HANSER

Mathematik für Informatiker

Manfred Brill

Einführung an praktischen Beispielen aus der Welt der Computer

ISBN 3-446-22802-0

Leseprobe

Kapitel 4

Relationen und Abbildungen

Motivation

Relationen und relationale Algebra stellen die Grundlage moderner Datenbanken dar. Mit Abbildungen und Funktionen lernen Sie ein unverzichtbares Werkzeug der Informatik und der Mathematik kennen. Mit Hilfe der Abzählbarkeit kann in der Informatik geklärt werden, ob jede mathematisch formulierbare Funktion mit Hilfe eines Algorithmus berechnet werden kann.

4.1 Relationen

Die Elemente einer gegebenen Menge haben oft nicht nur eine Eigenschaft. Die Einwohner einer Stadt besitzen viele verschiedene Merkmale, die Straße, in der sie wohnen, oder ihr Alter, Geschlecht und Einkommen. Sind Sie nur an bestimmten Eigenschaften interessiert, zerlegen Sie die Menge in Klassen, die jeweils die Elemente mit der betrachteten Eigenschaft enthalten. Dadurch gelingt es, vorher unstrukturierte Mengen durch zusätzliche Markierungen neu einzuteilen. Auch Elemente verschiedener Mengen können durch bestimmte Merkmale strukturiert und in einen Zusammenhang gebracht werden. Zwischen der Menge aller Männer und der aller Frauen in einer Stadt gibt es eine Beziehung, beispielsweise, ob diese miteinander verheiratet sind.

Definition 4.1 *Eine Teilmenge R des kartesischen Produkts $M \times N$ der beiden Mengen M und N heißt* binäre Relation. *Für Elemente $x \in M$ und $y \in N$ mit $(x, y) \in R$ sagen wir: „x und y stehen in Relation R“.*

- ☐ $R_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y^2\}$ und $R_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < y\}$ sind binäre Relationen auf den reellen Zahlen.
- ☐ Die Relation $R = \{(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \mid m = -n\}$ zählt Paare mit betragsgleichen

Elementen aus $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$ auf.

Definition 4.2 *Eine* n-äre Relation *zwischen den n Mengen* $M_1, \ldots, M_n$ *mit* $n > 1$ *ist eine Teilmenge des kartesischen Produkts* $R \subseteq M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_n$*, also eine Menge von n-Tupeln* $(x_1, \cdots, x_n)$ *mit* $x_i \in M_i$.

☐ $P = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geq 0\}$ ist eine n–äre Relation.

☐ $R_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | \ x = y + z\}$ und $R_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | \ x = yz\}$ sind Beispiele für ternäre Relationen.

Eine Darstellung von Relationen ist das *Pfeildiagramm*. Ein Pfeildiagramm eignet sich vor allem für die Visualisierung von binären Relationen $M \times N$. Alle Elemente der Menge M werden auf die linke, alle Elemente der Menge N auf die rechte Seite geschrieben und wie in Abbildung 4.1 ein Pfeil von den Elementen $x \in M$ nach $y \in N$ gezogen, die zueinander in Relation stehen.

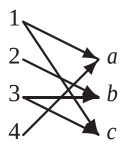

Abbildung 4.1: Die Relation $R = \{(1, a), (1, c), (2, b), (3, b), (3, c), (4, a)\}$

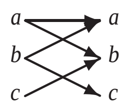

Abbildung 4.2: Die Relation $R = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, c), (c, b)\}$

☐ In Abbildung 4.1 sehen Sie das Pfeildiagramm der Relation $R = \{(1, a), (1, c), (2, b), (3, b), (3, c), (4, a)\} \subset \{1, 2, 3, 4\} \times \{a, b, c\}$.

☐ In Abbildung 4.2 sehen Sie das Pfeildiagram der Relation $R = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, c), (c, b)\} \subset \{a, b, c\}^2$

Eine andere Darstellungsform der Relationen, die für beliebige n-Tupel anwendbar ist, ist die *Tabellendarstellung von Relationen*. Für eine Relation mit n-Tupeln stellen Sie eine Tabelle mit n Spalten auf, jede Zeile entspricht einem Element der Relation. Wer schon einmal mit einer relationalen Datenbank gearbeitet hat, entdeckt unmittelbar die Verwandtschaft zwischen Datenbanken und Relationen. Die Tabellen 4.1 und 4.2 enthalten die Tabellendarstellung der Relationen aus den Abbildungen 4.1 und 4.2.

Relationen auf endlichen Mengen können mit Hilfe von Matrizen dargestellt werden. Sind M und N endliche Mengen mit $|M| = m$ und $|N| = n$, dann kann eine Relation $R \subseteq M \times N$ durch eine *binäre* $m \times n$-Matrix A dargestellt werden. Dabei sind die Elemente a_{ij} gegeben durch

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & (x_i, y_j) \in R \\ 0, & (x_i, y_j) \notin R. \end{cases}$$

Tabelle 4.1: Tabellendarstellung der Relation $\{(1, a), (1, c), (2, b), (3, b), (3, c), (4, a)\}$

$x \in M$	$y \in N$
1	a
1	c
2	b
3	b
3	c
4	a

Tabelle 4.2: Tabellendarstellung der Relation $\{(a, a), (a, b), (b, a), (b, c), (c, b)\}$

$x \in M$	$y \in N$
a	a
a	b
b	a
b	c
c	b

- ☐ Für die Relation $\{(1, a), (1, c), (2, b), (3, b), (3, c), (4, a)\}$ aus Abbildung 4.1 und Tabelle 4.1 ergibt sich die 4×3-Matrix $\begin{pmatrix} 1&0&1 \\ 0&1&0 \\ 0&1&1 \\ 1&0&0 \end{pmatrix}$.
- ☐ Für die Relation $\{(a, a), (a, b), (b, a), (b, c), (c, b)\}$ aus Abbildung 4.2 und Tabelle 4.2 ergibt sich die 3×3-Matrix $\begin{pmatrix} 1&1&0 \\ 1&0&1 \\ 0&1&0 \end{pmatrix}$.

In einer Pfeildarstellung wie in Abbildung 4.2 einer Relation auf $M \times M$ wurden die Elemente von M zweimal in das Diagramm eingezeichnet. Darauf kann verzichtet werden; das Ergebnis ist eine Darstellung einer Relation auf einer endlichen Menge mit Hilfe eines gerichteten Graphen. Alle Elemente der Menge M werden in das Diagramm eingezeichnet; ein Pfeil wird zwischen x und y eingetragen, wenn das Paar $(x, y) \in R$ ist.

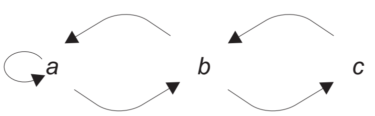

Abbildung 4.3: Die Relation $\{(a, a), (a, b), (b, a), (b, c), (c, b)\}$ als gerichteter Graph

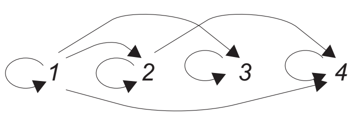

Abbildung 4.4: Die Relation $\{(x, y)|\ x$ teilt $y\} \subset \{1, 2, 3, 4\}^2$ als gerichteter Graph

- ☐ In Abbildung 4.3 ist die Relation aus Abbildung 4.2 als gerichteter Graph dargestellt.
- ☐ Die Relation $\{(x, y)|\ x \text{ teilt } y\}$ auf $\{1, 2, 3, 4\} \times \{1, 2, 3, 4\}$ ist gegeben als $\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (4, 4)\}$. Die Matrixdarstellung ist die 4×4-Matrix
$$\begin{pmatrix} 1&1&1&1 \\ 0&1&0&1 \\ 0&0&1&0 \\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}.$$
In Abbildung 4.4 ist diese Relation als gerichteter Graph dargestellt. Das zugehörige Pfeildiagramm und die Tabellendarstellung ist Ihnen zur Übung überlassen.

Mit den Mengenoperationen können aus gegebenen Relationen eine Fülle von neuen Relationen erzeugt werden. Eine sehr mächtige Methode, zwei Relationen zu einer neuen zu verknüpfen, ist die *Komposition* von Relationen.

Definition 4.3 *Sind $R_1 \subseteq M_1 \times M_2$ und $R_2 \subseteq M_2 \times M_3$ binäre Relationen, dann ist die* Komposition $R_2 \circ R_1$ *die Relation auf $M_1 \times M_3$ mit*

$$R_2 \circ R_1 = \{(x,z) \in M_1 \times M_3 \mid \exists\, y \in M_2 (x,y) \in R_1 \land (y,z) \in R_2\}.$$

□ Die Relationen R_1 „Vater von" und R_2 „verheiratet mit" auf der Menge aller Menschen können mit einer Komposition verkettet werden. Ist Claus der Vater von Stefan, $(\text{Claus}, \text{Stefan}) \in R_1$, und $(\text{Stefan}, \text{Claudia}) \in R_2$, dann ist Claus der Schwiegervater von Claudia, Stefan stellt die Verbindung zwischen diesen beiden dar. Dies ist die Schwiegervater-Relation $R_3 = R_2 \circ R_1$. Analog ist eine Schwiegermutter-Relation definierbar, die aber den betroffenen Lesern überlassen ist!

□ Für die Mengen $M_1 = \{a,b,c\}$, $M_2 = \{A,B,C\}$, $M_3 = \{1,2\}$ und die Relationen $R_1 = \{(a,A),(a,B),(b,B),(b,C),(c,C)\}$, $R_2 = \{(A,1),(A,2),(B,2)\}$ ist die Komposition möglich: $R_3 = R_2 \circ R_1 = \{(a,1),(a,2),(b,2)\}$. Für das Element $(a,2) \in R_3$ finden Sie sogar mehr als ein Element in M_2, das a und 2 verbindet, denn $(a,A) \in R_1, (A,2) \in R_2$ und $(a,B) \in R_1, (B,2) \in R_2$ erfüllen beide die Forderung aus der Definition der Komposition. In Abbildung 4.5 sehen Sie eine Darstellung dieser Komposition als Pfeildarstellung.

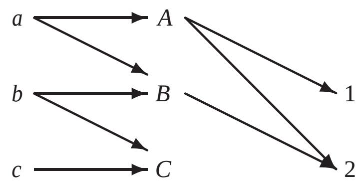

Abbildung 4.5: Pfeildiagramm einer Komposition von Relationen

Wie lässt sich die Komposition von Relationen mit Hilfe von Matrizen beschreiben? Dazu kann eine *binäre Multiplikation* eingesetzt werden, die Sie als Konjunktion von Wahrheitswerten interpretieren können. In Tabelle 4.3 sehen Sie die Definition der beiden binären Operationen Addition $\oplus$ und Multiplikation $\odot$. Klar ist, dass das Ergebnis dieser beiden Operationen entweder 0 oder 1 sein muss. Wenn Sie die Tabellen 4.3 mit der Definition von Konjunktion und Disjunktion in Tabelle 3.2 auf Seite 60 vergleichen, dann erkennen Sie, dass $\oplus$ durch die Disjunktion interpretiert werden kann, wenn Sie für den Wahrheitswert f die Zahl 0 und für w die Zahl 1 einsetzen.

Tabelle 4.3: Binäre Addition $\oplus$ und binäre Multiplikation $\odot$

$\oplus$	0	1
0	0	1
1	1	1

$\odot$	0	1
0	0	0
1	0	1

Das binäre Produkt der binären $m \times n$-Matrix A und der binären $n \times p$-Matrix B ist analog dem Matrixprodukt definiert. Das Element c_{ij} der binären $m \times p$-Matrix

$C = A \cdot B$ ist gegeben durch

$$c_{ij} = \bigoplus_{k=1}^{n} a_{ik} \odot b_{kj}$$

Das Zeichen $\bigoplus$ ist dabei wie das Summenzeichen $\sum$ zu interpretieren.

