

Leseprobe

Karl-Heinz Decker

Decker Maschinenelemente

Funktion, Gestaltung und Berechnung

Überarbeitet von Frank Rieg, Gerhard Engelken, Frank Weidemann,  
Reinhard Hackenschmidt

ISBN (Buch): 978-3-446-43856-9

ISBN (E-Book): 978-3-446-43739-5

Weitere Informationen oder Bestellungen unter

<http://www.hanser-fachbuch.de/978-3-446-43856-9>

sowie im Buchhandel.

# Zahnräder

## 21 Grundlagen für Zahnräder und Getriebe

Zahnräder übertragen die Drehbewegung von einer Welle auf eine zweite durch Formschluss der im Eingriff befindlichen Zähne. Bei verschiedenen großen Zahnrädern wirken sie auch als Drehmomentwandler. Durch den Formschluss können sie gegenüber Riementrieben erheblich höhere Kräfte übertragen, arbeiten jedoch nicht elastisch, kommen dafür aber mit wesentlich kleineren Achsabständen aus.

Dieses Kapitel gibt einen Überblick über die Begriffe zur Beschreibung von Zahnrädern und Getrieben, das Verzahnungsgesetz und die üblichen Verzahnungsarten.

### 21.1 Rad- und Getriebearten

Es arbeiten immer ein **treibendes** Zahnrad und ein **getriebenes** Zahnrad zusammen, die ein **Radpaar** bilden. Je nachdem, wie die Achsen der beiden Räder zueinander liegen, ergeben sich folgende Radgrundformen:

1. **Stirnräder** (Zylinderräder) bei parallel liegenden Radachsen, und zwar **Außenradpaare** nach Bild 21.1a (Geradverzahnung) und b (Schrägverzahnung) und **Innenradpaare** nach Bild 21.1c. Beim Innenradpaar heißt das innenverzahnte Rad **Hohlrad**.
2. **Zahnstangen** als unendlich groß gedachte Stirnräder zur Umwandlung einer Drehbewegung mittels eines Außenrades in eine hin- und hergehende geradlinige Bewegung nach Bild 21.1d.
3. **Kegelräder** bei sich schneidenden Radachsen nach Bild 21.1e (Geradverzahnung) und f (Schrägverzahnung).
4. **Schraubenträder** bei sich kreuzenden Radachsen, und zwar nach Bild 21.1g in einem **Stirnrad-Schraubenträderpaar**, nach Bild 21.1h in einem **Schneckenradsatz** und nach Bild 21.1i in einem **Kegelrad-Schraubenträderpaar**.

Der Verlauf der Zähne wird nach dem Verlauf ihrer Flankenlinien gekennzeichnet. Unter einer **Flankenlinie** versteht man die Schnittlinie der Zahnflanke mit einem Zylinder beim Stirnrad bzw. Kegel beim Kegelrad, dessen Achse mit der Radachse zusammenfällt. So kennt man:

1. Gerad-, Stufen-, Schräg-, Doppelschräg- und Kreisbogenzahn-Stirnräder (Bild 21.2)
2. Gerad-, Schräg-, Spiral-, Evolventen- und Kreisbogenzahn-Kegelräder (Bild 21.3)

Nach DIN 868 (Allgemeine Begriffe und Bestimmungsgrößen) werden bezeichnet:

1. Ein beliebiges der beiden Räder eines Radpaares als **Rad**, das mit ihm gepaarte Rad als **Gegenrad**.
2. Das kleinere der beiden Räder eines Radpaares als **Ritzel** oder **Kleinrad**, das größere als **Großrad**. Das Ritzel erhält den Index 1, das Großrad den Index 2.
3. Das **treibende Rad** mit dem Index a, das **getriebene Rad** mit dem Index b. Diese Unterscheidung ist in der Regel nur bei treibendem Großrad erforderlich.
4. Als **Getriebezug** eine Kombination von zwei oder mehr Radpaaren, die miteinander in Wirkverbindung stehen (Bild 21.4).
5. Als **Getriebe** eine Baugruppe aus einem oder mehreren Radpaaren und dem die Radpaare umschließenden Gehäuse oder Gestell, das die Lagerungen für die ortsfesten Radachsen trägt. In einem Getriebe können Größe und/oder Richtung von Drehbewegung und Dreh-

