HANSER

Etienne Emmrich, Carsten Trunk

Gut vorbereitet in die erste Mathematikklausur

ISBN-10: 3-446-41135-6
ISBN-13: 978-3-446-41135-7

Leseprobe

6 Taylorpolynom und Restgliedabschätzung

Aufgabe 6.1
Bestimmen Sie das Taylorpolynom zweiten Grades für die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \quad f(x) = 1 + \sin(x^2)\,,$$

mit dem Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

Lösung
Das *Taylorpolynom n-ten Grades* einer Funktion ist, wie der Name schon sagt, ein Polynom, und zwar vom Grade kleiner oder gleich n. Wir wollen dieses Polynom im Folgenden mit T_n bezeichnen. Das Taylorpolynom n-ten Grades einer n-mal differenzierbaren Funktion f mit dem *Entwicklungspunkt* x_0 ist an der Stelle x gegeben durch

$$\begin{aligned} T_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \\ &= \frac{f^{(0)}(x_0)}{0!}(x-x_0)^0 + \frac{f^{(1)}(x_0)}{1!}(x-x_0)^1 \\ &+ \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n. \end{aligned}$$

Hier ist $f^{(0)}$ die Funktion f selbst, $f^{(1)}$ die erste, $f^{(2)}$ die zweite Ableitung usf. Nun beachten wir noch, dass $0! = 1$, $1! = 1$ und $(x-x_0)^0 = 1$ für alle x, x_0 gilt, und erhalten

$$\begin{aligned} T_n(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) \\ &+ \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n. \end{aligned} \tag{6.1}$$

Jetzt können wir die Aufgabe bearbeiten. Gesucht ist das Taylorpolynom zweiten Grades mit dem Entwicklungspunkt $x_0 = 0$. Wir setzen daher

$n = 2$ und $x_0 = 0$ in die Beziehung (6.1) ein und erhalten

$$\begin{aligned} T_2(x) &= f(0) + f'(0)(x-0) + \frac{f''(0)}{2}(x-0)^2 \\ &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2. \end{aligned}$$

Es bleibt, die Werte $f(0)$, $f'(0)$ und $f''(0)$ zu bestimmen. Die Ableitungen der Funktion $f(x) = 1 + \sin(x^2)$ lauten

$$f'(x) = 2x\cos(x^2) \quad \text{und} \quad f''(x) = 2\cos(x^2) - 4x^2\sin(x^2). \tag{6.2}$$

Daher haben wir $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$ sowie $f''(0) = 2$, und das gesuchte Taylorpolynom zweiten Grades von f mit dem Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ lautet

$$T_2(x) = 1 + 0x + x^2 = 1 + x^2. \tag{6.3}$$

Aufgabe 6.2
Bestimmen Sie das Taylorpolynom zweiten Grades für die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 1 + \sin(x^2), \tag{6.4}$$

mit dem Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ und das Restglied. Berechnen Sie näherungsweise den Funktionswert $f(\frac{1}{2})$. Ermitteln Sie eine obere Schranke für den Betrag des Restgliedes bei $x = \frac{1}{2}$ und geben Sie damit ein möglichst kleines Intervall an, von dem sicher ist, dass es $f(\frac{1}{2})$ enthält.

Lösung
Mit (6.3) haben wir bereits in der vorherigen Aufgabe das Taylorpolynom T_2 im Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ für die Funktion f aus (6.4) bestimmt,

$$T_2(x) = 1 + x^2.$$

Das *Restglied* zum Taylorpolynom n-ten Grades einer Funktion f mit dem Entwicklungspunkt x_0 bezeichnen wir mit R_n. Es ist gegeben durch

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x). \tag{6.5}$$

Das Restglied R_n ist also die Differenz zwischen der Funktion und dem Taylorpolynom n-ten Grades. Betrachtet man das Taylorpolynom als eine Approximation an die Funktion f, so beschreibt $R_n(x)$ den *Fehler* dieser Approximation an der Stelle x. Das Besondere ist nun, dass man eine Formel für diesen Fehler hat. Ist f $(n+1)$-mal differenzierbar, so gilt nämlich

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}. \tag{6.6}$$

Dabei ist ξ eine im Allgemeinen nicht bekannte Zahl, die zwischen dem Entwicklungspunkt x_0 und der Stelle x liegt und insbesondere von x abhängt. Nun können wir die Formel (6.6) dazu benutzen, den Betrag des Restgliedes R_n nach oben abzuschätzen, um so eine Schranke für den Fehler zu erhalten, was in der vorliegenden Aufgabe auch verlangt wird.