□ Die Komposition $R_2 \circ R_1$ für $R_2 = \left(\begin{smallmatrix}1&1&0\\0&1&1\end{smallmatrix}\right)$ und $R_1 = \left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right)$ ist gegeben durch

$$R_2 \circ R_1 = \left(\begin{smallmatrix}(1\odot 1)\oplus(1\odot 0)\oplus(0\odot 1) & (1\odot 0)\oplus(1\odot 1)\oplus(0\odot 0)\\(0\odot 1)\oplus(1\odot 0)\oplus(1\odot 1) & (0\odot 0)\oplus(1\odot 1)\oplus(1\odot 0)\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}1&1\\1&1\end{smallmatrix}\right).$$

□ Für das Beispiel in Abbildung 4.5 sind die Relationen durch die Matrizen $R_1 = \left(\begin{smallmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{smallmatrix}\right)$, $R_2 = \left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right)$ und $R_2 \circ R_1 = \left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right)$ gegeben.

Es ist natürlich nicht nur möglich, zwei, sondern beliebig viele Relationen mit einer Komposition zu verbinden. Dabei ist die Klammerung, also die Reihenfolge, irrelevant; für die Komposition von Relationen gilt wie für die Addition oder Multiplikation von Zahlen das *Assoziativgesetz* $R_3 \circ (R_2 \circ R_1) = (R_3 \circ R_2) \circ R_1$. Das *Kommutativgesetz* ist im Allgemeinen für die Komposition von Relationen nicht erfüllt, die Reihenfolge, in der Sie Relationen verknüpfen, ist signifikant, wenn überhaupt eine Umkehrung der Reihenfolge möglich ist. Ist $R_1 \subseteq M \times N$ und $R_2 \subseteq N \times P$, ist zwar $R_2 \circ R_1$, aber nicht $R_1 \circ R_2$ möglich.

□ Für $M = \{a, b, c, d\}$, $R_1 = \{(a, b), (a, c)\}$ und $R_2 = \{(b, d), (c, a)\}$ ist sowohl $R_1 \circ R_2$ als auch $R_2 \circ R_1$ möglich. Es ist $R_2 \circ R_1 = \{(a, a), (a, d)\}$ und $R_1 \circ R_2 = \{(c, b), (c, c)\}$. Offensichtlich gilt $R_1 \circ R_2 \neq R_2 \circ R_1$.

Dieses Beispiel zeigt, dass selbst, falls $R_1 \circ R_2$ und $R_2 \circ R_1$ möglich sind, das Ergebnis im Allgemeinen nicht übereinstimmt: $R_1 \circ R_2 \neq R_2 \circ R_1$.

Definition 4.4 *Ist $R \subseteq M \times N$ eine binäre Relation, dann heißt*

$$R^{-1} = \{(y, x) \in N \times M \mid (x, y) \in R\} \subseteq N \times M$$

die zu R inverse Relation.

□ Die inverse Relation zu $R = \{(1, a), (1, c), (2, b), (3, b), (4, a)\}$ ist $R^{-1} = \{(a, 1), (c, 1), (b, 2), (b, 3), (a, 4)\}$. Als Matrix ist R dargestellt durch die binäre Matrix

$$A = \left(\begin{smallmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&1&0\\1&0&0\end{smallmatrix}\right).$$

Die inverse Relation entspricht der transponierten Matrix.

□ Zu $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq y\}$ ist die inverse Relation gegeben durch $R^{-1} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq y\}$

Die Schreibweise R^{-1} ist an die Potenzrechnung angelehnt. Für alle reellen Zahlen $a \neq 0$ gibt es ein inverses Element der Multiplikation mit $a \cdot a^{-1} = 1$. An die Stelle der Zahl 1 tritt jetzt eine Relation.

Definition 4.5 *Ist M eine Menge, dann heißt die Relation* $I = \{(x,x)\} \subseteq M^2$ identische Relation *oder* Identität in M.

Die identische Relation hat als darstellende Matrix die Einheitsmatrix. Die Analogie zwischen Potenzrechnung und der Komposition von Relationen kann dazu verwendet werden, um Potenzen von Relationen zu definieren als $R^2 = R \circ R$, $R^3 = R \circ R \circ R$.

☐ Für $R = \{(a,a),(a,c),(c,b)\} \subset \{a,b,c,d\}^2$ ist $R^2 = \{(a,a),(a,b),(a,c)\}$.

☐ Die Relationen $R_1 = \{(a,b),(a,c)\}$ und $R_2 = \{(b,d),(c,a)\}$ aus $\{a,b,c,d\}^2$ haben die inversen Relationen $R_1^{-1} = \{(b,a),(c,a)\}$ und $R_2^{-1} = \{(d,b),(a,c)\}$. Es war $R_2 \circ R_1 = \{(a,a),(a,d)\}$ und damit ist $(R_2 \circ R_1)^{-1} = \{(a,a),(d,a)\}$, $R_2^{-1} \circ R_1^{-1} = \{(c,c),(b,c)\} \neq R_1^{-1} \circ R_2^{-1} = \{(a,a),(d,a)\}$.

Satz 4.1 *Für jede binäre Relation auf einer Menge M ist* $(R^{-1})^{-1} = R$. *Für binäre Relationen* R_1 *und* R_2 *auf M gilt* $(R_2 \circ R_1)^{-1} = R_1^{-1} \circ R_2^{-1}$.

Beweis:
Die erste Behauptung folgt direkt aus der Definition der inversen Relation. Mit

$$\begin{aligned} R_1^{-1} \circ R_2^{-1} &= \{(z,x) \in M^2 \mid \exists (y \in M) \text{ mit } (z,y) \in R_2^{-1}, (y,x) \in R_1^{-1}\} \\ &= \{(z,x) \in M^2 \mid \exists (y \in M) \text{ mit } (y,z) \in R_2, (x,y) \in R_1\} \\ &= \{(z,x) \in M^2 \mid (x,z) \in R_1 \circ R_2\} = (R_2 \circ R_1)^{-1} \end{aligned}$$

ist auch die zweite Aussage bewiesen. ■

4.2 Äquivalenzrelationen

Die Elemente der Menge aller Einwohner einer Stadt können in *Klassen* eingeteilt werden. Dabei wird die Einteilung so vorgenommen, dass Elemente, die als gleichwertig oder gleichartig angesehen werden, in einer Klasse liegen. Alle Einwohner einer Stadt können Sie abhängig von ihrer Staatsangehörigkeit einteilen, falls alle anderen Eigenschaften unerheblich erscheinen. Ein anderes Merkmal, mit dessen Hilfe Sie Klassen bilden können, ist die Einteilung nach verschiedenen Altersstufen oder nach Steuerklassen, die das Finanzamt vergibt.

Egal, wie Sie die Klassen bilden, es gelingt dadurch eine Strukturierung einer vorher unstrukturierten Menge in disjunkte Teilmengen, deren Vereinigung die ursprüngliche Menge ist.

Definition 4.6 *Eine Menge von disjunkten Teilmengen $K_1, \ldots, K_n$ einer Menge M mit $\forall\ 1 \leq i, j \leq n\ K_i \cap K_j = \emptyset$ heißt* Partition, *wenn $\bigcup_{i=1}^{n} K_i = M$ erfüllt ist; die Teilmengen K_i heißen* Klassen.

- ☐ Das Finanzamt teilt alle seine „Kunden“ in Steuerklassen ein. Diese hängen von verschiedenen, eindeutigen Merkmalen ab.
- ☐ Eine Kfz-Haftpflichtversicherung bildet Schadensfreiheitsklassen wie in Tabelle 4.4. Diese richten sich in der Regel nach der Anzahl der Jahre, in denen bisher kein Schaden aufgetreten ist. Dies stellt eine Partition der Menge der Kunden dar, denn jeder Kunde ist eindeutig genau einer Schadensfreiheitsklasse zugeordnet; die Vereinigung dieser Klassen ist die Menge aller Kunden.
- ☐ Für die Menge $\{a, b, c\}$ können alle möglichen Partitionen aufgezählt werden: $\{a\}, \{b\}, \{c\}$; $\{a, b\}, \{c\}$; $\{a\}, \{b, c\}$; $\{a, c\}, \{b\}$; $\{a, b, c\}$.

Tabelle 4.4: Eine hypothetische Partition der Kunden einer Kfz-Haftpflichtversicherung

Dauer der Schadensfreiheit	Schadensfreiheitsklasse
länger als 15 Jahre	$SF15$
i Jahre, $i = 1, 2, \ldots, 14$	SFi
bis zu einem Jahr	$SF0$

Jede Partition einer Menge definiert durch $R = \{(x, y) \in M^2 \mid x$ und y sind in der gleichen Klasse$\}$ eine Relation auf dieser Menge. Umgekehrt stellt sich sofort die Frage, ob es eine besondere Art von Relationen gibt, die eine Partition erzeugen.

Beim Beispiel der Steuerklassen gilt für die damit definierte Relation sicher $(x, x) \in R$; Sie sind in der gleichen Steuerklasse wie Sie selbst. Das mag jetzt etwas spitzfindig klingen. Aber dies stellt eine wichtige Eigenschaft von Relationen dar. Wenn Herr Meier in der gleichen Steuerklasse wie Fräulein Weber ist, dann gilt dies auch umgekehrt. Mathematisch fomuliert, $(x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R$. Und wenn Sie wissen, dass neben Herrn Meier und Fräulein Weber auch Fräulein Weber und Herr Anton in der gleichen Steuerklasse sind, dann können Sie daraus schließen, dass dies auch für die Herren Meier und Anton gilt. Mathematisch formuliert: $(x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R$.

Definition 4.7 *Eine Relation $R \subseteq M^2$ heißt*

- reflexiv, *wenn $\forall x \in M\ (x, x) \in R$ erfüllt ist,*
- symmetrisch, *wenn $\forall x, y \in M\ (x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R$ erfüllt ist, und*
- transitiv, *wenn $\forall x, y, z \in M\ (x, y) \in R, (y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R$ erfüllt ist.*

Eine andere Formulierung für Reflexivität einer Relation ist $I \subseteq R$. In der Matrixdarstellung einer reflexiven Relation müssen *alle* Diagonalelemente 1 sein. Abbildung 4.4 auf Seite 79 zeigt eine reflexive Relation; an jedem Knoten ist eine „Schleife“. Die Matrix einer symmetrischen Relation muss symmetrisch sein. Im gerichteten Graphen zu einer symmetrischen Relation gibt es für jede Kante, die zwei Knoten a und b verbindet, auch eine Kante in der entgegengesetzten Richtung. Der gerichtete Graph einer transitiven Relation enthält für Elemente a, b, c, für die es eine Kante zwischen a und b und zwischen b und c eine Kante zwischen a und c. Abbildung 4.6 zeigt diese Eigenschaft nochmals.

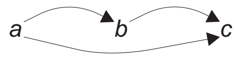

Abbildung 4.6: Transitivität einer Relation

□ In Abbildung 4.7 sehen Sie den gerichteten Graphen einer reflexiven Relation R_1. Sie ist nicht symmetrisch, denn es gilt $(a, b) \in R_1$, aber $(b, a) \notin R_1$. R_1 ist transitiv, denn sowohl die Paare (a, c) und (c, b) als auch (a, b) sind in R_1 enthalten. Dasselbe gilt für (c, a), (a, b) und (c, b).

□ Die Relation R_2 in Abbildung 4.8 ist nicht reflexiv; die Paare (a, a) und (b, b) fehlen. Sie ist allerdings symmetrisch, was Sie gut in der Abbildung sehen können. Sie ist nicht transitiv, denn (a, b) und (b, d) sind in R_2 enthalten, aber *nicht* (a, d).

□ Die Relation „Bruder von“ ist eine symmetrische Relation auf der Menge aller Männer. Wird die Menge vergrößert, in der die Relation definiert ist, dann geht die Symmetrie verloren. Fritz ist der Bruder von Susanne, aber Susanne ist kein Bruder von Fritz!

□ Beispiele für transitive Relationen sind „$<$“ auf $\mathbb{N}$ oder „$\subset$“ auf einer Potenzmenge. Auch die Relation „es gibt eine Straße zwischen“ ist eine transitive Relation in einer Menge von Städten.

