösung der Übungsaufgabe 1.7

% Vorgaben (Aufgabenstellung)
l = 50;         % m
A = 2.5;        % mm²
rhoR = 1.75e-8; % Ohm m
Rmax = 1.2;     % Ohm
disp(["Vorgaben"]);
disp(["l    = ",num2str(l)," m"]);
disp(["A    = ",num2str(A)," mm²"]);
disp(["rhoR = ",num2str(rhoR)," Ohm m"]);
disp(["Rmax = ",num2str(Rmax)," Ohm"]);
disp(" ");

% Drahtdurchmesser
d = 2*sqrt(A/pi);
disp(["Drahtdurchmesser"]);
disp(["d = ",num2str(d)," mm"]);
disp(" ");

% Leitungswiderstand (Doppelleitung, d.h. doppelte Drahtlänge)
R = 2*l*rhoR/(A*10^(-6)); % 1 mm² = 10⁻⁶ m²
disp(["Leitungswiderstand"]);
disp(["R = ",num2str(R)," Ohm"]);
disp(" ");

% Maximale Leitungslänge
lmax = Rmax*A*10^(-6)/(2*rhoR); % 1 mm² = 10⁻⁶ m²
disp(["Maximale Leitungslänge"]);
disp(["lmax = ",num2str(lmax)," m"]);
disp(" ");
```

Übung 1.8 Temperaturabhängigkeit

Ein Aluminiumdraht der Länge $l = 350$ m hat einen kreisrunden Querschnitt mit einem Durchmesser von $d = 5$ mm. In der Tabelle 1.1 auf Seite 32 sind die Kenngrößen für Aluminium zu finden.

a) Bestimmen Sie den Widerstand des Drahtes bei 20 °C.

b) Geben Sie den Temperaturbereich $\Delta\vartheta$ an, in dem die lineare Näherung der Temperaturabhängigkeit von der quadratischen um maximal 10 % abweicht.

c) Bei welcher Temperatur verdoppelt sich der Widerstand des Drahtes gegenüber dem Widerstandswert bei 20 °C.

Lösung der Übungsaufgabe 1.8 (Seite 49)

Kennwerte von Aluminium bei 20 °C

$$\varrho_R = 0{,}0287\ \Omega\text{mm}^2/\text{m}$$
$$\alpha = 0{,}0038\ \text{K}^{-1}$$
$$\beta = 1{,}3 \cdot 10^{-6}\ \text{K}^{-2}$$

a) Drahtwiderstand bei 20 °C

$$A = \pi\frac{d^2}{4} = \pi\frac{(5\ \text{mm})^2}{4} = 19{,}635\ \text{mm}^2$$
$$R = \varrho_R\frac{l}{A} = 0{,}0287\ \Omega\text{mm}^2/\text{m} \cdot \frac{350\ \text{m}}{19{,}635\ \text{mm}^2} = 0{,}5116\ \Omega$$

b) Abweichung von linearer und quadratischer Näherung

lineare Näherung: $\varrho_{Rl} = \varrho_{R0}\left(1 + \alpha(T - T_0)\right)$

quadratische Näherung: $\varrho_{Rq} = \varrho_{R0}\left(1 + \alpha(T - T_0) + \beta(T - T_0)^2\right)$

Feststellung: $\varrho_{Rq} = \varrho_{Rl} + \varrho_{R0}\beta(T - T_0)^2 \geq \varrho_{Rl}$ für $\beta > 0$

Gesucht werden hier die Temperaturen, bei denen die Abweichung der beiden Näherungen 10 % beträgt. Die prozentuale Abweichung wird dabei auf den genaueren Wert, also den Wert der quadratischen Näherung bezogen.

$$\frac{\varrho_{Rq} - \varrho_{Rl}}{\varrho_{Rq}} = 0{,}1 \quad \Rightarrow \quad 0{,}9\,\varrho_{Rq} = \varrho_{Rl}$$

$$0{,}9\,\varrho_{R0}\left(1 + \alpha(T - T_0) + \beta(T - T_0)^2\right) = \varrho_{R0}\left(1 + \alpha(T - T_0)\right)$$