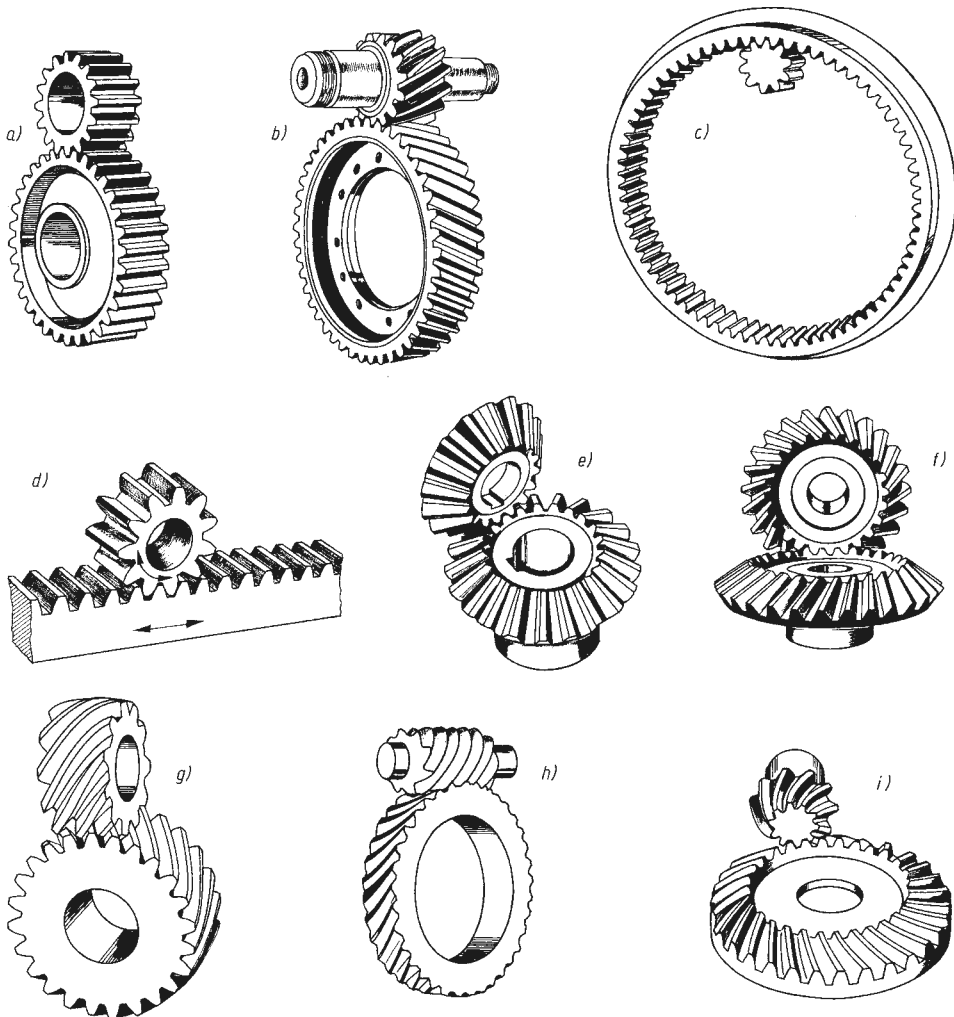


Bild 21.1 Grundformen von Zahnrädern in Radpaaren je nach Lage der Radachsen zueinander  
 a) Stirnradpaar, geradzahnt, b) Stirnradpaar, schrägverzahnt, c) Innenradpaar,  
 d) Zahnstangenradpaar, e) Kegelradpaar, geradzahnt, f) Kegelradpaar, schrägverzahnt,  
 g) Stirnrad-Schraubräderpaar, h) Schneckenradsatz, i) Kegel-Schraubräderpaar

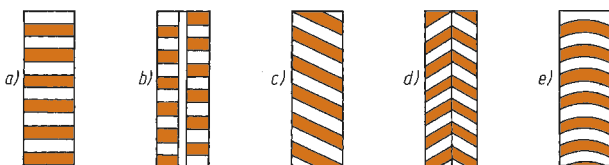


Bild 21.2 Zahnverlauf an Stirnrädern (auf dem abgewickelten Zylindermantel)  
 a) Geradzähne, b) Stufenzähne, c) Schräg Zähne, d) Pfeilzähne (Doppelschräg Zähne),  
 e) Kreisbogenzähne

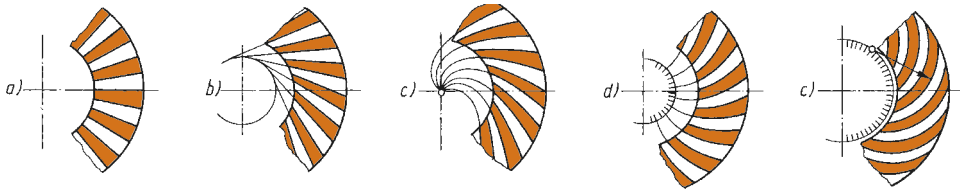


Bild 21.3 Zahnverlauf an Kegeln (auf dem abgewickelten Kegelmantel)  
 a) Geradzähne, b) Schrägzähne, c) Spiralzähne, d) Evolventenzähne, e) Kreisbogenzähne