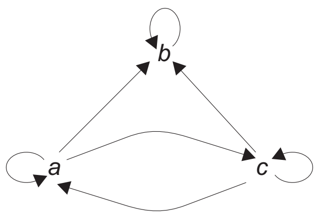

Abbildung 4.7: Die Relation R_1

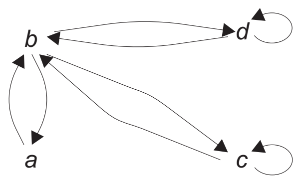

Abbildung 4.8: Die Relation R_2

Definition 4.8 *Eine reflexive, symmetrische und transitive Relation R wird* Äquivalenzrelation *genannt. Für eine solche Relation wird das Symbol $\sim$ verwendet. Für $x \in M$ heißt die Menge $R[x] = \{y \in M \mid x \sim y\}$ die* Äquivalenzklasse von x *bezüglich R.*

□ Die Relation $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}$ ist eine Äquivalenzrelation. Jede der Äquivalenzklassen besteht aus genau einer Zahl. Die Relation $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| = |y|\}$ ist eine Äquivalenzrelation; sie ist reflexiv, symmetrisch und transitiv, was Sie leicht überprüfen können. Die Äquivalenzklassen sind gegeben durch $R[x] = \{x, -x\}$.

☐ Die Relation $R = \{(a,b) \in \mathbb{Z}^2 \mid a$ und b ergibt den gleichen Rest bei der Division durch $3\}$ ist eine Äquivalenzrelation. Sie ist offensichtlich reflexiv und symmetrisch. Wenn a und b den gleichen Rest bei der Division durch 3 haben und b und c auch, dann ist $(a,c) \in R_3$; die Relation ist transitiv. Die Äquivalenzklassen werden als *Restklassen* bezeichnet:

$$R[0] = \{\ldots, -6, -3, 0, 3, 6, \ldots\}, R[1] = \{\ldots, -5, -2, 1, 4, 7, \ldots\}, \text{ und}$$
$$R[2] = \{\ldots, -4, -1, 2, 5, 8, \ldots\}.$$

Die Vereinigung dieser drei Restklassen ist $\mathbb{Z}$, sie sind paarweise disjunkt. Die drei Restklassen von R bilden eine Partition der Menge $\mathbb{Z}$.

Satz 4.2 *Die Äquivalenzklassen $R[x]$, $R[y]$ einer Äquivalenzrelation R auf einer Menge M sind entweder identisch oder disjunkt.*

Beweis:
Für $y \in R[x]$ ist zu beweisen, dass $R[x] = R[y]$ gilt. Für $z \in R[x]$ ist $x \sim z$ und auch $y \sim x$, mit der Transitivität folgt $y \sim z$ und damit $z \in R[y]$. Mit der gleichen Argumentation folgt $R[y] \subseteq R[x]$.

Für $y \notin R[x]$ ist $R[x] \cap R[y] = \emptyset$ nachzuweisen. Angenommen, es gibt ein $z \in R[x] \cap R[y]$. Dieses Element erfüllt $x \sim z$ und $y \sim z$, wegen der Transitivität gilt $x \sim y$, dies ist aber ein Widerspruch zu $y \notin R[x]$. ■

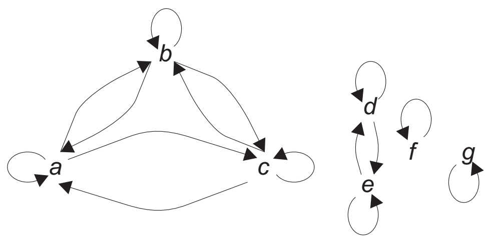

Abbildung 4.9: Eine Äquivalenzrelation und Partition auf der Menge $\{a, b, c, d, e, f, g\}$

Satz 4.3 *Jede Äquivalenzrelation auf einer Menge erzeugt eine Partition; jede Partition bestimmt eine Äquivalenzrelation.*

Beweis:
Äquivalenzklassen sind disjunkte Teilmengen von M. Angenommen, es gibt ein $x \in M$, das nicht in der Vereinigung aller Äquivalenzklassen liegt. Dann ergibt sich sofort ein Widerspruch, denn dieses x liegt sicher in der Äquivalenzklasse $R[x]$. Jede Äquivalenzrelation erzeugt also eine Partition der Menge, auf der sie definiert ist.

Liegt umgekehrt eine Partition der Menge M durch die Teilmengen K_i vor, kann damit die folgende Relation definiert werden: $x \sim y \Leftrightarrow \exists!\, K_i$ mit $x \in K_i, y \in K_i$. Es bleibt zu beweisen, dass die so definierte Relation reflexiv, symmetrisch und transitiv ist. Sie ist reflexiv, denn es gibt genau ein i mit $x \in K_i$. Die Symmetrie folgt sofort aus der Definition von R. Für $x \sim y$ und $y \sim z$ gibt es genau ein i mit $x \in K_i$ und $y \in K_i$, wegen $y \sim z$ ist $z \in K_i$. ■

□ Dass eine Äquivalenzrelation eine Menge in disjunkte Teilmengen zerlegt, ist am Beispiel der Relation auf der Menge $\{a, b, c, d, e, f, g\}$ in Abbildung 4.9 gut zu erkennen. Die dadurch definierte Partition ist gegeben durch $\{a, b, c\}, \{d, e\}, \{f\}$ und $\{g\}$.

4.3 Ordnungsrelationen

Eine Äquivalenzrelation teilt eine Menge durch einen Ähnlichkeitsbegriff in disjunkte Teilmengen auf. Häufig sollen die Elemente der Menge angeordnet werden, um sie zum Beispiel sukzessive zu bearbeiten. Denken Sie zum Beispiel an eine Menge von Wörtern, die alphabetisch angeordnet werden sollen. Ein anderes Beispiel für eine Anordnung ist ein Prozessmodell für die Software-Entwicklung. Die Elemente der anzuordnenden Menge sind die einzelnen Phasen „Anforderungsanalyse“, „Analyse“, „Design“, „Implementierung“ und „Abnahme“ eines Wasserfallmodells. Das Prozessmodell legt eine Reihenfolge fest. Die Aufzählung der Phasen spiegelt diese Reihenfolge wider.

Eine Äquivalenzrelation ist eine Relation, die sich im Kern wie das Gleichheitszeichen „=“ verhält. Für eine Ordnung können die Vergleichsoperatoren „≤“ und „≥“ als Vorbild dienen.

$$o \longrightarrow r \longrightarrow d \longrightarrow e \longrightarrow r$$

Abbildung 4.10: Eine Menge von Objekten, die angeordnet werden können

Der gerichtete Graph in Abbildung 4.10 deutet an, dass die Elemente der Menge $\{o, r, d, e, r\}$ von links nach rechts angeordnet sind in der Reihenfolge o, r, d, e, r.

Äquivalenzrelationen waren durch die Eigenschaften reflexiv, symmetrisch und transitiv charakterisiert. Eine Ordnung ist transitiv, denn aus „o kommt vor r“ und „r kommt vor d“ folgt „o kommt vor d“. Der Symmetriebegriff ist sinnlos: Entweder kommt zuerst das o oder das r, beides zugleich ist unmöglich.

Definition 4.9 *Eine Relation $R \subseteq M^2$ heißt*

- antisymmetrisch, *wenn* $\forall x, y \in M\ (x, y) \in R \wedge (y, x) \in R \Rightarrow x = y$, *und*
- total, *wenn* $\forall x, y \in M\ (x, y) \in R \vee (y, x) \in R$ *erfüllt ist.*

□ Der Vergleichsoperator „≤“ induziert eine antisymmetrische Relation auf den reellen Zahlen. Jede reelle Zahl kann mit jeder anderen verglichen werden, also ist sie auch total. Die dadurch gegebene Relation ist darüber hinaus reflexiv und transitiv.

☐ Der Vergleichsoperator $<$ auf den reellen Zahlen definiert eine transitive Relation. Sie ist *nicht* reflexiv, *nicht* antisymmetrisch und *nicht* total!

☐ Für die Potenzmenge $\mathbb{P}(M)$ von $M = \{a, b, c\}$ ist '$\subseteq$" für die Teilmengen eine reflexive, antisymmetrische und transitive Relation. Sie ist nicht total, denn die Elemente $\{a, c\}$ und $\{b\}$ sind im Gegensatz zu $\{a\} \subseteq \{a, c\}$ nicht vergleichbar.

☐ Für die Menge der Kleinbuchstaben gibt es eine Ordnung durch das Alphabet. Sind Groß- und Kleinbuchstaben anzuordnen, wird vereinbart, dass die Großbuchstaben zuerst kommen.

☐ Auf der Menge der deutschen Wörter existiert der Ordnungsbegriff der *lexikographischen Ordnung*. Dazu wird die alphabetische Ordnung der Buchstaben verwendet. Dann kann die Menge angeordnet werden, indem zunächst die ersten Buchstaben miteinander verglichen werden. Kann noch keine Entscheidung getroffen werden, geht man zum zweiten Buchstaben über und immer so weiter, bis eine Entscheidung möglich ist. Für $w_1 =$„Beisitz" und $w_2 =$„Beispiel" steht w_1 vor w_2, denn an der fünften Stelle unterscheiden sich die Wörter und i kommt vor p.

Definition 4.10 *Eine reflexive, antisymmetrische und transitive Relation $\preceq$ auf einer Menge M heißt* Teilordnung. *Die Menge mit einer solchen Relation heißt* teilgeordnete Menge, *häufig wird dafür $(M, \preceq)$ geschrieben. Zwei Elemente x, y einer teilgeordneten Menge $(M, \preceq)$ heißen* vergleichbar, *wenn entweder $x \preceq y$ oder $y \preceq x$ gilt. Sonst heißen Sie* unvergleichbar.

Ist eine Teilordnung zusätzlich total, heißt sie Ordnung. *Die Menge M mit einer Ordnung $\preceq$ wird* geordnete Menge *oder* Kette *genannt.*

Wie bereits erwähnt, ist das Vorbild der Definition einer Ordnungsrelation der Vergleichsoperator $\leq$ auf den Zahlenmengen. Der Operator $<$ ist nicht reflexiv. Denken Sie bei einer Ordnungsrelation immer an $\leq$ und eine Zahlenmenge!

☐ Die Vergleichsoperatoren $\leq$ auf einer Zahlenmenge und $\subseteq$ auf einer Potenzmenge definieren Teilordnungen; $\leq$ sogar eine Ordnung.

☐ Die Relation $\{(0,0), (0,1), (1,1)\}$ definiert eine Ordnung auf der Menge $\{0, 1\}$, was Sie durch Nachweisen der Reflexivität, Antisymmetrie und Transitivität überprüfen sollten.

☐ Für die Menge $\mathbb{N}$ ist die Relation $\{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid x \text{ teilt } y \text{ ohne Rest}\}$ eine Teilordnung, die mit dem Symbol $|$ geschrieben wird. Beispielsweise ist $2|4$, denn 2 teilt 4. Sie ist reflexiv, denn jede Zahl $n \in \mathbb{N}$ wird durch sich selbst geteilt. Teilt eine Zahl m die Zahl n ohne Rest und n auch m ohne Rest, dann muss $m = n$ gelten. Die Relation ist auch transitiv, denn im Fall $m|n$ und $n|l$ teilt m auch l ohne Rest. Es gibt aber Zahlen in $\mathbb{N}$, die mit dieser Relation nicht verglichen werden können wie 4 und 9; also ist die Teilordnung nicht total.