$$0{,}9 + 0{,}9\,\alpha(T - T_0) + 0{,}9\,\beta(T - T_0)^2 = 1 + \alpha(T - T_0)$$
$$0{,}9\,\beta(T - T_0)^2 - 0{,}1\,\alpha(T - T_0) = 0{,}1$$
$$(T - T_0)^2 - \frac{0{,}1\,\alpha}{0{,}9\,\beta}(T - T_0) = \frac{0{,}1}{0{,}9\,\beta}$$

Es ist eine quadratische Gleichung in $(T - T_0)$ zu lösen. Zur Vereinfachung lösen wir $x^2 - ax = b$ mit

$$x = T - T_0\,,$$
$$a = \frac{0{,}1\,\alpha}{0{,}9\,\beta} = \frac{0{,}1 \cdot 0{,}0038}{0{,}9 \cdot 1{,}3 \cdot 10^{-6}}\ \text{K} = 324{,}8\ \text{K}\,,$$
$$b = \frac{0{,}1}{0{,}9\,\beta} = \frac{0{,}1}{0{,}9 \cdot 1{,}3 \cdot 10^{-6}}\ \text{K}^2 = 85470\ \text{K}^2\,.$$

Die Lösung von $x^2 - ax = b$ lautet:

$$x_{1,2} = \frac{a}{2} \pm \sqrt{b + \frac{a^2}{4}} = 162{,}4\ \mathrm{K} \pm \sqrt{85470\ \mathrm{K}^2 + 26324\ \mathrm{K}^2} = 162{,}4\ \mathrm{K} \pm 334{,}4\ \mathrm{K}$$

$$x_1 = \quad 496{,}8\ \mathrm{K}$$

$$x_2 = -172{,}0\ \mathrm{K}$$

Da es sich bei x_1 und x_2 um Temperaturdifferenzen handelt, dürfen auch negative Werte auftreten und bei Temperaturdifferenzen entspricht 1 °C genau 1 K. Den Übergang zu Celsius-Graden erreichen wir mit $T_0 = 20\ °\mathrm{C}$.

$$x_1 = T_+ - T_0 \quad \Rightarrow \quad T_+ = x_1 + T_0 = \quad 516{,}8\ °\mathrm{C}$$

$$x_2 = T_- - T_0 \quad \Rightarrow \quad T_- = x_2 + T_0 = -152{,}0\ °\mathrm{C}$$

Maximale Abweichung 1 %: $-54{,}6\ °\mathrm{C} \le T \le 124{,}1\ °\mathrm{C}$
Maximale Abweichung 5 %: $-118{,}5\ °\mathrm{C} \le T \le 312{,}3\ °\mathrm{C}$

c) Widerstandsverdopplung

Wir verwenden die quadratische Näherung und erhalten wieder eine quadratische Gleichung, die zu lösen ist.

$$\varrho_{\mathrm{R0}}\left(1 + \alpha(T - T_0) + \beta(T - T_0)^2\right) = 2 \cdot \varrho_{\mathrm{R0}}$$

$$\beta(T - T_0)^2 + \alpha(T - T_0) = 1$$

$$(T - T_0)^2 + \frac{\alpha}{\beta}(T - T_0) = \frac{1}{\beta}$$

Wir lösen, genau wie im vorangegangenen Aufgabenpunkt $x^2 - ax = b$ mit

$$x = T - T_0\,,$$

$$a = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{0{,}0038}{1{,}3 \cdot 10^{-6}}\ \mathrm{K} = 2923\ \mathrm{K}\,,$$

$$b = \frac{1}{\beta} = \frac{1}{\cdot 1{,}3 \cdot 10^{-6}}\ \mathrm{K}^2 = 769231\ \mathrm{K}^2\,.$$

Als Lösungen erhalten wir

$$T_1 = \quad 536\ \mathrm{K} \mathrel{\widehat{=}} 263\ °\mathrm{C} \qquad (0\ °\mathrm{C} \mathrel{\widehat{=}} 273\ \mathrm{K})$$

$$T_2 = -2873\ \mathrm{K} \quad \text{(negative absolute Temperatur!)}$$

Da es sich um absolute Temperaturen handelt, ist hier nur die positive Lösung von Bedeutung. (Grenzen des Modells!)

Octave-Datei: `loesung_01_08.m`