- moment in einer oder mehreren Getriebestufen umgewandelt werden. Man kennt **einstufige** und **mehrstufige Getriebe**, in denen jedes Radpaar eine Stufe darstellt.
- Als **Standgetriebe** ein Getriebe, bei dem alle Radachsen lagenunveränderlich drehbar gelagert sind.
  - Als **Umlauf-** oder **Planetengetriebe** ein Getriebe nach Bild 21.5 mit mindestens drei in Wirkrichtung hintereinander angeordneten Zahnrädern, bei denen die Radachsen zweier Räder koaxial angeordnet sind und das dritte Rad als Zwischenrad (**Umlaufrad, Planetenrad**) in einem um die koaxialen Radachsen drehbaren Steg (**Planetenradträger**) gelagert ist und mit dem Steg umläuft. In Sonderfällen kann anstelle des Hohlrades ein Außenrad verwendet werden. In diesem Fall trägt die umlaufende Achse des Steges zwei fest miteinander verbundene außenverzahnte Zwischenräder. Der Umlaufgetriebebezug besteht dann aus zwei in Wirkrichtung hintereinander angeordneten Außenradpaaren, von denen die beiden nicht miteinander verbundenen Außenräder koaxial sind.

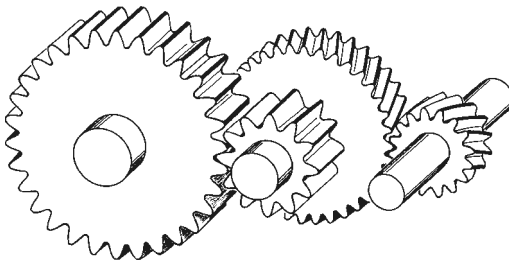


Bild 21.4 Zweistufiger Getriebebezug (aus DIN 3998)

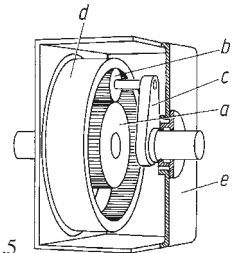


Bild 21.5 Planetengetriebe (aus DIN 868)  
 a) Sonnenrad, b) Planetenrad, c) umlaufender Steg, d) Hohlrads, e) Gehäuse

Die Übersetzung  $i$  eines Radpaares ist das Verhältnis der Winkelgeschwindigkeit  $\omega_a$  oder der Drehzahl  $n_a$  des treibenden Rades zur Winkelgeschwindigkeit  $\omega_b$  oder Drehzahl  $n_b$  des getriebenen Rades:

$$\text{Übersetzung } i = \frac{\omega_a}{\omega_b} = \frac{n_a}{n_b} \tag{21.1}$$

Bei einem Außenradpaar haben die beiden Räder entgegengesetzten Drehsinn. Deshalb ist ihre Übersetzung **negativ**. Beim Innenradpaar haben beide Räder gleichen Drehsinn, ihre Übersetzung ist **positiv**. Bei  $|i| > 1$  spricht man von einer **Übersetzung ins Langsame**, bei  $|i| < 1$  von einer **Übersetzung ins Schnelle**.

Das Verhältnis der Zähnezah  $z_2$  des Großrades zur Zähnezah  $z_1$  des Kleinrades ist das

$$\text{Zähnezahverhältnis } u = \frac{z_2}{z_1} \tag{21.2}$$

Z

Bei **Hohlrädern** ist  $z_2$  **negativ**, sodass Innenradpaare ein negatives Zähnezahlnverhältnis  $u$  haben. Es ist stets  $|u| \geq 1$ .  
Begriffe und Bestimmungsgrößen sind genormt (DIN 3960, DIN 3971, DIN 3998).

### 21.2 Verzahnungsgesetz

Bild 21.6 zeigt ein im Eingriff befindliches Zahnradpaar. Man stellt sich die Stirnräder zunächst wie bei einem Reibradpaar als glatte Zylinder vor, von denen der treibende Zylinder den getriebenen ohne Gleiten mitnimmt, sodass sich beide ohne Schlupf aufeinander abwälzen. An diesen Zylindern denkt man sich die Verzahnung teils erhöht, teils vertieft angebracht. Allgemein heißen die gedachten Flächen, die sich ohne Schlupf abwälzen, Wälzflächen, in Stirnrädern Wälzzylinder. In der Ebene erscheinen die Wälzflächen als Linien, in Stirnrädern als **Wälzkreise**  $w_1$  und  $w_2$  (Bild 21.6).