☐ Der Begriff der lexikographischen Ordnung kann auf beliebige kartesische Produkte $M_1 \times M_2$ übertragen werden, falls M_1 und M_2 jeweils eine Teilordnung $\preceq_1, \preceq_2$ aufweisen. Die Teilordnung ist gegeben durch komponenten-

weisen Vergleich. Es ist $(a_1, a_2) \preceq (b_1, b_2)$, falls $a_1 \preceq_1 a_2$ oder $a_1 = a_2$ und $b_1 \preceq_2 b_2$. Falls die beiden Paare gleich sind, soll auch $(a_1, a_2) \preceq (b_1, b_2)$ gelten. Auch M^* für ein Alphabet M kann mit Hilfe einer lexikographischen Ordnung zu einer geordneten Menge gemacht werden.
Für Paare ganzer Zahlen aus $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ist damit eine Ordnung definiert. Es ist $(2, 5) \leq (2, 6)$ und $(2, 5) \leq (3, 1)$. In Abbildung 4.11 sehen Sie die Elemente (n, m) von $\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_8$ mit $(n, m) \leq (3, 2)$ als Punkte $\circ$.

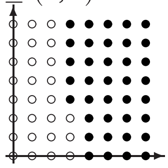

Abbildung 4.11: $\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_8$; $\circ$ kennzeichnet die Elemente mit $(n, m) \leq (3, 2)$

Der eingeführte Ordnungsbegriff hatte als Vorbild den Vergleich $\leq$, nicht den zu einer nicht-reflexiven Relation führenden Operator $<$. Dieser kleine Unterschied wird jetzt näher betrachtet.

Definition 4.11 *Eine Relation $R \subseteq M^2$ heißt* asymmetrisch, *wenn für alle $x, y \in M$ entweder $(x, y) \in R$ oder $(y, x) \in R$ erfüllt ist. Eine asymmetrische und transitive Relation heißt* strikte *Teilordnung.*

Eine asymmetrische Relation ist nicht reflexiv – das ist klar. Die Unterscheidung zwischen „$\leq$“ und „$<$“ liegt darin, dass „$<$“ transitiv und asymmetrisch ist. Trotzdem sind die beiden Ordnungsbegriffe stark miteinander verwandt.

Satz 4.4 *Ist $(M, \preceq)$ eine teilgeordnete Menge, dann ist die Relation $\prec$ mit*

$$x \prec y \Leftrightarrow x \preceq y \wedge x \neq y$$

eine strikte Teilordnung auf M.

Beweis:
Aus $x \prec y$ und $y \prec z$ folgt $x \preceq z$ wegen der Transitivität einer Teilordnung. Angenommen, es gilt $x = z$. Dann ist aber $z \preceq y$ und $y \preceq z$. Eine Teilordnung ist antisymmetrisch, also folgt $y = z$. Es ist $y \prec z$ vorausgesetzt, dies ist ein Widerspruch. Also ist $x \neq z$ und auch $x \prec z$.

Für Elemente $x, y \in M$ mit $x \prec y$ und $y \prec x$ kann wieder $x \preceq y$ und $x \preceq y$ geschlossen werden. Eine Teilordnung ist antisymmetrisch, damit folgt $x = y$, was aber einen Widerspruch zu $x \prec y$ darstellt, $\prec$ ist asymmetrisch. ■

Ordnung kommt von Anordnen. Dann ist es interessant, der Frage nachzugehen, ob es in einer teilgeordneten Menge sinnvoll ist, nach kleinsten und größten Elementen zu suchen.

Definition 4.12 *Ist $(M, \preceq)$ eine teilgeordnete Menge und $A \subseteq M$ eine Teilmenge. Ein Element $o \in M$ heißt* obere Schranke von A, *falls $\forall x \in A\ x \preceq o$ erfüllt ist. Analog heißt ein Element $u \in M$* untere Schranke von A, *falls $\forall x \in A\ u \preceq x$ erfüllt ist.*

Eine obere Schranke o heißt Supremum von A, *wenn o die kleinste obere Schranke von A ist. Ein Supremum ist eine obere Schranke mit* $\forall y \in M, x \in A\ x \preceq y \Rightarrow o \preceq y$. *Die größte untere Schranke heißt* Infimum von A. *Das Infimum einer Teilmenge ist eine untere Schranke u mit* $\forall y \in M, x \in A\ x \succeq y \Rightarrow u \succeq y$. *Für Supremum und Infimum einer Teilmenge A wird* $\sup_A$ *und* $\inf_A$ *geschrieben.*

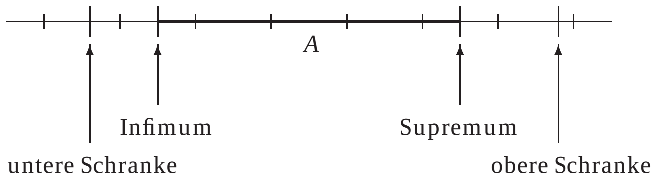

Abbildung 4.12: Supremum und Infimum der Menge $A \subseteq \mathbb{R}$ auf dem Zahlenstrahl

☐ In der Menge $(\mathbb{R}, \leq)$ kann man sich die eben eingeführten Begriffe auf dem Zahlenstrahl vorstellen wie in Abbildung 4.12. Eine Zahl x ist eine obere Schranke einer Teilmenge A der reellen Zahlen, wenn x „rechts von A" liegt. Und diese obere Schranke ist ein Supremum, wenn es unter allen möglichen oberen Schranken „möglichst weit links liegt".

☐ Eine untere Schranke für die Teilmenge $\{3, 9, 12\}$ der teilgeordneten Menge $(\mathbb{N}, |)$ ist eine natürliche Zahl, die 3, 9 als auch 12 teilt. Die beiden einzigen natürlichen Zahlen, die diese Forderung erfüllten, sind 1 und 3. Wegen $1|3$ ist 3 das Infimum von $\{3, 9, 12\}$ in $(\mathbb{N}, |)$. Die 3 ist der größte gemeinsame Teiler von 3, 9 und 12. Die einzige untere Schranke der Menge $\{1, 2, 4, 6, 8\}$ in $(\mathbb{N}, |)$ ist 1, die auch das Infimum bildet. Die Menge $\{12, 18\}$ hat die unteren Schranken 1, 2, 3, 6; 6 ist das Infimum. Eine obere Schranke für $\{3, 9, 12\}$ ist eine natürliche Zahl, die sowohl durch 3, 9 und 12 ohne Rest geteilt wird. Eine jede solche Zahl muss durch das kleinste gemeinsame Vielfache der drei Zahlen 36 teilbar sein. Beispiele für obere Schranken sind 36, 72 und 144. Das Supremum ist 36. Obere Schranken von $\{12, 18\}$ sind alle durch 36 teilbaren Zahlen; 36 ist das Supremum.

☐ Auch wenn obere oder untere Schranken existieren, heißt dies noch nicht, dass es ein Supremum oder ein Infimum geben muss. $(\mathbb{Q}, \leq)$ ist eine geordnete Menge. Die Teilmenge $A = \{x \in \mathbb{Q} |\ x^2 < 2\}$ hat sicher obere Schranken, beispielsweise 3 oder $\frac{3}{2}$. Aber zu jeder oberen Schranke, die Sie nennen, kann eine noch kleinere obere Schranke gebildet werden. Das liegt natürlich an der Tatsache, dass $\sqrt{2}$ irrational ist.

Satz 4.5 *Existieren Suprema und Infima, dann sind sie eindeutig bestimmt.*

Beweis:
Der Beweis wird nur für den Fall des Supremums geführt; die Aussage für das Infimum kann analog geführt werden, was Ihnen zur Übung empfohlen ist. Angenommen, es gibt für eine Teilmenge $A \subseteq M$ der teilgeordneten Menge M zwei

Suprema s_1 und s_2 mit $s_1 \neq s_2$. Da beide obere Schranken sind, müssen $s_1 \preceq s_2$ und $s_2 \preceq s_1$ gelten. Dann folgt aber $s_1 = s_2$. ■

☐ Die Teilmenge $H = \{x \in \mathbb{R} |\ x = \frac{1}{n}\}$ in $(\mathbb{R}, \leq)$ hat 1 als Supremum und 0 als Infimum. Für jedes Element $x \in H$ gilt $x \leq 1$. Es kann auch keine kleinere obere Schranke geben. Denn angenommen, es gibt eine Zahl $y \in \mathbb{R}$ mit $\forall n \in \mathbb{N}\ \frac{1}{n} \leq y$ und $y \leq 1$. Dann muss $y = 1$ gelten; das sieht man durch Einsetzen von $n = 1$.
Dass 0 eine untere Schranke ist, liegt an $\forall n \in \mathbb{N}\ 0 \leq \frac{1}{n}$. Dann muss das Infimum $\inf_H$ sicher $0 \leq \inf_H$ erfüllen. Angenommen, es gilt $\inf_H > 0$. Dann ist $2 \cdot \inf_H > \inf_H$, und es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < 2 \inf_H$; sonst wäre ja $\inf_H$ nicht das Infimum. Daraus folgt aber der Widerspruch $\frac{1}{2n} < \inf_H$.

Definition 4.13 *Ist* $(M, \preceq)$ *eine teilgeordnete Menge. Dann heißt* max maximales Elememt von M, *wenn es kein Element* $x \in M$ *gibt mit* $max \preceq x$. *Analog heißt* min minimales Element von M *falls es kein Element von* M, *gibt mit* $x \preceq min$.

☐ Für die Menge $(\{1, 2, 3, 4\}, \leq)$ ist 1 ein minimales Element, 4 ein maximales Element.

☐ Die Menge $(\{2, 4, 5, 10, 12, 20, 25\}, |)$ hat die Elemente $12, 20$ und 25 als maximale Elemente. Es gibt keine Zahl in $(\{2, 4, 5, 10, 12, 20, 25\}$, die diese drei Elemente teilt. Minimale Elemente sind 2 und 5.

Bei der grafischen Darstellung einer Teilordnung mit Hilfe eines gerichteten Graphen kann auf Grund der Eigenschaften einer Teilordnung auf viele Kanten verzichtet werden.

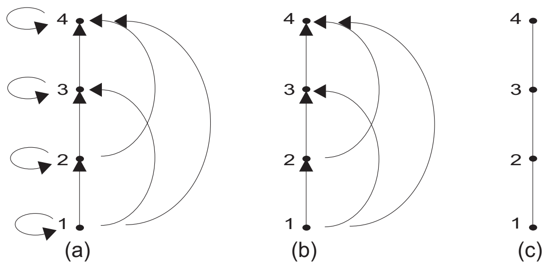

Abbildung 4.13: Konstruktion des Hasse-Diagramms von $(\{1, 2, 3, 4\}, \leq)$

In Abbildung 4.13(a) sehen Sie den gerichteten Graphen der teilgeordneten Menge $(\{1, 2, 3, 4\}, \leq)$. Die Relation ist eine Teilordnung, also reflexiv. Das erkennen Sie an den Schleifen bei jedem Element. Wenn Sie wissen, dass Sie eine Teilordnung darstellen, können Sie diese Schleifen einfach weglassen. Dann erhält man eine Darstellung wie in Abbildung 4.13(b). Eine Teilordnung ist auch transitiv, also können die Kanten, die wegen der Transitivität existieren müssen, ebenfalls weggelassen werden. In Abbildung 4.13(c) fehlen deshalb die Paare $(1, 3), (1, 4)$

und $(2,4)$. Wenn alle Kanten „nach oben zeigen“, dann kann auch darauf verzichtet werden, die Richtung durch Pfeilspitzen anzuzeigen, wie dies ebenfalls in der Teilabbildung (c) verwendet wurde.

Dies können Sie auch allgemein für jeden gerichteten Graphen einer Teilordnung durchführen. In einem ersten Schritt werden alle Schleifen weggelassen. Dann werden alle Kanten entfernt, die wegen der Transitivität existieren müssen. Abschließend werden die verbliebenen Kanten in der Zeichnung so ausgerichtet, dass immer die Richtung „von unten nach oben“ verwendet wird. Dann können die Pfeilspitzen weggelassen werden. Das so entstandene Diagramm heißt *Hasse-Diagramm*.