```
% Lösung der Übungsaufgabe 1.8

% Kennwerte von Aluminium bei 20°C
rhoR  = 0.0287; % Ohm mm²/m  (spezifischer Widerstand)
alpha = 0.0038; % K⁻¹        (linearer Temperaturkoeffizient)
beta  = 1.3e-6; % K⁻²        (quadratischer Temperaturkoeffizient)
T0    = 20;     % °C         (Bezugstemperatur)

% Vorgaben (Aufgabenstellung)
l = 350;   % m
d = 5;     % mm
P = 10;    % Prozent
p = P/100; % relative Abweichung
disp(["Vorgaben"]);
disp(["l = ",num2str(l)," m"]);
disp(["d = ",num2str(d)," mm"]);
disp(["P = ",num2str(P)," %"]);
disp(" ");

% Drahtwiderstand bei 20°C
A = pi*(d/2)^2; % Querschnittsfläche des Drahtes in mm²
R = rhoR*l/A;   % Beachte: Die Einheit von rhoR ist Ohm mm²/m
disp(["Drahtwiderstand bei 20°C"]);
disp(["R = ",num2str(R)," Ohm"]);
disp(" ");

% Temperaturbereich bei Abweichung der Näherungen um p*100 %
% Quadratische Gleichung: (1-p)*beta*(T-T0)^2 - p*alpha*(T-T0) - p = 0
T = roots([(1-p)*beta,-p*alpha,-p])+T0;
disp(["Temperaturbereich bei Abweichung der Näherungen um ",...
      num2str(p*100)," %"]);
disp(["Tmin = ",num2str(min(T))," °C"]);
disp(["Tmax = ",num2str(max(T))," °C"]);
disp(" ");