Zwei Wälzkreise berühren sich im **Wälzpunkt C**, der auf der Verbindungslinie der Mittelpunkte der kämenden Räder liegt. Die Umfangsgeschwindigkeit der Wälzkreise an beiden Rädern ist dann dem Betrag nach gleich:

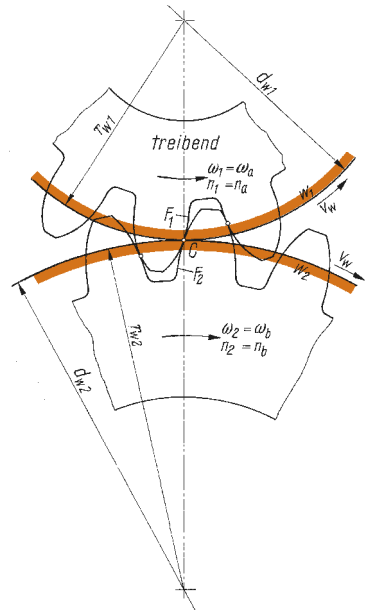


Bild 21.6 Wälzkreise und deren Umfangsgeschwindigkeit, Punktberührung der Flanken in der Eingriffsebene

$$\text{Umfangsgeschwindigkeit der Wälzkreise} \quad |v_w| = d_{w1} \cdot \pi \cdot n_1 = d_{w2} \cdot \pi \cdot n_2 \quad (21.3)$$

|          |             |  |
|----------|-------------|--|
| $v_w$    | in m/s      | Umfangsgeschwindigkeit der Wälzkreise,         |
| $d_{w1}$ | in m        | Wälzkreisdurchmesser des Kleinrades (Ritzels), |
| $d_{w2}$ | in m        | Wälzkreisdurchmesser des Großrades,            |
| $n_1$    | in $s^{-1}$ | Drehzahl des Kleinrades,                       |
| $n_2$    | in $s^{-1}$ | Drehzahl des Großrades.                        |

Daraus folgt für ein Radpaar mit **treibendem Kleinrad** der Betrag der

$$\text{Übersetzung} \quad |i| = \frac{n_a}{n_b} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{d_{w2}}{d_{w1}} = \frac{r_{w2}}{r_{w1}} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{z_2}{z_1} = u, \quad (21.4)$$

weil die Zähnezahlen  $z_1$  und  $z_2$  den Wälzkreisdurchmessern  $d_{w1}$  und  $d_{w2}$  direkt proportional sind. Bei **treibendem Großrad** ist  $|i| = z_1/z_2 = 1/u$ .

Die Zahnflanken  $F_1$  und  $F_2$  (Bild 21.6) müssen so geformt sein, dass sie einen kontinuierlichen Bewegungsablauf gewährleisten, d. h. sie müssen bestimmten kinematischen Gesetzen gehorchen. In Bild 21.7 ist hierzu ein Flankenpaar in drei verschiedenen Bewegungsphasen gezeigt. Das in Pfeilrichtung bewegte Rad 1 nimmt das Rad 2 mit, sodass zwangsläufig die beiden gekrümmten Flanken in Kontakt bleiben. Es berühren sich jeweils die Flankenpunkte  $B_1$  und  $B_2$ . Der Punkt  $B_1$  besitzt die Absolutgeschwindigkeit  $v_1$ , der Punkt  $B_2$  die Absolutgeschwindigkeit  $v_2$ . Die Vektoren von  $v_1$  und  $v_2$  stehen jeweils senkrecht auf den Radien  $R_1$  und  $R_2$ . Durch den Berührungspunkt der beiden Flanken sind eine Tangente T und eine Normale N (senkrecht zu T) gezogen. Zerlegt man nun die Absolutgeschwindigkeiten  $v_1$  und  $v_2$  in Tangential- und Normalgeschwindigkeiten  $v_{t1}$  und  $v_{n1}$  bzw.  $v_{t2}$  und  $v_{n2}$ , so zeigt sich nach