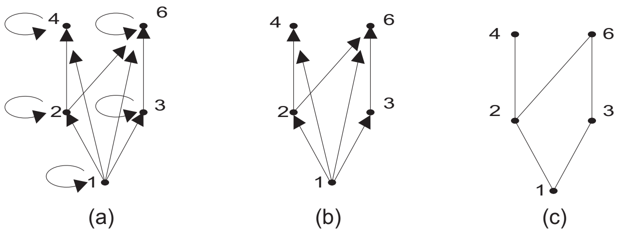

Abbildung 4.14: Konstruktion des Hasse-Diagramms für $(\{1,2,3,4,6\},|)$

☐ Die Konstruktion des Hasse-Diagramms für die teilgeordnete Menge $(\{1,2,3,4,6\},|)$ sehen Sie in Abbildung 4.14.

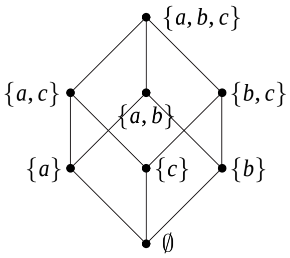

Abbildung 4.15: Das Hasse-Diagramm für $(\mathbb{P}(\{a,b,c\}),\subseteq)$

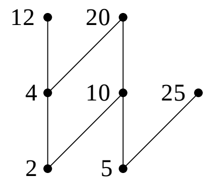

Abbildung 4.16: Das Hasse-Diagramm für $(\{2,4,5,10,12,20,25\},|)$

☐ Das Hasse-Diagramm für die teilgeordnete Menge $(\mathbb{P}(\{a,b,c\}),\subseteq)$ sehen Sie in Abbildung 4.15. Durch die Transitivität können die Kanten $(\emptyset,\{a,b\}),(\emptyset,\{a,c\}),(\emptyset,\{b,c\}),(\emptyset,\{a,b,c\}),(\{a\},\{a,b,c\}),(\{b\},\{a,b,c\})$ und $(\{c\},\{a,b,c\})$ gestrichen werden.

☐ Mit Hilfe eines Hasse-Diagramms können minimale und maximale Elemente abgelesen werden. In Abbildung 4.16 sehen Sie ein Hasse-Diagramm für die Menge $(\{2,4,5,10,12,20,25\},|)$. Die maximalen Elemente 12, 20 und 25 sind gut zu erkennen, genauso wie die minimalen Elemente 2 und 5.

☐ In Abbildung 4.17 sehen Sie ein Hasse-Diagramm einer teilgeordneten Menge $\{a,b,c,d,e,f,g,h,j\}$ mit der durch das Diagramm definierten Teilordnung. Die Teilmenge $\{b,d,g\}$ hat die oberen Schranken g und h. Da $g \preceq h$ gilt, ist g

das Supremum der Teilmenge. Die Elemente a und b sind untere Schranken, wegen $a \preceq b$ ist b das Infimum von $\{b, d, g\}$.

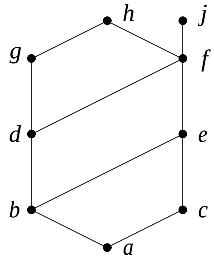

Abbildung 4.17: Ein Hasse-Diagramm einer teilgeordneten Menge

Eine Anwendung von Ordnungsrelationen ist die Berechnung eines Netzplans für ein Projekt. Angenommen, Sie haben ein Projekt in eine Menge von 10 Vorgängen aufgeteilt. Dann gibt es in der Regel Abhängigkeiten zwischen den einzelnen Vorgängen; sehr häufig in der Form von Ende-Anfang-Beziehungen. Darunter wird verstanden, dass ein Vorgang erst begonnen werden kann, wenn ein anderer Vorgang abgeschlossen ist. Wie lässt sich eine Menge von Vorgängen und Abhängigkeiten so anordnen, dass ein Projektplan herauskommt? Diese Funktionalität werden Sie häufig verwenden, wenn Sie ein Projekt planen. Für die Vorgänge ist durch Ende-Anfang-Beziehungen eine Teilordnung definiert. Darf der Vorgang b erst begonnen werden, wenn der Vorgang a abgeschlossen ist, dann gilt $a \preceq b$. Die Aufgabe der Erstellung eines Netzplans besteht darin, eine Ordnung für die Menge der Vorgänge zu definieren, die kompatibel mit der Teilordnung der Ende-Anfang-Beziehungen ist.

Definition 4.14 *Eine Ordnung $\preceq$ auf einer Menge M heißt* verträglich *oder* kompatibel *zur Teilordnung R auf M, wenn $\forall x, y \in M \ (x, y) \in R \Rightarrow x \preceq y$.*

Die beschriebene Aufgabe der Netzplan-Erstellung besteht darin, auf einer endlichen Menge mit einer Teilordnung eine verträgliche Ordnung zu konstruieren – eine *topologische Sortierung* zu berechnen.

Satz 4.6 *Jede endliche und nicht-leere teilgeordnete Menge $(M, \preceq)$ hat ein minimales Element.*

Beweis:
Wenn $M \neq \emptyset$ ist, dann können Sie sicher ein Element $x_0 \in M$ entnehmen. Ist dieses x_0 nicht das minimale Element, dann muss es ein Element $x_1 \in M$ geben mit $x_1 \preceq x_0$. Ist x_1 auch noch nicht minimal, dann muss es ein $x_2 \in M$ mit $x_2 \preceq x_1$ geben. Dieser Vorgang kann induktiv fortgesetzt werden; ist das entnommene Element $x_n \in M$ nicht minimal, dann muss es ein Element $x_{n+1} \in M$ geben mit $x_{n+1} \preceq x_n$. Da M aber eine endliche Menge ist, muss dieser Prozess irgendwann abbrechen, da das minimale Element entnommen wurde. ∎

Konstruktion einer topologischen Sortierung

Schritt 1: Entnehmen Sie der teilgeordneten Menge $(M, \preceq)$ das minimale Element x_1. Setzen Sie $k = 1$.

Schritt 2: Ist $(M \setminus \{x_1, \dots, x_k\}, \preceq) \neq \emptyset$, entnehmen Sie das minimale Element x_{k+1}; sonst stoppen Sie. Führen Sie Schritt 2 für die Menge $(M \setminus \{x_1, \dots, x_k, x_{i+1}\}, \preceq)$ durch.

Da M eine endliche Menge ist, muss dieser Prozess irgendwann einmal aufhören. Das Ergebnis ist eine Folge von Elementen $x_1 \preceq x_2 \preceq \cdots \preceq x_n$. Diese Kette definiert die gesuchte Ordnung auf M. Die durch den Algorithmus aufgestellte Ordnung ist verträglich mit der ursprünglichen Teilordnung. Denn für die beiden Elemente $x, y \in M$ mit $x \preceq y$ wird x zu einem früheren Zeitpunkt entnommen.

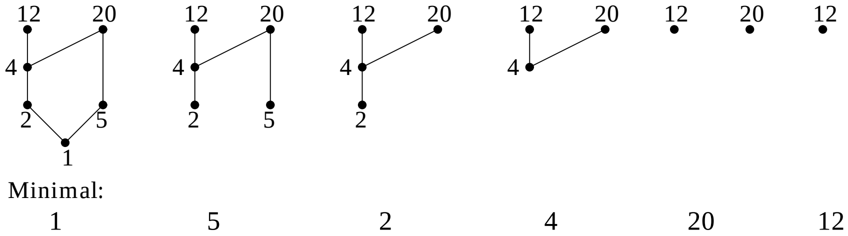

Abbildung 4.18: Die topologische Sortierung für die Menge $(\{1, 2, 4, 5, 12, 20\}, |)$

☐ Für die teilgeordnete Menge $(\{1, 2, 4, 5, 12, 20\}, |)$ wird eine verträgliche Ordnung gesucht. In Abbildung 4.18 sehen Sie den Verlauf des Verfahrens. Im Hasse-Diagramm ist gut zu erkennen, dass 1 das minimale Element ist. Im nächsten Schritt gibt es für die teilgeordnete Menge $(\{2, 4, 5, 12, 20\}, |)$ zwei minimale Elemente, 2 und 5. Welches der beiden Elemente entnommen wird, ist beliebig. In der Abbildung wurde die Entscheidung getroffen, die 5 zu entnehmen. Das minimale Element in $(\{2, 4, 12, 20\}, |)$ ist die 2. Dann wird die 4 entnommen. Beide verbliebenen Elemente 12 und 20 sind jetzt minimal; in der Abbildung wird die 20 entnommen, und abschließend die 12. Eine topologische Sortierung ist gegeben durch 1, 5, 2, 4, 20, 12.

☐ Angenommen, die Vorgänge A, B, C, D, E, F, G eines Software-Projekts sind durch Beziehungen wie in Abbildung 4.19 mit einer Teilordnung versehen. Gesucht ist eine Reihenfolge für die einzelnen Vorgänge. Das Resultat ist die topologische Sortierung A, C, B, E, F, D, G, wie in Abbildung 4.19 dargestellt.

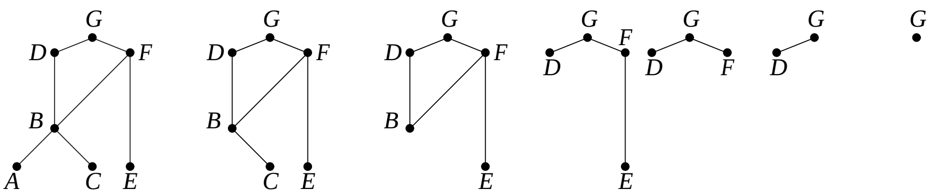

Abbildung 4.19: Die Konstruktion der topologischen Sortierung eines Software-Projekts

4.4 Abbildungen und Funktionen

Relationen enthalten oft Zuordnungen zwischen Elementen der beteiligten Mengen: „Bruder von ...“, „Vater von ...“oder auch „Preis einer Ware“ sind nicht nur Beispiele für Relationen, sondern der Preis eines Brötchens in einer Bäckerei ist auch eine Zuordnung einer Brötchensorte zu dem entsprechenden Preis, wenn für das gleiche Brötchen immer der gleiche Preis zu zahlen ist.

Definition 4.15 *Eine Relation R heißt* rechtseindeutig, *wenn für alle $x \in M$ und $y_1, y_2 \in N$ aus $(x, y_1) \in R \wedge (x, y_2) \in R$ immer $y_1 = y_2$ folgt.*

□ Eine Preisliste ist eine Teilmenge des kartesischen Produkts zwischen Obstsorten und Festkommazahlen mit zwei Nachkommastellen: {(Tomate, 0, 65 €), (Orange, 0, 75 €), (Banane, 0, 75 €), (Birne, 0, 80 €)}. Diese Relation ist rechtseindeutig.

Definition 4.16 *Eine rechtseindeutige Relation $A \subseteq M \times N$ wird* Abbildung *zwischen M und N genannt. Für jedes $x \in M$ gibt es höchstens ein $y \in N$ mit $(x, y) \in A$, geschrieben $A(x)$. Die Teilmenge $D(A) = \{x \in M | \ \exists y \in N \ A(x) = y\} \subseteq M$ heißt* Definitionsbereich von A, N Wertebereich. *Statt $A \subseteq M \times N$ wird die Notation $A : M \to N$ verwendet.*

Die Menge $R(A) = \{y \in N \mid \exists x \in M \text{ mit } A(x) = y\}$ heißt Bild. *Ein x mit $A(x) = y$ wird* Urbild *von $y \in N$ genannt. Eine Abbildung $A \subseteq M \times N$ mit $D(A) = M$ heißt* total*; im Fall $D(A) \neq M$ spricht man von einer* partiellen Abbildung.

Das Symbol $R(A)$ ist vom englischen Begriff *Range* abgeleitet. Für die Darstellung einer Abbildung können alle Methoden verwendet werden, die für Relationen geeignet waren. In einem Pfeildiagramm ist die Rechtseindeutigkeit daran abzulesen, dass von jedem Element der Menge links immer genau ein Pfeil nach rechts abgeht. Als Symbole für Abbildungen werden häufig kleine Buchstaben wie f, g und h verwendet. Wenn nichts anderes vermerkt ist, sind die Abbildungen in diesem Buch total.