% Widerstandsverdoppelung
% Quadratische Gleichung: beta*(T-T0)^2 + alpha*(T-T0) - 1 = 0
T = roots([beta,alpha,-1])+T0;
disp(["Widerstandsverdoppelung"]);
disp(["T1 = ",num2str(T(1))," °C"]);
disp(["T2 = ",num2str(T(2))," °C"]);
disp(["Lösung nur gültig für T > -273 °C (absoluter Nullpunkt)"]);
disp(" ");
```

Übung 1.9 Temperaturabhängigkeit

Der Widerstand eines Kupferdrahtes wird bei −10 °C mit 7,8 Ω gemessen. Die Länge des verwendeten Drahtes beträgt 200 m. Die Kenngrößen für Kupfer sind in der Tabelle 1.1 auf Seite 32 angegeben.

a) Wie groß sind Querschnittfläche und Durchmesser des Drahtes?

b) Wie groß ist der Widerstand des Drahtes bei 35 °C.

c) Bestimmen Sie die Kenngrößen ϱ_{R0}, α_0 und β_0 für 0 °C.

Lösung der Übungsaufgabe 1.9 (Seite 49)

Relevante Kennwerte von Kupfer bei $T = 20\,°\text{C}$

$$\varrho_\text{R} = 0{,}0175\ \Omega\text{·mm}^2/\text{m}$$
$$\alpha = 0{,}004\ \text{K}^{-1}$$
$$\beta = 0{,}6 \cdot 10^{-6}\ \text{K}^{-2}$$

a) Querschnittsfläche und Durchmesser des Drahtes ($R_{-10} = 7{,}8\ \Omega$ bei $T = -10\,°\text{C}$)

$$R_{-10} = R_{20}\left(1 + \alpha\left(T - T_0\right) + \beta\left(T - T_0\right)^2\right) = 7{,}8\ \Omega$$

$$R_{20} = \frac{R_{-10}}{\left(1 + \alpha\left(T - T_0\right) + \beta\left(T - T_0\right)^2\right)} \quad \text{mit } T_0 = 20\,°\text{C} \quad \text{und } T = -10\,°\text{C}$$

$$R_{20} = \varrho_{\text{R20}} \frac{l}{A} \quad \Rightarrow \quad A = \frac{\varrho_{\text{R20}}}{R_{20}} \cdot l$$

$$A = \frac{\varrho_{\text{R20}}}{R_{-10}} \cdot l \cdot \left(1 + \alpha\left(T - T_0\right) + \beta\left(T - T_0\right)^2\right)$$

$$= \frac{0{,}0175\ \Omega\text{·mm}^2/\text{m}}{7{,}8\ \Omega} \cdot 200\ \text{m} \cdot \left(1 - 0{,}004 \cdot 30 + 0{,}6 \cdot 10^{-6} \cdot 900\right) = 0{,}395\ \text{mm}^2$$

$$d = 2 \cdot \sqrt{A/\pi} = 0{,}709\ \text{mm}$$

b) Widerstand des Drahtes bei 35° C

Zur Berechnung muss R_{20} herangezogen werden, d. h.,

$$R_{35} \neq R_{-10}\left(1 + \alpha\,\Delta T + \beta\,\Delta T^2\right) \quad \text{mit } \Delta T = 45\,°\text{C}$$

sondern

$$R_{35} = \varrho_{\text{R20}} \frac{l}{A}\left(1 + \alpha\left(T - T_0\right) + \beta\left(T - T_0\right)^2\right) \quad \text{mit } T = 35\,°\text{C} \quad \text{und } T_0 = 20\,°\text{C}.$$

$$R_{35} = 0{,}0175\,\frac{\Omega\text{·mm}^2}{\text{m}} \cdot \frac{200\ \text{m}}{0{,}395\ \text{mm}^2} \cdot \left(1 + 0{,}004\ \text{K}^{-1} \cdot \left(35\,°\text{C} - 20\,°\text{C}\right) + 0{,}6 \cdot 10^{-6}\ \text{K}^{-2} \cdot \left(35\,°\text{C} - 20\,°\text{C}\right)^2\right)$$

$$R_{35} = 9{,}39\ \Omega$$

Die Parameter α und β in der Näherungsgleichung beziehen sich immer auf die Temperatur T_0. Deshalb muss immer der (spezifische) Widerstand bei genau dieser Temperatur T_0 eingesetzt werden.

c) Spezifischer Widerstand ϱ_{R0} bei $T = 0\,°\mathrm{C}$
Bestimmung der Kenngrößen α_0 und β_0 bei $T = 0\,°\mathrm{C}$

$$\varrho_{\mathrm{R0}} = \varrho_{\mathrm{R20}}\left(1+\alpha\left(T-T_0\right)+\beta\left(T-T_0\right)^2\right) \quad \text{mit } T = 0\,°\mathrm{C} \text{ und } T_0 = 20\,°\mathrm{C}$$

$$\varrho_{\mathrm{R0}} = 0{,}0175\,\frac{\Omega\cdot\mathrm{mm}^2}{\mathrm{m}}\cdot\left(1-0{,}004\cdot 20+0{,}6\cdot 10^{-6}\cdot 400\right) = 0{,}0161\,\frac{\Omega\cdot\mathrm{mm}^2}{\mathrm{m}}$$

Beschreibung der Temperaturabhängigkeit des spezifischen Widerstands mit Parametern, die sich auf zwei beliebigen Temperaturen T_1 bzw. T_2 beziehen