Zur Lösung unserer Aufgabe setzen wir also $x = \frac{1}{2}$ und $n = 2$ in (6.5) ein und erhalten nach Umstellen

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = T_2\left(\frac{1}{2}\right) + R_2\left(\frac{1}{2}\right). \tag{6.7}$$

Wir können nun zunächst $f\left(\frac{1}{2}\right)$ näherungsweise als $T_2\left(\frac{1}{2}\right)$ bestimmen, wobei wir den Fehler $R_2\left(\frac{1}{2}\right)$ machen. Da $T_2(x) = 1 + x^2$ ist, gilt

$$f\left(\frac{1}{2}\right) \approx T_2\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}. \tag{6.8}$$

Jetzt bestimmen wir gemäß (6.6) das Restglied zum Taylorpolynom zweiten Grades und damit den Fehler unserer Näherung. Es ist $n = 2$, $x_0 = 0$ und $x = \frac{1}{2}$. Es bleibt, die dritte Ableitung der Funktion f aus (6.4) zu bestimmen, wobei die erste und zweite Ableitung schon in (6.2) zu finden sind. Es gilt

$$\begin{aligned} f'''(x) &= -4x\sin(x^2) - 8x\sin(x^2) - 8x^3\cos(x^2) \\ &= -12x\sin(x^2) - 8x^3\cos(x^2). \end{aligned}$$

Für das gesuchte Restglied R_2, ausgewertet an der Stelle $x = \frac{1}{2}$, ergibt sich

$$\begin{aligned} R_2\left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{f'''(\xi)}{(2+1)!}\left(\frac{1}{2} - x_0\right)^{2+1} \\ &= \frac{-12\xi\sin(\xi^2) - 8\xi^3\cos(\xi^2)}{3!}\left(\frac{1}{2} - 0\right)^3 \\ &= \left(-12\xi\sin(\xi^2) - 8\xi^3\cos(\xi^2)\right) \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{8}, \end{aligned}$$

wobei ξ eine für uns unbekannte Zahl zwischen dem Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ und $x = \frac{1}{2}$ ist, also $\xi \in (0, \frac{1}{2})$. Es bleibt, $\left|R_2\left(\frac{1}{2}\right)\right|$ abzuschätzen. Dies erfolgt in mehreren Schritten. Zuächst gilt

$$\left|R_2\left(\frac{1}{2}\right)\right| = \frac{1}{48}\left|12\xi\sin(\xi^2) + 8\xi^3\cos(\xi^2)\right|.$$

Die rechte Seite wird bestimmt größer, wenn wir die Dreiecksungleichung[1] anwenden,

$$\left|R_2\left(\frac{1}{2}\right)\right| \le \frac{1}{48}\left(12\,|\xi|\,\left|\sin(\xi^2)\right| + 8\left|\xi^3\right|\left|\cos(\xi^2)\right|\right).$$

Dabei haben wir auch von den Gleichungen $\left|\xi\sin(\xi^2)\right| = |\xi|\left|\sin(\xi^2)\right|$ und $\left|\xi^3\cos(\xi^2)\right| = \left|\xi^3\right|\left|\cos(\xi^2)\right|$ Gebrauch gemacht. Nun nutzen wir aus, dass $|\sin(\xi^2)|$ als auch $|\cos(\xi^2)|$ immer kleiner oder gleich Eins sind, egal welchen Wert ξ annimmt. Wir können also die rechte Seite nach oben abschätzen, indem wir $|\sin(\xi^2)|$ als auch $|\cos(\xi^2)|$ durch Eins ersetzen,

$$\left|R_2\left(\frac{1}{2}\right)\right| \le \frac{1}{48}\left(12\,|\xi| + 8\left|\xi^3\right|\right).$$

Jetzt erinnern wir uns wieder daran, dass $\xi \in (0, \frac{1}{2})$. Der Ausdruck $12\,|\xi| + 8\left|\xi^3\right| = 12\xi + 8\xi^3$ wird mit wachsendem ξ größer. Daher wird dieser Ausdruck für $\xi = \frac{1}{2}$ maximal. Wir können also diesen Ausdruck nach oben abschätzen, indem wir einfach $\xi = \frac{1}{2}$ einsetzen.[2] Wir erhalten

$$\left|R_2\left(\frac{1}{2}\right)\right| \le \frac{1}{48}\left(12\cdot\frac{1}{2} + 8\cdot\frac{1}{8}\right) = \frac{1}{48}(6+1) = \frac{7}{48}.$$