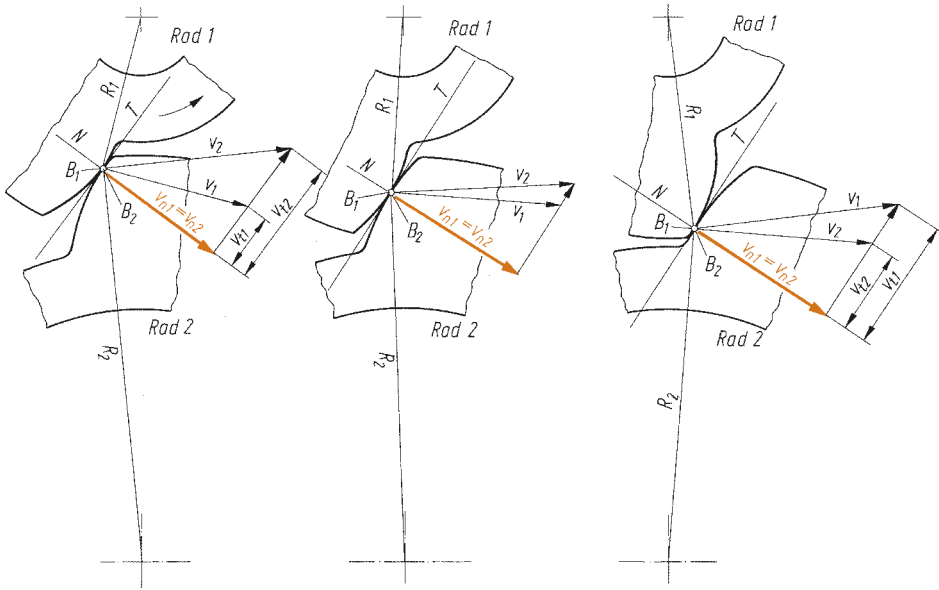


Bild 21.7 Geschwindigkeiten der Berührungspunkte  $B_1$  und  $B_2$  zweier Radflanken

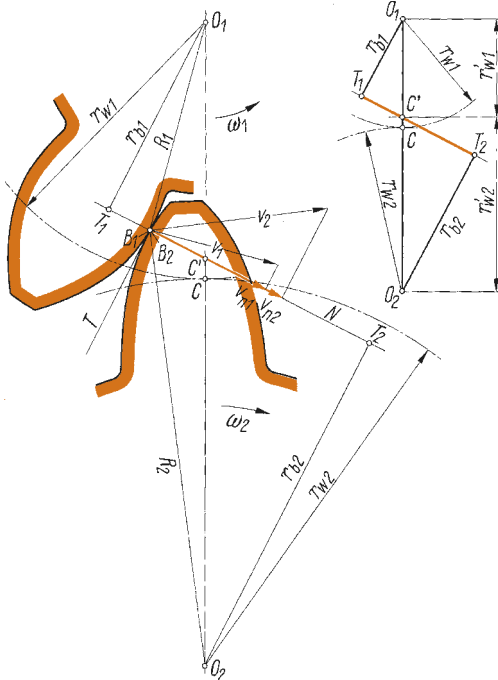


Bild 21.8 Geschwindigkeitsverhältnisse bei Berührung willkürlich geformter Flanken

den Gesetzen der Kinematik, dass die Normalgeschwindigkeiten  $v_{n1}$  und  $v_{n2}$  in jeder Bewegungsphase gleich groß sind! Bei willkürlich geformten Flanken wird aber das Rad 2 trotz gleichförmiger Drehbewegung des Rades 1 ungleichförmig bewegt. Das darf selbstverständlich bei Zahnrädern nicht geschehen. Außer der Berührbedingung, dass die Normalgeschwindigkeiten  $v_{n1}$  und  $v_{n2}$  in jeder Bewegungsphase gleich groß sein müssen, muss auch  $i = \omega_1/\omega_2$  konstant bleiben.

In Bild 21.8 sind die willkürlich geformten Zähne eines Radpaares im Eingriff dargestellt. Sie berühren sich momentan mit den beiden Flankenpunkten  $B_1$  und  $B_2$ . Das Rad 1 dreht sich mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega_1$ , das Rad 2 mit  $\omega_2$ . Der Punkt  $B_1$  bewegt sich somit momentan mit der Umfangsgeschwindigkeit (Absolutgeschwindigkeit)  $v_1 = \omega_1 \cdot R_1$ , der Punkt  $B_2$  mit  $v_2 = \omega_2 \cdot R_2$ . Beide stehen als Vektoren jeweils senkrecht auf den zugehörigen Radialstrahlen  $R_1$  und  $R_2$ . Zum Prüfen der Berührbedingung wird durch den Berührungspunkt eine Tangente  $T$  gelegt und zu dieser eine Normale  $N$  errichtet. Die Zerlegung in Tangential- und Normalgeschwin-



digkeiten zeigt, dass die geforderte Bedingung  $v_{n1} = v_{n2}$  nicht erfüllt ist. Die angenommenen Zahnflanken sind falsch geformt!