Definition 4.17 *Eine Abbildung, die als Urbild und als Bild eine Teilmenge der reellen Zahlen besitzt, wird* Funktion *genannt. Die Relation $R_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = f(x)\}$ heißt der* Graph *der Funktion f.*

□ Der Graph der Funktion $f(x) = x^2$ mit Definitionsbereich $[0; 1]$ ist in Abbildung 4.20 dargestellt. Der Graph ist der geometrische Ort aller Paare $(x, f(x))$.

□ In Abbildung 4.21 sehen Sie einen Ausschnitt des Graphen der Funktion $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ mit $f(n) = 2n - 1$. Die Wertepaare sind in $\mathbb{Z}^2$ durch das Zeichen • gekennzeichnet.

□ Sehr häufig werden Sie zwei Funktionen verwenden, die reelle Zahlen auf ganze Zahlen abbilden. Das Bild einer reellen Zahl $x \in \mathbb{R}$ der Funktion $\lfloor x \rfloor$ ist definiert als die größte ganze Zahl z mit $z \leq x$, den Graph sehen Sie in

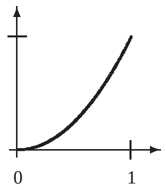

Abbildung 4.20: Graph der Funktion $f(x) = x^2$ mit Definitionsbereich $[0;1]$

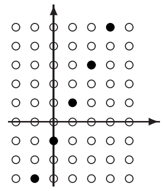

Abbildung 4.21: Graph der Funktion $f(n) = 2n - 1$ mit $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$

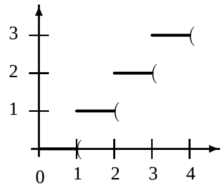

Abbildung 4.22: Graph der Funktion $\lfloor x \rfloor$

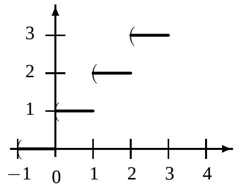

Abbildung 4.23: Graph der Funktion $\lceil x \rceil$

Abbildung 4.22. Mit Hilfe dieser Funktion kann eine Typumwandlung zwischen Gleitpunkt- und ganzzahligen Datentypen durchgeführt werden, die floor-Funktion. Mit Hilfe des Supremums ist $\lfloor x \rfloor = \sup\{z \in \mathbb{Z} | \; z \leq x\}$.
Die kleinste ganze Zahl z mit $x \leq z$ für eine reelle Zahl x ist der Funktionswert der $\lceil x \rceil$ Funktion, auch ceiling-Funktion genannt. Sie ist definiert als $\lceil x \rceil = \inf\{z \in \mathbb{Z} | \; x \leq z\}$. Der Graph dieser Funktion ist in Abbildung 4.23 dargestellt.

☐ In Abbildung 4.24 sind Graphen von Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = a^x$ für verschiedene Werte von $a \in \mathbb{R}$ dargestellt. Abbildung 4.25 zeigt den Graphen des natürlichen Logarithmus.

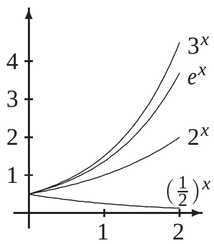

Abbildung 4.24: Graph der Funktionen $f(x) = 3^x, e^x, 2^x$ und $f(x) = (\frac{1}{2})^x$

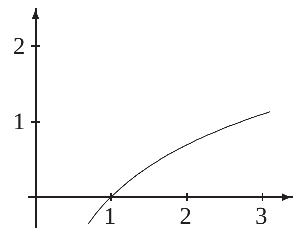

Abbildung 4.25: Graph des natürlichen Logarithmus auf dem Intervall $[0,7;3]$

Definition 4.18 *Eine Abbildung $f : M \longrightarrow N$ wird* surjektiv *genannt, wenn es für alle $y \in N$ ein $x \in M$ gibt mit $y = f(x)$.*

Die Surjektivität einer Abbildung ist leicht an der Tatsache zu erkennen, dass im zugehörigen Pfeildiagramm auf jedes Element auf der rechten Seite *mindestens* eine Pfeilspitze zeigt. Eine Abbildung ist genau dann surjektiv, wenn der Wertebereich und das Bild der Abbildung übereinstimmen.

☐ Die Abbildung $\{(1,c),(2,b),(3,b),(4,a)\} \subseteq \{1,2,3,4\} \times \{a,b,c\}$ ist surjektiv, was Sie gut am Pfeildiagramm in Abbildung 4.26 erkennen können.

☐ Die Funktion $f: [0;1] \to [0;1]$ mit $f(x) = x^2$ ist surjektiv.

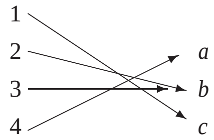

Abbildung 4.26: Pfeildiagramm der Funktion $\{(1,c),(2,b),(3,b),(4,a)\}$

Definition 4.19 *Eine Relation* $R \subseteq M \times N$ *heißt* linkseindeutig, *wenn für alle* $x_1, x_2 \in M$ *und* $y \in N$ *aus* $(x_1,y) \in R \wedge (x_2,y) \in R$ *immer* $x_1 = x_2$ *folgt. Ist eine Abbildung linkseindeutig, heißt sie* eineindeutig *oder* injektiv.

☐ Die Abbildung $\{(1,d),(2,a),(3,c),(4,e)\} \subseteq \{1,2,3,4\} \times \{a,b,d,e,f\}$ ist injektiv, aber nicht surjektiv. Die Elemente b und f besitzen kein Urbild in $\{1,2,3,4\}$.

☐ Die Abbildung $A = \{(1,c),(2,b),(3,b),(4,a)\} \subseteq \{1,2,3,4\} \times \{a,b,c\}$ ist nicht injektiv. b hat zwei Urbilder $A(2) = b$, $A(3) = b$.

Definition 4.20 *Eine surjektive und injektive Abbildung heißt* bijektiv.

☐ Die Abbildung $A = \{(1,d),(2,c),(3,b),(4,a)\} \subseteq \{1,2,3,4\} \times \{a,b,c,d\}$ ist bijektiv, jedes Element des Wertebereichs hat genau ein Urbild.

☐ Die Funktion $f: [0;1] \to [0;1]$ mit $f(x) = x^2$ ist bijektiv. Das Urbild von $y \in [0;1]$ ist die eindeutig bestimmte Zahl $x = +\sqrt{y} \in [0;1]$.

Ist eine Abbildung $A: M \to N$ bijektiv, dann gibt es für alle $y \in N$ ein eindeutig bestimmtes $x \in M$ mit $y = A(x)$, also ist ihre inverse Relation rechtseindeutig, sie stellt selbst eine Abbildung von N nach M dar.

Definition 4.21 *Für eine bijektive Abbildung* $A: M \to N$ *ist die* inverse Abbildung A^{-1} *gegeben durch* $y = A(x) \Leftrightarrow x = A^{-1}(y)$.

Für $R_1 \subseteq M_1 \times M_2$ und $R_2 \subseteq M_2 \times M_3$ war die Komposition $R_2 \circ R_1$ definiert als Relation in $M_1 \times M_3$. Abbildungen sind Relationen, also können sie verkettet werden. Bleibt die Frage zu beantworten, ob die Komposition von Abbildungen wieder ein Abbildung oder „nur" eine Relation ist.

Satz 4.7 *Die Komposition von rechtseindeutigen Relationen ist rechtseindeutig.*

Beweis:
Es ist zu zeigen, dass die Komposition

$$R_2 \circ R_1 = \{(x,z) \in M_1 \times M_3 \mid \exists y \in M_2 \text{ mit } (x,y) \in R_1, (y,z) \in R_2\}$$

rechtseindeutig ist, also aus $(x,z_1) \in R_2 \circ R_1$ und $(x,z_2) \in R_2 \circ R_1$ immer $z_1 = z_2$ folgt. Zu (x,z_1) gibt es ein y_1 mit $(x,y_1) \in R_1$, zu (x,z_2) gibt es ein y_2 mit $(x,y_2) \in$

R_2. R_1 ist rechtseindeutig, also folgt $y_1 = y_2$. Dieses eindeutig bestimmte Element soll mit y bezeichnet werden. Dann ist $(y, z_1) \in R_2$ und $(y, z_2) \in R_2$, wegen der Rechtseindeutigkeit von R_2 folgt $z_1 = z_2$. ■

Die Komposition von Abbildungen ist assoziativ, da dies schon für die Relationen richtig war. Die identische Relation I ist rechtseindeutig, als Abbildung heißt sie *identische Abbildung*. Wenn es wichtig ist, in welcher Menge sie betrachtet wird, wird I_M geschrieben. Mit Hilfe von I und der Komposition kann die inverse Abbildung charakterisiert werden.

Satz 4.8 *Ist $A : M \to M$ eine Abbildung, gilt $A \circ I_M = I_M \circ A = A$. Ist $A : M \to N$ bijektiv, gilt $A^{-1} \circ A = I_M$, $A \circ A^{-1} = I_N$ und $(A^{-1})^{-1} = A$.*

☐ Die inverse Funktion zu $f(x) = x^2$ mit Definitions- und Wertebereich $[0; 1]$ ist $f^{-1}(x) = +\sqrt{x}$.

☐ Die inverse Funktion zu $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ mit $f(x) = e^x$ ist der natürliche Logarithmus $\ln(x)$.

4.5 Relationen und Datenbanken

Relationen sind darstellbar als Tabellen – anders ausgedrückt: Aus mathematischer Sicht sind Tabellen in einem relationalen Datenbanksystem nichts anderes als Relationen. Die theoretische Basis der Datenbanken ist die *relationale Algebra*, die Codd 1970 vorgestellt hat. Sie ist heute in allen marktgängigen relationalen Datenbanksystemen implementiert. Codd hat insgesamt acht Operationen auf der Menge der Relationen eingeführt, um alle Informationen aus einer relationalen Datenbank zu extrahieren.

Relationen stellen eigentlich nur Teilmengen des kartesischen Produktes von Mengen dar. Also können die bekannten Mengenoperationen auf Relationen angewendet werden, um neue Relationen zu gewinnen: die Vereinigung, die Differenz und das kartesische Produkt von Mengen. Oft sollen nicht alle Komponenten eines Tupels ausgegeben werden, sondern nur ein bestimmter Teil davon. In Datenbanken werden die Komponenten auch als *Attribute* bezeichnet. Die *Projektion* $R[\text{Auswahl}]$ bildet die Relation R auf eine neue Relation ab, die aus allen Tupeln von R besteht, eingeschränkt auf die angegebene Auswahl von Spalten der Tabelle.

Tabelle 4.5: Eine Softwarehaus-Relation

MIT	*ABT*	*PRO*	*PNR*
Turing	A	Basis	000331
Gates	W	Fenster	007081
Neumann	A	Basis	081007
Zuse	O	Basis	070707
Jobs	M	Fenster	008007

Tabelle 4.6: Eine Projektion

MIT	*PNR*
Turing	000331
Gates	007081
Neumann	081007
Zuse	070707
Jobs	008007

☐ Für ein Softwarehaus gibt es die folgenden Mengen: MIT, die Menge der Mitarbeiternamen, ABT, die Menge der Abteilungsnamen, PRO, die Menge der Projektnamen, und PNR, die Menge der Mitarbeiterpersonalnummern. Eine Relation $R \subset MIT \times ABT \times PRO \times PNR$, die in Tabelle 4.5 dargestellt ist, beschreibt für alle Mitarbeiter die zugehörige Abteilung, das Projekt, in welchem die Person mitarbeitet, und die Personalnummer. Sollen nur die Mitarbeiternamen und die Personalnummer ausgegeben werden wird dies durch die Projektion $R[MIT, PNR]$ realisiert. Das Ergebnis enthält nur noch die beiden entsprechenden Spalten, wie Sie in Tabelle 4.6 sehen.