(Der Parameter ϱ_{R} ist temperaturabhängig. Die Werte von α und β sind abhängig von der Temperatur, auf die sich ϱ_{R} bezieht.)

$$\varrho_1(T) = \varrho_{\mathrm{R1}}\left(1+\alpha_1\left(T-T_1\right)+\beta_1\left(T-T_1\right)^2\right)$$
$$\varrho_2(T) = \varrho_{\mathrm{R2}}\left(1+\alpha_2\left(T-T_2\right)+\beta_2\left(T-T_2\right)^2\right)$$

Gleichheit: $\varrho_1(T) = \varrho_1(T) = \varrho_{\mathrm{R}}(T)$ bei beliebigen Temperaturen T.
Entweder beide Gleichungen ausmultiplizieren, dann Koeffizientenvergleich durchführen und Gleichungssystem lösen oder folgendermaßen vorgehen:

$$\varrho_{\mathrm{R2}} = \varrho_2(T_2) = \varrho_1(T_2) = \varrho_{\mathrm{R1}}\left(1+\alpha_1\left(T_2-T_1\right)+\beta_1\left(T_2-T_1\right)^2\right)$$

Erste Ableitung bei $T = T_2$ auswerten, d. h., $\varrho_1'(T_2) = \varrho_2'(T_2)$.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}T}\varrho_1(T) = \varrho_1'(T) = \varrho_{\mathrm{R1}}\alpha_1 + 2\varrho_{\mathrm{R1}}\beta_1\left(T-T_1\right)$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}T}\varrho_2(T) = \varrho_2'(T) = \varrho_{\mathrm{R2}}\alpha_2 + 2\varrho_{\mathrm{R2}}\beta_2\left(T-T_2\right)$$

$$\varrho_1'(T_2) = \varrho_{\mathrm{R1}}\alpha_1 + 2\varrho_{\mathrm{R1}}\beta_1\left(T_2-T_1\right)$$
$$\varrho_2'(T_2) = \varrho_{\mathrm{R2}}\alpha_2$$
$$\alpha_2 = \frac{\varrho_{\mathrm{R1}}}{\varrho_{\mathrm{R2}}}\left(\alpha_1+2\beta_1\left(T_2-T_1\right)\right) = \frac{\alpha_1+2\beta_1\left(T_2-T_1\right)}{1+\alpha_1\left(T_2-T_1\right)+\beta_1\left(T_2-T_1\right)^2}$$

Zweite Ableitung bei $T = T_2$ auswerten, d. h., $\varrho_1''(T_2) = \varrho_2''(T_2)$.

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}T^2}\varrho_1(T) = \varrho_1''(T) = 2\varrho_{\mathrm{R1}}\beta_1$$
$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}T^2}\varrho_2(T) = \varrho_2''(T) = 2\varrho_{\mathrm{R2}}\beta_2$$

$$\varrho_1''(T_2) = 2\varrho_{\mathrm{R1}}\beta_1$$
$$\varrho_2''(T_2) = 2\varrho_{\mathrm{R2}}\beta_2$$
$$\beta_2 = \frac{\varrho_{\mathrm{R1}}}{\varrho_{\mathrm{R2}}}\beta_1 = \frac{\beta_1}{1+\alpha_1\left(T_2-T_1\right)+\beta_1\left(T_2-T_1\right)^2}$$

Anwendung der Ergebnisse auf die Aufgabenstellung mit $T_1 = 20\ °\mathrm{C}$ und $T_2 = 0\ °\mathrm{C}$

$\varrho_{\mathrm{R1}} = \varrho_{\mathrm{R20}},\ \alpha_1 = \alpha_{20},\ \beta_1 = \beta_{20}$ sind gegeben,
$\varrho_{\mathrm{R2}} = \varrho_{\mathrm{R0}},\ \alpha_2 = \alpha_0,\ \beta_2 = \beta_0$ sind gesucht.

$$\varrho_{\mathrm{R0}} = \varrho_{\mathrm{R20}}\left(1 + \alpha_{20}\left(T_2 - T_1\right) + \beta_{20}\left(T_2 - T_1\right)^2\right)$$

$$= 0{,}0175\ \frac{\Omega\cdot\mathrm{mm}^2}{\mathrm{m}} \cdot \left(1 - 0{,}004 \cdot 20 + 0{,}6 \cdot 10^{-6} \cdot 400\right)$$

$$\varrho_{\mathrm{R0}} = 0{,}0161\ \frac{\Omega\cdot\mathrm{mm}^2}{\mathrm{m}}$$

$$\alpha_0 = \frac{\alpha_{20} + 2\beta_{20}\left(T_2 - T_1\right)}{1 + \alpha_{20}\left(T_2 - T_1\right) + \beta_{20}\left(T_2 - T_1\right)^2} = \frac{0{,}004 + 2 \cdot 0{,}6 \cdot 10^{-6} \cdot 20}{1 - 0{,}004 \cdot 20 + 0{,}6 \cdot 10^{-6} \cdot 400}\ \frac{1}{\mathrm{K}}$$

$$\alpha_0 = 0{,}00432\ \frac{1}{\mathrm{K}}$$

$$\beta_0 = \frac{\beta_{20}}{1 + \alpha_{20}\left(T_2 - T_1\right) + \beta_{20}\left(T_2 - T_1\right)^2} = \frac{0{,}6 \cdot 10^{-6}}{1 - 0{,}004 \cdot 20 + 0{,}6 \cdot 10^{-6} \cdot 400}\ \frac{1}{\mathrm{K}^2}$$

$$\beta_0 = 0{,}652 \cdot 10^{-6}\ \frac{1}{\mathrm{K}^2}$$

Octave-Datei: `loesung_01_09.m`