Die Normalgeschwindigkeiten  $v_{n1}$  und  $v_{n2}$  kann man als Umfangsgeschwindigkeiten an den Radien  $r_{b1}$  und  $r_{b2}$  auffassen, weil aus den geometrischen Verhältnissen  $v_{n1} = r_{b1} \cdot \omega_1$  und  $v_{n2} = r_{b2} \cdot \omega_2$  folgt. Bei  $v_{n1} = v_{n2}$  muss  $r_{b1} \cdot \omega_1 = r_{b2} \cdot \omega_2$  sein. Mit  $i = \omega_1/\omega_2$  wird auch  $|i| = r_{b2}/r_{b1} = r'_{w2}/r'_{w1}$ . Da außerdem  $|i| = r_{w2}/r_{w1}$  ist, muss  $r'_{w2}/r'_{w1} = r_{w2}/r_{w1}$  sein. Daraus geht hervor, dass bei  $v_{n1} = v_{n2}$  die Übersetzung  $i$  nur dann konstant bleibt, wenn sich der Punkt  $C'$  mit dem Wälzpunkt  $C$  deckt, also  $r'_{w1} = r_{w1}$  und  $r'_{w2} = r_{w2}$  sind. Diese kinematischen Voraussetzungen führen zum **Verzahnungsgesetz**:

**Die Normale im jeweiligen Berührungspunkt (Eingriffspunkt) zweier Zahnflanken muss stets durch den Wälzpunkt C gehen.**

Dieses Gesetz stellt die Aufgabe, kinematisch richtig geformte Zahnflanken zu finden. Bild 21.9a zeigt hierzu die Wälzkreise  $w_1$  und  $w_2$  eines Radpaares und eine willkürlich gestaltete Flanke  $F_1$  am Rad 1, zu der die zugehörige Flanke  $F_2$  am Rad 2 gefunden werden soll. Voraussetzung für die (willkürliche) Gestaltung von  $F_1$  ist jedoch, dass sämtliche Normalen  $N$  zu der Flanke den Wälzkreis  $w_1$  schneiden (Bild 21.9a), da sonst das Verzahnungsgesetz nicht erfüllt werden kann. Fest steht fernerhin, dass sich beide Flanken im Wälzpunkt berühren müssen, weil ober- oder unterhalb von  $C$  die Normale nicht mehr durch  $C$  gehen kann.

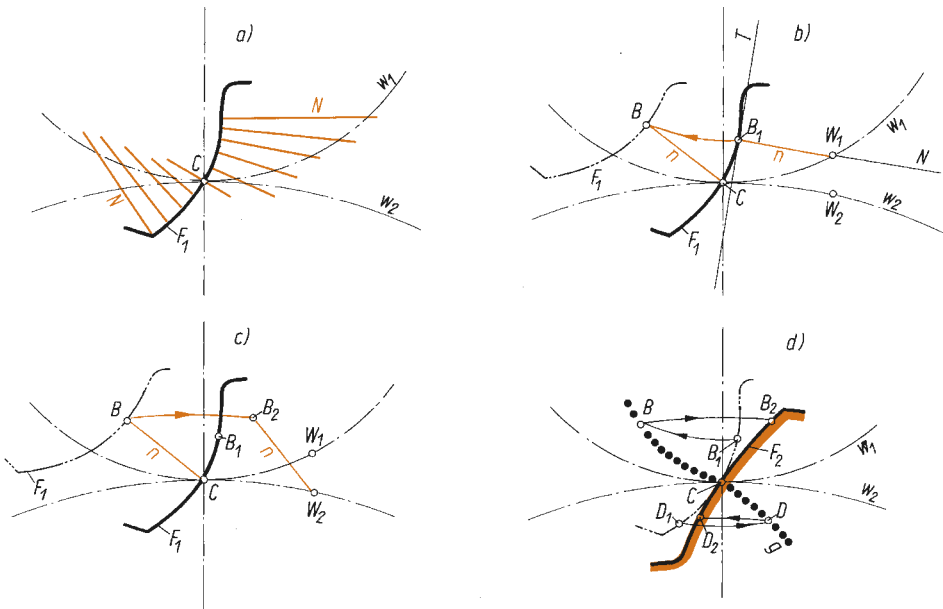


Bild 21.9 Ermitteln der Gegenflanke  $F_2$  zu einer gegebenen Flanke  $F_1$

Aus der gegebenen Flanke sei ein beliebiger Punkt  $B_1$  nach Bild 21.9b herausgegriffen, durch diesen eine Tangente  $T$  gelegt und eine Normale  $N$  errichtet. Die Normale  $N$  schneidet den Wälzkreis  $w_1$  im Punkt  $W_1$ . Zu diesem wird der zugehörige Punkt  $W_2$  am Wälzkreis  $w_2$  markiert, sodass der Bogen  $CW_1$  gleich dem Bogen  $CW_2$  ist. Nun denkt man sich beide Räder in Pfeilrichtung so weit gedreht, bis sich die Punkte  $W_1$  und  $W_2$  im Wälzpunkt  $C$  treffen. In diesem Augenblick geht die Normale  $N$  bzw. Strecke  $n$  durch den Wälzpunkt  $C$ , und die gegebene Flanke befindet sich in der gestrichelt gezeichneten Position. Ihr Punkt  $B_1$  ist nach  $B$