Unser Näherungswert $f\left(\frac{1}{2}\right) \approx \frac{5}{4}$ aus (6.8) ist somit bis auf einen Fehler von $\frac{7}{48}$ genau, es gilt also

$$\left|R_2\left(\frac{1}{2}\right)\right| = \left|f\left(\frac{1}{2}\right) - T\left(\frac{1}{2}\right)\right| \le \frac{7}{48},$$

und somit

$$\frac{5}{4} - \frac{7}{48} \le f\left(\frac{1}{2}\right) \le \frac{5}{4} + \frac{7}{48} \quad \text{bzw.} \quad \frac{53}{48} \le f\left(\frac{1}{2}\right) \le \frac{67}{48}.$$

[1] Für beliebige Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ gilt $|a+b| \le |a| + |b|$. Diese Ungleichung heißt *Dreiecksungleichung*.

[2] Bei komplizierteren rechten Seiten ist gegebenenfalls eine Extremwertaufgabe wie in Abschnitt 5 zu lösen. Dabei ist dann ξ die freie Veränderliche, und es ist nach ξ abzuleiten usf.

Aufgabe 6.3
Bestimmen Sie das Taylorpolynom dritten Grades für die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \quad f(x) = \sin(2x)\,,$$

mit dem Entwicklungspunkt $x_0 = \pi$. Zeigen Sie, dass der Approximationsfehler auf dem Intervall $[\pi - \frac{1}{10}, \pi + \frac{1}{10}]$ vom Betrage her kleiner als 10^{-4} ist.

Lösung
Zunächst sei daran erinnert, dass der Approximationsfehler nichts anderes als das Restglied ist, siehe auch (6.5). Wegen

$$\begin{aligned}&f'(x) = 2\cos(2x), \quad f''(x) = -4\sin(2x),\\ &f'''(x) = -8\cos(2x) \quad \text{und} \quad f^{(4)}(x) = 16\sin(2x)\end{aligned}$$

sowie

$$f(\pi) = 0, \quad f'(\pi) = 2, \quad f''(\pi) = 0 \quad \text{und} \quad f'''(\pi) = -8,$$

ergibt sich das gesuchte Taylorpolynom dritten Grades gemäß (6.1) zu

$$\begin{aligned}T_3(x) &= f(\pi) + f'(\pi)(x-\pi) + \frac{f''(\pi)}{2}(x-\pi)^2 + \frac{f'''(\pi)}{3!}(x-\pi)^3\\ &= 0 + 2(x-\pi) + 0(x-\pi)^2 + \frac{-8}{6}(x-\pi)^3\\ &= 2(x-\pi) - \frac{4}{3}(x-\pi)^3.\end{aligned}$$

Das Restglied lässt sich gemäß (6.6) wie folgt bestimmen:

$$R_3(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}\,(x-\pi)^4\,.$$

Dabei ist ξ eine nicht näher bekannte Stelle zwischen dem Entwicklungspunkt $x_0 = \pi$ und der Stelle x. Es ist also $\xi \in (\pi - \frac{1}{10}, \pi + \frac{1}{10})$. Wir schätzen den Betrag des Restgliedes nach oben ab. Wegen $f^{(4)}(\xi) = 16\sin(2\xi)$ gilt

$$|R_3(x)| = \left|\frac{16\sin(2\xi)}{24}\cdot(x-\pi)^4\right| = \frac{2}{3}|\sin(2\xi)|(x-\pi)^4.$$

Nun benutzen wir, dass für alle $\xi \in \mathbb{R}$ $|\sin(2\xi)| \leq 1$ und außerdem $|x-\pi| \leq \frac{1}{10}$ gilt, da $x \in [\pi - \frac{1}{10}, \pi + \frac{1}{10}]$. Es ergibt sich somit

$$|R_3(x)| \leq \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^4 < 10^{-4},$$

und die Aufgabe ist gelöst.

Aufgabe 6.4
Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \cos(2x).$$

Geben Sie eine von x unabhängige Abschätzung für den Betrag der $(n+1)$-ten Ableitung $f^{(n+1)}$ für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ an. Zeigen Sie anschließend, dass für das Taylorpolynom mit dem Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ die Restgliedabschätzung

$$\left|R_n\left(\frac{1}{2}\right)\right| \leq \frac{1}{(n+1)!}$$

gilt.