```
% Lösung der Übungsaufgabe 1.9

% Kennwerte von Kupfer bei 20°C
rhoR  = 0.0175; % Ohm mm²/m  (spezifischer Widerstand)
alpha = 0.004;  % K⁻¹        (linearer Temperaturkoeffizient)
beta  = 0.6e-6; % K⁻²        (quadratischer Temperaturkoeffizient)
T0    = 20;     % °C         (Bezugstemperatur)

% Vorgaben (Aufgabenstellung)
T1 = -10; % °C
T2 = 35;  % °C
T3 = 0;   % °C
R1 = 7.8; % Ohm (Widerstand bei T1)
l  = 200; % m
disp(["Vorgaben"]);
disp(["T0 = ",num2str(T0)," °C (Bezugstemperatur)"]);
disp(["T1 = ",num2str(T1)," °C"]);
disp(["T2 = ",num2str(T2)," °C"]);
disp(["T3 = ",num2str(T3)," °C"]);
disp(["R1 = ",num2str(R1)," Ohm (Widerstand bei T = T1)"]);
disp(["l  = ",num2str(l)," m"]);
disp(" ");

% Drahtwiderstand bei 20 °C
R0 = R1/(1+alpha*(T1-T0)+beta*(T1-T0)^2);
disp(["Drahtwiderstand bei 20 °C"]);
disp(["R0 = ",num2str(R0)," Ohm (Widerstand bei T = T0 = ",...
      num2str(T0)," °C)"]);
disp(" ");

% Querschnittsfläche und Durchmesser des Drahtes
A = rhoR*l/R0;    % Querschnittsfläche des Drahtes in mm²
d = 2*sqrt(A/pi); % Beachte: Die Einheit von rhoR ist Ohm mm²/m
disp(["Querschnittsfläche und Durchmesser des Drahtes"]);
disp(["A = ",num2str(A)," mm²"]);
disp(["d = ",num2str(d)," mm"]);
disp(" ");

% Drahtwiderstand bei 35 °C
R2 = R0*(1+alpha*(T2-T0)+beta*(T2-T0)^2);
disp(["Drahtwiderstand bei 35 °C"]);
disp(["R2 = ",num2str(R2)," Ohm (Widerstand bei T = T2 = ",...
      num2str(T2)," °C)"]);
disp(" ");
```

Octave-Datei: `loesung_01_09.m` (Fortsetzung)

```
% Spezifischer Widerstand bei 0 °C
rhoR0 = rhoR*(1+alpha*(T3-T0)+beta*(T3-T0)^2);
disp(["Spezifischer Widerstand bei 0 °C"]);
disp(["rhoR0 = ",num2str(rhoR0)," Ohm mm²/m"]);
disp(" ");