gewandert. An dieser Stelle muss sich der Punkt  $B_1$  mit einem Punkt  $B_2$  der Gegenflanke berühren (weil  $N$  durch  $C$  geht), d. h. in  $B$  muss sich der Punkt  $B_1$  mit einem Punkt  $B_2$  der Gegenflanke  $F_2$  treffen.

Wenn man sich beide Räder nach Bild 21.9c um den gleichen Betrag zurückgedreht denkt, dann bewegt sich der in  $C$  befindliche Punkt des Rades 1 wieder nach  $W_1$ , der des Rades 2 nach  $W_2$ , die in  $B$  befindlichen nach  $B_1$  und  $B_2$ . Der gesuchte Punkt  $B_2$  an der Gegenflanke  $F_2$  muss von  $W_2$  den gleichen Abstand  $n$  haben wie  $B$  von  $C$  und wie  $B_1$  von  $W_1$ , weil sich ja die drei Strecken  $n$  decken, wenn sich  $B_1$  und  $B_2$  in  $B$  berühren.

Führt man diese Konstruktion mit vielen Punkten  $B_1$  an der Fußflanke bzw.  $D_1$  an der Kopf­flanke der gegebenen Flanke  $F_1$  durch, so findet man eine Reihe von Punkten  $B_2$  bzw.  $D_2$ , deren Verbindungslinie die gesuchte Flanke  $F_2$  liefert, die in jeder Bewegungsphase mit der gegebenen Flanke  $F_1$  das Verzahnungsgesetz erfüllt (Bild 21.9d).

Wenn sämtliche Eingriffspunkte  $B$  und  $D$ , in denen sich jeweils die zugehörigen Flanken­punkte  $B_1$  und  $B_2$  bzw.  $D_1$  und  $D_2$  berühren, verbunden werden, so entsteht die **Eingriffslinie  $g$** , räumlich gesehen die **Eingriffsfläche** oder das **Eingriffsfeld**. Die **Eingriffslinie ist die absolute Bahn des Berührungspunktes (Eingriffspunktes)**.

Andererseits wandert der Berührungspunkt auch auf jeder Zahnflanke entlang: **Die Zahnflanken sind die relativen Bahnen des Berührungspunktes**.

Aus den vorstehenden Darlegungen geht hervor, dass zu einer gegebenen Zahnflanke eine ganz bestimmte Gegenflanke und eine bestimmte Eingriffslinie gehören. Umgekehrt gehört zu einer gegebenen Eingriffslinie ein bestimmtes Zahnflankenpaar. Wegen der Einheitlichkeit und einer wirtschaftlichen Fertigung wird der Eingriffslinie eine regelmäßige Form gegeben.

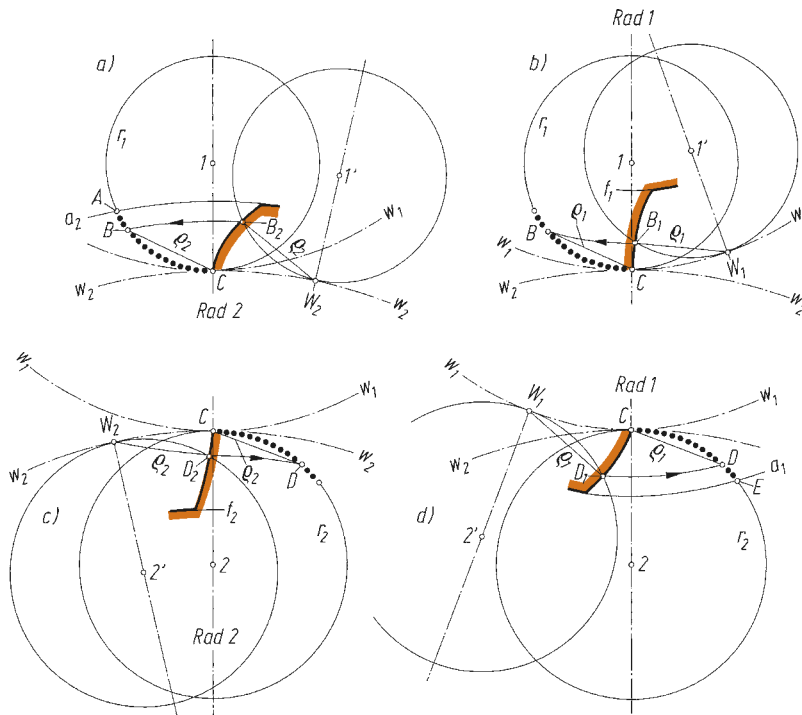


Bild 21.10 Zykloidenverzahnung

- a) Entstehung der Kopf­flanke am Rad 2, b) Entstehung der Fuß­flanke am Rad 1,  
c) Entstehung der Fuß­flanke am Rad 2, d) Entstehung der Kopf­flanke am Rad 1