Bei einer Projektion werden aus einer gegebenen Tabelle Spalten gestrichen bis auf die, die in der Auswahl angegeben sind. Sollen im Gegensatz dazu Zeilen gestrichen werden, wird die *Restriktion* R WHERE Bedingung angewandt. Dadurch wird eine neue Relation erzeugt, die nur noch die Tupel aus R enthält, die der angegebenen Bedingung genügen.

☐ Die Spalte PRO in Tabelle 4.5 kann dazu verwendet werden, eine Liste der Mitarbeiter im Projekt „Fenster“ zu erstellen. Dazu wird die Restriktion R WHERE $PRO = Fenster$ verwendet. Das Ergebnis finden Sie in Tabelle 4.7.

Tabelle 4.7: Das Ergebnis der Restriktion R WHERE $PRO = Fenster$

MIT	ABT	PRO	PNR
Gates	W	Fenster	007081
Jobs	M	Fenster	008007

Die Operationen bilden Relationen auf Relationen ab. Also können sie verkettet werden. Die fünf bisher beschriebenen Operationen Vereinigung, Differenz, kartesisches Produkt, Projektion und Restriktion reichen aus, um mit relationalen Datenbanksystemen zu arbeiten. Sie sind in der nach ISO normierten Abfragesprache *SQL (Structured Query Language)* enthalten. In der relationalen Algebra sind noch drei weitere Operationen bekannt, die entweder direkt definiert werden können, wie es Codd ursprünglich tat, oder als Ausdrücke mit den fünf Basisoperationen darstellbar sind. Dem aufmerksamen Leser ist nicht entgangen, dass bei den auf der Mengenlehre beruhenden Operationen der Durchschnitt fehlte. Ein binärer Operator $R_1 \cap R_2$ ist gegeben durch $R_1 \setminus (R1 \setminus R_2)$. Der Durchschnitt kann auf die Differenz zurückgeführt werden.

Der *Verbund* oder *Join* zweier Relationen setzt voraus, dass beide Relationen Komponenten besitzen, die zur Verknüpfung herangezogen werden können. R_1 JOIN R_2 ist die Relation, die alle möglichen Kombinationen zwischen den Tupeln der beiden Relationen enthält, wobei die Werte in den für die Verknüpfung benutzten Komponenten gleich sein müssen.

☐ Für dieses Beispiel sind die benötigten Informationen über die Mitarbeiter in den Tabellen 4.8 und 4.9 enthalten. Beide Relationen besitzen die Komponente MIT. Bei den Mitarbeitern sind noch einige dazugekommen, die aber noch

Tabelle 4.8: Die Relation R_1

MIT	ABT	PNR
Turing	A	000331
Gates	W	007081
Neumann	A	081007
Zuse	O	070707
Jobs	M	008007
Goldberg	X	070012
Aiken	O	070808
Blinn	G	000815
Phong	G	003210

Tabelle 4.9: Die Relation R_2

MIT	PRO
Turing	Basis
Gates	Fenster
Neumann	Basis
Zuse	Basis
Jobs	Fenster

nicht gewinnbringend eingesetzt werden. Auf jeden Fall kann ein Verbund gebildet werden. Dieser enthält alle Zeilen des kartesischen Produktes, bei denen die beiden Einträge in der Komponente MIT übereinstimmen. Um diese auseinanderzuhalten, wird die Konvention $R_1.MIT$ und $R_2.MIT$ eingeführt. Dies stellt einen natürlichen Verbund dar, da nach der Bildung der Kombination die gemeinsame Spalte nur einmal aufgeführt wird. Das Ergebnis R_1 JOIN R_2 finden Sie in Tabelle 4.10, die alle Mitarbeiter enthält, die in Projekten mitarbeiten. Sie gleicht der Tabelle 4.5, wenigstens solange Sie keine neuen Mitarbeiter den Projekten hinzufügen.

Tabelle 4.10: Das Ergebnis von R_1 JOIN R_2

MIT	ABT	PRO	PNR
Gates	W	Fenster	007081
Jobs	M	Fenster	008007
Neumann	A	Basis	081007
Turing	A	Basis	000331
Zuse	O	Basis	070707

Der Verbund kann durch die eingeführten Abbildungen dargestellt werden. Zuerst wird das kartesische Produkt der beiden Relationen gebildet, für die der Verbund durchgeführt werden soll. Die Zeilen, bei denen die Werte der Spalten, über die der Verbund gebildet wird, übereinstimmen, definieren eine Restriktion. Abschließend wird eine Projektion durchgeführt, um die in beiden Relationen enthaltene Spalte nur einmal darzustellen: R_1 JOIN $R_2 = ((R_1 \times R_2)$ WHERE $R_1.Y_1 = R_2.Y_1)[X, Y_1, Z]$.

Die letzte Operation ist die *Division*. Dazu wird vorausgesetzt, dass die Relation R_1 mindestens alle Komponenten Att aus R_2 enthält. Aus den beiden Relationen R_1 und R_2 wird durch R_1 DIVIDEBY R_2 eine neue Relation erzeugt, die alle Komponenten von R_1 außer den Komponenten Att enthält und die aus allen Tupeln aus R_1 besteht, deren Werte in den Komponenten Att mit den Werten aus R_2 übereinstimmen.

□ R_1 soll durch die Tabelle 4.8 gegeben sein; R_2 durch $R_2 = \text{G} \subseteq \text{ABT}$. Das Ergebnis der Division R_1 DIVIDEBY R_2 ist dann die Relation in Tabelle 4.11.

Tabelle 4.11: Das Ergebnis von R_1 DIVIDEBY R_2

MIT	*PNR*
Blinn	000815
Phong	003210

4.6 Abzählbarkeit und Berechenbarkeit

Wenn M und N endliche Mengen sind, ist eine Abbildung $f : M \to N$ nur dann bijektiv, wenn die beiden Mengen gleich viele Elemente besitzen, denn jedes Element in N hat genau ein Urbild. Dieses Argument kann auch in der umgekehrten Richtung verwendet werden. Wenn zwei endliche Mengen mit jeweils n Elementen gegeben sind, können die einzelnen Elemente durchnummeriert werden, vielleicht sogar mit Hilfe einer Ordnung. Mit $M_1 = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ und $N = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ und der Zuordnung $A(x_i) = y_i$ wird eine Abbildung definiert. Sie ist offensichtlich bijektiv. Wenn an den Mengen nur die Anzahl der Elemente interessiert, sie also bezüglich dieses Kriteriums als gleich anzusehen sind, kann zwischen Mengen eine Äquivalenzrelation definiert werden. Zwei endliche Mengen sind äquivalent, wenn es eine bijektive Abbildung zwischen ihnen gibt. Zwei endliche Mengen, die bezüglich dieser Relation in der gleichen Äquivalenzklasse liegen, werden *gleichmächtig* genannt.

□ Die Mengen $\mathbb{Z}_8$ und $\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ sind gleichmächtig; genauso wie die Mengen $\{a, b, c, d\}$ und $\{1, 2, 3, 4\}$.

Es stellt formal kein Problem dar, bijektive Abbildungen zwischen Mengen mit unendlich vielen Elementen zu untersuchen, sehen wir einmal von dem Problem ab, dass es schwer fallen dürfte, ein Pfeildiagramm davon zu zeichnen. Also können auch Äquivalenzklassen von Mengen mit unendlich vielen Elementen gebildet werden. Interessant ist die Klasse aller Mengen, die äquivalent zu $\mathbb{N}$ sind.

Definition 4.22 *Eine Menge M wird* abzählbar *genannt, wenn eine totale und bijektive Abbildung $A : M \to \mathbb{N}$ existiert. Als Symbol für die Kardinalzahl $|\mathbb{N}|$ wird $\aleph_0$ (gesprochen „aleph* 0*“) verwendet.*

Der Begriff „abzählbar“ deutet an, dass die Mengen der Mächtigkeit $\aleph_0$ theoretisch „aufgezählt“ werden können.

□ Die Menge $G = \{x \in \mathbb{N} \mid \exists n \in \mathbb{N} \text{ mit } x = 2n\}$, die Menge der geraden und natürlichen Zahlen ist abzählbar. Die Definition der Menge enthält bereits die bijektive Abbildung $A(n) = 2n$. Jede gerade Zahl hat die Darstellung $2n$ mit irgendeiner natürlichen Zahl n, sonst wäre sie nicht durch 2 teilbar. Also ist A surjektiv. Aus $2n_1 = 2n_2$ folgt $n_1 = n_2$, damit ist A injektiv.

□ Auch $\mathbb{Z}$ ist abzählbar, denn durch $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, \ldots\}$ ist eine Aufzählung gegeben, die der bijektiven Abbildung

$$A : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}, A(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{für gerades n,} \\ -\frac{n-1}{2} & \text{für ungerades } n \end{cases}$$

entspricht. Es ist $A(1) = 0$, $A(2) = 1$, $A(3) = -1$, $A(4) = 2$, $A(5) = -2$.

Allgemein ist jede unendliche und echte Teilmenge der natürlichen Zahlen selbst abzählbar. Für die Mächtigkeiten disjunkter endlicher Mengen gilt $|M \cup N| = |M| + |N|$. Dies gilt auch für unendliche Mengen. Allerdings gelten für die Arithmetik mit $\aleph_0$ andere Regeln. Ist G wieder die Menge der geraden Zahlen, dann gilt $|G| \cup \{1\} = \aleph_0 + 1 = \aleph_0$. Die ganzen Zahlen sind abzählbar und somit auch jede unendliche Teilmenge von $\mathbb{Z}$. Also ist $|\mathbb{Z} \setminus \{0\}| = \mathbb{N} \cup \{z \in \mathbb{Z} \mid \exists n \in \mathbb{N}\, z = -n\}$ $= \aleph_0 + \aleph_0 = 2 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$.

$\mathbb{Z}$ und $\mathbb{N}$ sind gleichmächtig, haben also „gleich viele" Elemente. Der nächste Satz, der auf Cantor zurückgeht, sagt aus, dass die Menge aller Brüche abzählbar ist!

Satz 4.9 *$\mathbb{Q}$ ist abzählbar.*

Beweis:
Der Beweis dieser Aussage beruht auf dem *Diagonalisierungsschema von Cauchy*, mit dessen Hilfe eine bijektive Abbildung zwischen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Q}$ konstruiert werden kann. In einem ersten Schritt werden nur die positiven rationalen Zahlen der Größe nach geordnet. In der ersten Zeile stehen die Zahlen mit dem Nenner 1, in der zweiten alle mit Nenner 2, dann alle Brüche mit Nenner 3 und immer so weiter, wie in Abbildung 4.27. Wenn Sie Zahlen in der durch den Polygonzug in Abbildung 4.27 angegebenen Reihenfolge aufschreiben, wobei schon vorgekommene Zahlen ausgelassen werden, dann kommt jede positive rationale Zahl in der Liste

$$1, 2, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 3, 4, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4} \ldots$$

vor. Ist diese Liste $\{r_1, r_2, r_3, \ldots\}$, dann ist analog wie bei der Abzählung von $\mathbb{Z}$ die Menge $\{0, r_1, -r_1, r_2, -r_2, \ldots\}$ eine bijektive Abbildung zwischen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Q}$. ∎

Definition 4.23 *Eine Menge mit unendlich vielen Elementen, die nicht abzählbar ist, wird* überabzählbar *genannt.*

War diese Definition nicht vielleicht etwas voreilig? Sind vielleicht alle unendlichen Mengen abzählbar?