% Temperaturkoeffizienten bei 0 °C
alpha0 = (alpha+2*beta*(T3-T0))/(1+alpha*(T3-T0)+beta*(T3-T0)^2);
beta0 = beta/(1+alpha*(T3-T0)+beta*(T3-T0)^2);
disp(["Temperaturkoeffizienten bei 0 °C"]);
disp(["alpha0 = ",num2str(alpha0)," K^-1"]);
disp(["beta0 = ",num2str(beta0)," K^-2"]);
disp(" ");
```

Übung 1.10 Normreihen

Die Normreihe E 12 teilt jede Dekade logarithmisch in 12 Abschnitte auf. In Tabelle 1.2 auf Seite 37 sind verschiedene Normreihen aufgelistet.

a) Berechnen Sie die exakten Staffelwerte der Normreihe E 12 und geben Sie die prozentuale Abweichung der Nennwerte von den exakten Staffelwerten an.

b) Wie groß ist die maximale Abweichung eines Nennwertes vom zugehörigen exakten Staffelwert und bei welchem Nennwert wird diese erreicht?

Nun wird ein Wert kontinuierlich über eine ganze Dekade variiert. Verwenden Sie zur numerischen Berechnung mindestens 100 Stützwerte.

c) Bestimmen Sie zum jeweiligen Wert den nächstliegenden Nennwert und tragen Sie diesen in einem Diagramm über dem Wert auf.

d) Berechnen Sie die prozentuale Abweichung des Nennwertes vom jeweiligen Wert und tragen Sie auch diese in einem Diagramm über dem Wert auf.

e) Wie groß ist die maximale Abweichung und bei welchem Wert wird diese erreicht?

Lösung der Übungsaufgabe 1.10 (Seite 49)

Nominalwerte der Normreihe E 12

$$w_i = \{\, 1{,}0;\ 1{,}2;\ 1{,}5;\ 1{,}8;\ 2{,}2;\ 2{,}7;\ 3{,}3;\ 3{,}9;\ 4{,}7;\ 5{,}6;\ 6{,}8;\ 8{,}2 \,\}$$

a) Exakte Staffelwerte der Normreihe E 12

$$x_i = 10^{i/n} \qquad \text{mit } i = 0, 1, 2, \ldots, n-1 \quad \text{und } n = 12$$

Prozentuale Abweichung der Nominalwerte von den exakten Staffelwerten

$$p_i = \frac{w_i - x_i}{x_i} \cdot 100\,\%$$

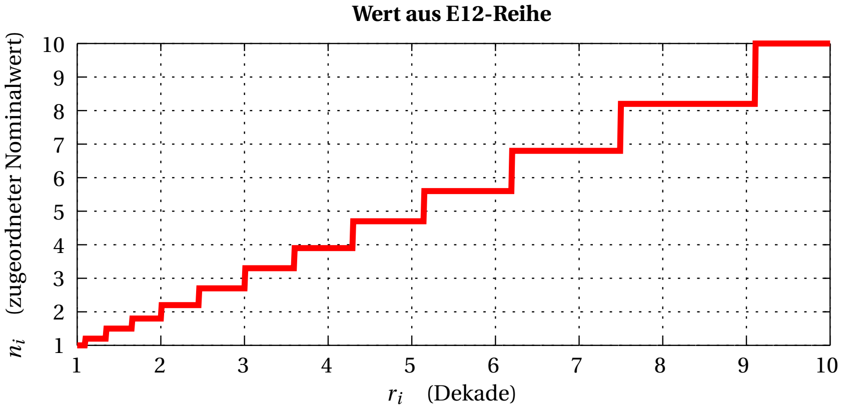
Nominalwert	exakter Staffelwert	prozentuale Abweichung
w_i	x_i	p_i
1,0	1,000	0.000 %
1,2	1,212	-0.952 %
1,5	1,468	2.194 %
1,8	1,778	1.221 %
2,2	2,154	2.115 %
2,7	2,610	3.442 %
3,3	3,162	4.355 %
3,9	3,831	1.796 %
4,7	4,642	1.258 %
5,6	5,623	-0.416 %
6,8	6,813	-0.190 %
8,2	8,254	-0.655 %

b) Maximale Abweichung eines Nominalwertes vom exakten Staffelwertes

$\max\{|p_i|\} = 4{,}355\,\%$ bei $i = 6$ bzw. $w_i = 3{,}3$

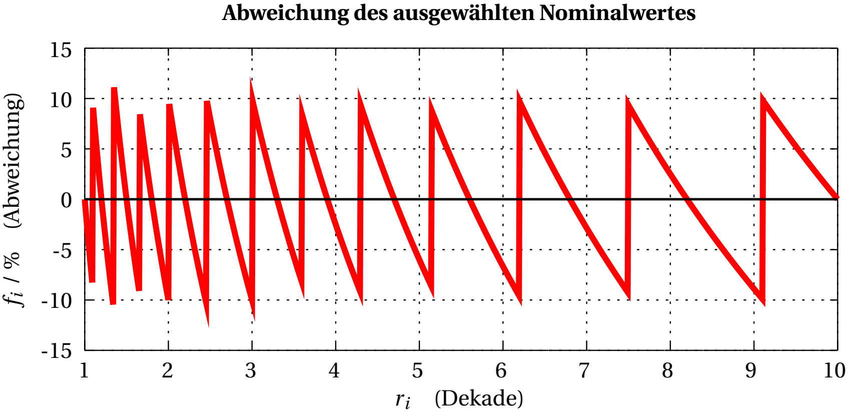
c) Rundung eines beliebigen Wertes auf den nächstliegenden Nominalwert

Zunächst lassen wir eine Variable $1 \leq r \leq 10$ mit äquidistanter Schrittweite eine vollständige Dekade durchlaufen. Für jeden Wert r_i wird dann der minimale Abstand zum nächsten Nominalwert ermittelt. Dieser n_i wird dann dem Wert r_i zugeordnet. Die Realisierung dieses Algorithmus ist der Octave-Datei zu entnehmen.



d) Prozentuale Abweichung eines beliebigen Wertes vom zugeordneten Nominalwert

Nun bestimmen wir die prozentuale Abweichung jedes einzelnen Wertes r_i von dem ihm zugeordneten Nominalwert. Auch diese Realisierung ist der Octave-Datei zu entnehmen.



e) Maximale prozentuale Abweichung

Im Folgenden bezeichnet n_i den dem Wert r_i zugeordneten Nominalwert.

$$f_i = \frac{n_i - r_i}{r_i} \cdot 100\,\%$$

$\max\{|f_i|\} = 11{,}1\,\%$ bei $r_i = 1{,}35$

Octave-Datei: `loesung_01_10.m`