Lösung
Wir notieren exemplarisch die ersten vier Ableitungen von f,

$$\begin{aligned} &f'(x) = -2\sin(2x), \quad f''(x) = -4\cos(2x), \\ &f'''(x) = 8\sin(2x) \quad \text{und} \quad f^{(4)}(x) = 16\cos(2x). \end{aligned}$$

Dies kann so fortgeführt werden und es gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$f^{(n)}(x) = 2^n \begin{cases} -\sin(2x), & \text{falls } n+3 \text{ durch 4 teilbar ist,} \\ -\cos(2x), & \text{falls } n+2 \text{ durch 4 teilbar ist,} \\ \sin(2x), & \text{falls } n+1 \text{ durch 4 teilbar ist,} \\ \cos(2x), & \text{falls } n \text{ durch 4 teilbar ist.} \end{cases}$$

Da für $x \in \mathbb{R}$ stets $|\cos(2x)| \leq 1$ und $|\sin(2x)| \leq 1$ gilt, folgt sofort $|f^{(n)}(x)| \leq 2^n$ und daher auch

$$|f^{(n+1)}(x)| \leq 2^{n+1}. \tag{6.9}$$

Für den Betrag des Restgliedes in $x = \frac{1}{2}$ mit dem Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ folgt mit Hilfe der Beziehungen (6.6) und (6.9)

$$\begin{aligned}\left|R_n\left(\frac{1}{2}\right)\right| &= \left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\left(\frac{1}{2}-x_0\right)^{n+1}\right| = \frac{\left|f^{(n+1)}(\xi)\right|}{(n+1)!}\left(\frac{1}{2}-0\right)^{n+1}\\ &\le \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}\left(\frac{1}{2}-0\right)^{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}\,\frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{(n+1)!}\,.\end{aligned}$$

Aufgabe 6.5

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine beliebig oft differenzierbare Funktion, für die

$$f'(x) = x\tan(f(x)) \quad \text{und} \quad f(1) = \frac{\pi}{4}$$

gilt. Bestimmen Sie das Taylorpolynom zweiten Grades für die Funktion f mit dem Entwicklungspunkt $x_0 = 1$.

Lösung

Wir erinnern an die Formel (6.1) und erhalten für $n = 2$ und $x_0 = 1$

$$T_2(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2}(x-1)^2. \tag{6.10}$$

Aus der Aufgabenstellung folgt sofort

$$f(1) = \frac{\pi}{4} \quad \text{und} \quad f'(1) = 1 \cdot \tan(f(1)) = \tan\frac{\pi}{4} = 1, \tag{6.11}$$

wie ein Blick auf die Tabelle auf Seite 35 lehrt. Wir bestimmen nun die zweite Ableitung von f mittels Produkt- und Kettenregel,

$$f''(x) = \tan(f(x)) + x\left(1 + \tan^2(f(x))\right) f'(x),$$

wobei wir die Ableitung der Tangensfunktion gemäß der Tabelle auf Seite 34 gebildet haben. Wir erhalten so unter Benutzung von (6.11)

$$\begin{aligned}f''(1) &= \tan(f(1)) + 1\cdot\left(1+\tan^2(f(1))\right) f'(1)\\ &= \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) + \left(1+\tan^2\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)\cdot 1 = 1 + (1+1^2) = 3\,.\end{aligned}$$

Wir haben also $f(1) = \frac{\pi}{4}$, $f'(1) = 1$ und $f''(1) = 3$. Setzen wir dies in (6.10) ein, so erhalten wir das gesuchte Taylorpolynom

$$T_2(x) = \frac{\pi}{4} + (x-1) + \frac{3}{2}(x-1)^2.$$

Zusammenfassung

Das Taylorpolynom T_n n-ten Grades einer n-mal differenzierbaren Funktion f mit dem Entwicklungspunkt x_0 ist gegeben durch

$$\begin{aligned} T_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \\ &= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) \\ &+ \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n. \end{aligned}$$

Das Restglied

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x) \tag{6.12}$$

zum Taylorpolynom T_n einer $(n+1)$-mal differenzierbaren Funktion f ist gegeben durch

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \tag{6.13}$$

wobei ξ eine nicht näher bekannte Zahl zwischen x und x_0 ist.

Die Definition (6.12) besagt, dass der Wert der Funktion f an der Stelle x näherungsweise mit Hilfe des Taylorpolynoms T_n, ausgewertet an der Stelle x, bestimmt werden kann. Dabei tritt der Fehler $R_n(x)$ auf. Oft ist es interessant, den Betrag $|R_n(x)|$ des Restgliedes abzuschätzen und so eine Schranke für den Fehler der Näherung zu erhalten.