### 21.3 Zykloidenverzahnung

Besteht die **Eingriffslinie g aus zwei Kreisbögen**, dann ergibt sich eine Zykloidenverzahnung (Bild 21.10). Die Kreise, deren Bögen die Eingriffslinie bilden, sind die **Rollkreise**  $r_1$  und  $r_2$ . Die **Kopfflanke** des Rades 2 (**Kopfflanke** = Flanke vom Wälzkreis  $w$  bis zum Kopfkreis  $a$ ) entsteht, wenn man den Rollkreis  $r_1$  auf dem Wälzkreis  $w_2$  abrollt, d. h.  $w_2$  als **Grundkreis** benutzt (Bild 21.10a). Die Bahn, die ein am Rollkreis befindlicher Punkt beschreibt, der sich mit dem Wälzpunkt  $C$  deckte, ist als **Epizykloide** die gesuchte Kopfflanke. Befindet sich der Rollkreis  $r_1$  in der Position  $1'$ , dann ist momentan die Strecke  $B_2W_2 = \rho_2$  der erzeugende Krümmungsradius der Zykloide und als dieser gleichzeitig die Normale zum Punkt  $B_2$ .

Der Bogen  $CW_2$  ist gleich dem Bogen  $B_2W_2$ . Wenn das Rad 2 so weit in Pfeilrichtung gedreht wird, bis sich  $W_2$  mit  $C$  deckt, dann läuft die Normale durch den Wälzpunkt  $C$ , und  $B_2$  liegt auf der Eingriffslinie, d. h. befindet sich in  $B$ . Daraus folgt, dass der Bogen  $BC$  gleich dem Bogen  $B_2W_2$  ist.

Durch Abrollen des Rollkreises  $r_1$  auf dem Wälzkreis  $w_1$  entsteht die **Fußflanke** des Rades 1 (**Fußflanke** = Flanke vom Wälzkreis  $w$  bis zum Fußkreis  $f$ ) als **Hypozykloide** (Bild 21.10b). Das Abrollen sei um den Bogen  $CW_1$  mit dem Betrag des Bogens  $CW_2$  auf dem Wälzkreis  $w_1$  erfolgt, sodass die Strecken  $B_1W_1 = \rho_1 = B_2W_2$  dem erzeugenden Krümmungsradius sind. Denkt man sich das Rad 1 in Pfeilrichtung so weit gedreht, bis sich  $W_1$  mit  $C$  deckt, dann läuft die Normale durch den Wälzpunkt  $C$ , und  $B_1$  ist nach  $B$  gewandert.  $B_1$  und  $B_2$  kommen nach Drehen beider Räder um die Bögen  $CW_1 = CW_2$  in  $B$  zur Berührung, wo die sich dort deckenden Normalen durch den Wälzpunkt  $C$  laufen. Damit ist die Richtigkeit der Konstruktion bewiesen. Die Entstehung der verschiedenen Zykloiden siehe Bild 21.11.

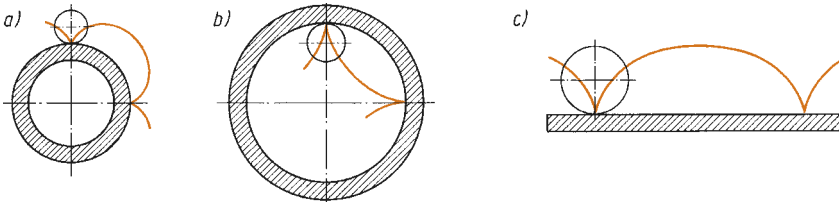


Bild 21.11 Entstehung der Zykloiden (zyklische Kurven)  
a) Epizykloide, b) Hypozykloide, c) Orthozykloide

Bild 21.12 Doppelseitige Zykloidenverzahnung (nach DIN 868)

- a Epizykloiden,
- b Hypozykloiden,
- c Orthozykloide,
- d Rollkreis,
- e Wälzkreis,
- f Wälzgerade,
- g Stirnrad,
- h Zahnstange