```
% Lösung der Übung 1.10

% Nominalwerte (Staffelwerte)
E6  = [1.0,1.5,2.2,3.3,4.7,6.8];
E12 = [1.0,1.2,1.5,1.8,2.2,2.7,3.3,3.9,4.7,5.6,6.8,8.2];
E24 = [1.0,1.1,1.2,1.3,1.5,1.6,1.8,2.0,2.2,2.4,2.7,3.0,...
       3.3,3.6,3.9,4.3,4.7,5.1,5.6,6.2,6.8,7.5,8.2,9.1];

% Berechnung der exakten Staffelwerte
E = 12; % Vorgabe der Norm-Reihe (E=6,12,24)
i = 0:E-1;
x = 10.^(i/E); % exakte Staffelwerte

% Prozentuale Abweichung des Nominalwerts vom exakten Staffelwert
if (E == 6) w = E6;
elseif (E == 12) w = E12;
elseif (E == 24) w = E24;
else En = [];
endif
p = 100*(w-x)./x;
disp(["Norm-Reihe E",num2str(E)]);
disp(["Maximale Abweichung der Nominalwerte vom exakten ",...
      "Staffelwert pmax = ",num2str(max(abs(p)))," %"]);
disp("             exakter");
disp("   Nominal-  Staffel-  prozentuale");
disp("   wert      wert      Abweichung");
disp([w;x;p]');

% Prozentuale Abweichung eines beliebigen Wertes vom nächsten Staffelwert
r = 1:0.01:10;   % Variation des Wertes über eine Dekade
w = [w,10];      % Ersten Nominalwert der nächsten Dekade hinzu nehmen
n = zeros(size(r)); % Vektor der Nominalwertzuordnug initialisieren
for i=1:length(r) % Index des nächstliegenden Nominalwerts suchen
  idx = find(min(abs(r(i)-w))==abs(r(i)-w));
  n(i) = w(idx(1)); % siehe Anmerkung
endfor
f = 100*(n-r)./r; % Abweichung des gewählten Nominalwert vom Wunschwert
% Anmerkung: Liegt der Wunschwert exakt zwischen zwei Nominalwerten,
% so liefert der Vergleich zwei Werte (ein Vektor der Länge 2). Es kann aber
% nur ein Nominalwert zugeordnet werden. Hier wird der kleinere ausgewählt.
idx = find(abs(f)==max(abs(f))); % Index der maximalen Abweichung
disp(["Maximale Abweichung bei r = ",num2str(r(idx)),...
      "    -> Abweichung ",num2str(f(idx))," %"]);
disp("    Wunsch-    Nominal-  prozentuale");
disp("    wert       wert      Abweichung");
%disp([r;n;f]'); % Ausgabe längenbedingt nur bei Bedarf
```

Octave-Datei: `loesung_01_10.m` (Fortsetzung)

```
% Zuordnung des nächstliegenden Nominalwertes
hFig1 = figure("Name",["Wert aus E",num2str(E),"-Reihe"]);
hPlot1 = plot(r,n,"r");
grid on;
title(["\\bf Wert aus E",num2str(E),"-Reihe"]);
xlabel("r_i (Dekade)");
ylabel("n_i (zugeordneter Nominalwert)");

% Abweichung des ausgewählten Nominalwertes
hFig2 = figure("Name","Abweichung des ausgewählten Nominalwertes");
hPlot2 = plot(r,f,"r");
grid on;
title("\\bf Abweichung des ausgewählten Nominalwertes");
xlabel("r_i (Dekade)");
ylabel("f_i / % (Abweichung)");
```