Satz 4.10 *Das Intervall $[0; 1]$ ist überabzählbar.*

Beweis:
Auch dieser Beweis gelingt durch ein Diagonalisierungsschema, das diesmal nach Cantor benannt ist. Angenommen, das Intervall $[0; 1]$ wäre abzählbar. Dann ist es

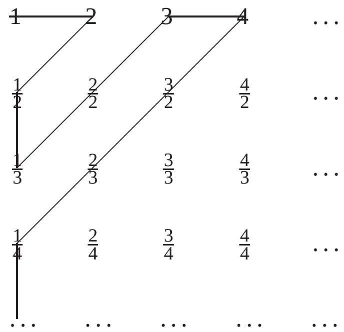

Abbildung 4.27: Das Diagonalisierungs-schema von Cauchy

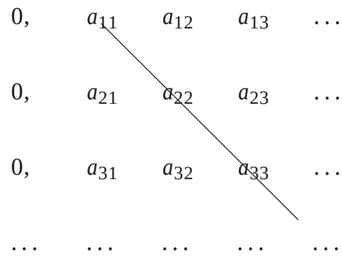

Abbildung 4.28: Das Diagonalisierungs-schema von Cantor

möglich, alle Dezimalbrüche zwischen 0 und 1 als $a_1, a_2, a_3, \ldots$ durchzunummerieren. Schreiben Sie die Brüche in dieser Reihenfolge wie in Abbildung 4.28. Jedes $0 < x \leq 1$ ist als unendlicher Dezimalbruch $0, x_1x_2x_3\ldots$ zu schreiben; mit $0,\overline{9} = 1$.

Aus der durch den Strich in Abbildung 4.28 definierten Diagonale können Sie den unendlichen Dezimalbruch $0, a_{11}a_{22}a_{33}\ldots \in [0;1]$ und daraus den neuen Dezimalbruch $d = 0, b_1b_2b_3\ldots$ bilden, indem Sie jede Zahl a_{nn} durch eine Ziffer $b_n \neq a_{nn}$, $b_n \neq 0$ ersetzen. Dieser Dezimalbruch ist ein Element des Intervalls $(0;1]$, die Dezimalbruchdarstellung bricht nie ab und d unterscheidet sich von allen Zeilen in der Aufzählung. Es fehlt mindestens ein Bruch; es liegt ein Widerspruch vor. ■

Der Beweis, dass das Intervall $[0;1]$ überabzählbar ist, hätte auch mit jedem anderen Intervall funktioniert. Dann ist aber jedes Intervall $[a;b]$ und auch $\mathbb{R}$ selbst überabzählbar,

In der Informatik wird mit diesen Werkzeugen die Existenz von nichtberechenbaren Funktionen bewiesen. Den Zusammenhang zwischen Mengen und Abbildungen stellt die Menge $K^M = \{f | \; f : M \to K, D(f) = M\}$ aller totalen Abbildungen zwischen M und K dar. Jede Menge K kann als eine solche Abbildungsmenge interpretiert werden durch $K^{\{\emptyset\}}$. Dazu wird eine Abbildung $g : K \to K^{\{\emptyset\}}$ definiert durch $g(x) = f_x$ mit $f_x : \{\emptyset\} \to K$, $f_x(\emptyset) = x \in K$. Die Abbildung g ist bijektiv, was Sie überprüfen sollten.

Unter einem Algorithmus versteht die Informatik ein Berechnungsverfahren, das als Text formuliert wird. Darunter müssen Sie kein Programm in einer Programmiersprache verstehen, ein Algorithmus kann auch in Deutsch abgefasst sein. Die Wörter und Sätze der Sprache sind Zeichenfolgen über einem endlichen Alphabet M; beispielsweise die Zeichen Ihrer Tastatur. Jeder Algorithmus ist dann eine Zeichenfolge, ein Element $\alpha \in M^*$. Die Ein- und Ausgaben von Algorithmen sind ebenfalls wieder endliche Zeichenfolgen über dem Alphabet M. Also berechnet jeder Algorithmus $\alpha \in M^*$ eine Abbildung $f_\alpha : M^* \to M^*$. Die Frage, ob es nichtberechenbare Funktionen gibt kann dann beantwortet werden, wenn bekannt ist, wie viele Abbildungen $f: M^* \to M^*$ und wie viele Algorithmen $f_\alpha: M^* \to M^*$ es gibt.

Das Alphabet als endliche Menge kann angeordnet werden, beispielsweise wie $\{A, \ldots, Z, a, \ldots, z\}$. Die totale Abbildung $p: M \to \{1, 2, \ldots, |M|\} \subset \mathbb{N}$ soll jedem Zeichen $x \in M$ die Stelle zuordnen, an der es im Alphabet auftritt. Im Beispiel der Groß- und Kleinbuchstaben gilt dann $p(A) = 1$, $p(Z) = 26$, $p(z) = 52$. Angenommen, $w = x_1x_2\ldots x_n \in M^*$ ist ein beliebiges Wort der Länge n. Für ein solches Wort wird die Abbildung $\phi: M^* \to \mathbb{N}$ definiert mit

$$\phi(w) = \phi(x_1x_2\ldots x_n) = \sum_{i=1}^{n} p(x_i)(|M|+1)^i; \phi(\epsilon) = 0.$$

ϕ ist eine totale Abbildung. Das Bildungsgesetz basiert auf der Idee der Stellenwertsysteme. Die Zahl $|M|+1$ ist die Basis, M die Menge der Ziffersymbole und die Abbildung p liefert das Gewicht jedes Ziffernsymbols. Es gilt immer

$$\phi(x_1x_2\ldots x_n) = \sum_{i=1}^{n} p(x_i)(|M|+1)^i < (|M|+1)^{n+1}.$$

☐ Für $M = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ und $w = 99$ gilt $\phi(w) = 10 \cdot 11 + 10 \cdot 11^2 = 1\,320$.

☐ Für $M = \{0, 1\}$ und das Wort $w = 1010$ gilt $\phi(w) = 2 + 3 + 18 + 27 = 50$. Für $w = 1111$ ist $\phi(w) = 2 + 6 + 18 + 54 = 80$.

Satz 4.11 *Die Abbildung ϕ ist injektiv.*

Beweis:
Für zwei Wörter $w_1, w_2 \in M^*$ mit unterschiedlicher Länge gilt sicher $\phi(w_1) \neq \phi(w_2)$. Sind w_1 und w_2 zwei Wörter der Länge n, also $w_1 = x_1x_2\ldots x_n$ und $w_2 = y_1y_2\ldots y_n$ für ein $n \geq 0$. Damit ϕ injektiv ist, muss $\phi(w_1) = \phi(w_2) \Rightarrow w_1 = w_2$ gelten. Aus $\phi(w_1) = \phi(w_2)$ folgt

$$\sum_{i=1}^{n} (p(x_i) - p(y_i))(|M|+1)^i = 0.$$

Diese Gleichung kann nur richtig sein, wenn $p(x_i) - p(y_i) = 0$ ist. Die Abbildung p war bijektiv, damit ist $x_i = y_i$ für alle i. ■

Satz 4.12 *Die Menge aller Algorithmen ist abzählbar.*

Beweis:
Die Menge aller Algorithmen ist eine unendliche Teilmenge von M^*. Wenn also M^* selbst abzählbar ist, dann muss dies auch für die Menge aller Algorithmen gelten. Da M^* eine unendliche Menge und ϕ injektiv ist muss auch das Bild

$R(\phi) \subset \mathbb{N}$ eine unendliche Menge sein. Jede unendliche Teilmenge der natürlichen Zahlen ist aber abzählbar. Wegen $|M^*| = |R(\phi)|$ folgt $|M^*| = \aleph_0$ und die Behauptung. ■

Der Beweis des folgenden Satzes beruht wieder auf dem Diagonalisierungsschema von Cantor, das in Abbildung 4.28 für den Beweis der Überabzählbarkeit der reellen Zahlen verwendet wurde.

Satz 4.13 *Die Menge der totalen Abbildungen $f : M^* \to M^*$ ist überabzählbar.*

Beweis:
Der Beweis wird wieder indirekt geführt; es wird angenommen, dass die Menge F der totalen Abbildungen $f : M^* \to M^*$ abzählbar ist. Dann gibt es eine bijektive Abbildung $h : \mathbb{N} \to F$, die die Abbildungen aus F durchnummeriert: $f_1, f_2, \ldots, f_{101}$ und immer so weiter. Satz 4.12 sagt aus, dass M^* abzählbar ist. Dann können die Wörter in dieser Menge ebenfalls durchnummeriert werden als $w_1, w_2, \ldots, w_{101}$. Für ein beliebiges, aber festgehaltenes Zeichen $a \in M$ sei die Abbildung $g : M^* \to M^*$ definiert durch $g(w_i) = f_i(w_i)a$. Das entspricht wieder dem Diagonalisierungsschema von Cantor. In Tabelle 4.12 ist dieses Bildungsgesetz nochmals dargestellt. Für die Abbildung g wird zuerst der Index i bestimmt, dann die i-te Abbildung f_i auf w_i angewandt und an dieses Diagonalelement mit Hilfe der Konkatenation das Zeichen a angehängt.

Tabelle 4.12: Die Definition der Abbildung g

	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	$\ldots$
w_1	$\mathbf{f_1(w_1)}$	$f_2(w_1)$	$f_3(w_1)$	$f_4(w_1)$	$f_5(w_1)$	$f_6(w_1)$	$\ldots$
w_2	$f_1(w_2)$	$\mathbf{f_2(w_2)}$	$f_3(w_2)$	$f_4(w_2)$	$f_5(w_2)$	$f_6(w_2)$	$\ldots$
w_3	$f_1(w_3)$	$f_2(w_3)$	$\mathbf{f_3(w_3)}$	$f_4(w_3)$	$f_5(w_3)$	$f_6(w_3)$	$\ldots$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	
w_6	$f_1(w_6)$	$f_2(w_6)$	$f_3(w_6)$	$f_4(w_6)$	$f_5(w_6)$	$\mathbf{f_6(w_6)}$	$\ldots$
$\ldots$							

g ist eine totale Abbildung, also ist $g \in F$. Es muss also mit der Annahme, dass F abzählbar ist, einen Index k geben mit $g = f_k$. Für das Wort w_k gilt dann auf der einen Seite $g(w_k) = f_k(w_k)$, andererseits wegen der Definition von g $f_k(w_k) \neq f_k(w_k)a = g(w_k)$. Dann ist g aber keine Abbildung; es liegt ein Widerspruch vor und die Behauptung ist bewiesen. ■

Satz 4.14 *Es gibt eine Funktion $f : M^* \to M^*$, die nicht durch einen Algorithmus berechnet werden kann.*

Dieser Satz folgt unmittelbar aus den beiden Sätzen 4.12 und 4.13. Er ist eine reine Existenzaussage; damit ist noch nicht bekannt, wie eine solche nicht-berechenbare Funktion aussieht. In der theoretischen Informatik werden Sie dieses Thema noch weiter beleuchten und auch nicht-berechenbare Funktionen kennen lernen!

4.7 Aufgaben

1. Stellen Sie die Relation $R = \{(1,2), (1,5), (1,6), (2,2), (2,4), (3,4), (3,6), (4,6), (5,5)\}$ auf $M = \{1,2,3,4,5,6\}$ als Pfeildiagramm, als Tabelle, als gerichteter Graph und als binäre Matrix dar!
2. Bilden Sie für $R_1 = \{(a,b),(a,c)\}$ und $R_2 = \{(b,d),(c,a)\}$ die Kompositionen $R_2^{-1} \circ R_1^{-1}$ und $R_1^{-1} \circ R_2^{-1}$!
3. Ist für reflexive Relationen $R_1, R_2 \subset M^2$ die Komposition $R_1 \circ R_2 \subset M^2$ reflexiv? Beweisen Sie, dass für reflexive Relationen $R \subset R \circ R$ gilt!
4. Ist die Aussage $R \circ R \subseteq R$ äquivalent zur Definition einer transitiven Relation?
5. Geben Sie sämtliche Partitionen der Menge $M = \{9, 12, 21\}$ an. Weisen Sie nach, dass $R = \{(x,y) \in M^2 \mid x \text{ hat die gleiche Quersumme wie } y\}$ eine Äquivalenzrelation ist, und bestimmen Sie die Äquivalenzklassen!
6. Welche der folgenden Relationen sind Äquivalenzrelationen, wenn M die Menge aller Menschen und W die Menge aller Wassertürme in Deutschland darstellt? $R_m = \{(x,y) \in M^2 \mid x \text{ ist am gleichen Tag wie } y \text{ geboren}\}$, $R_{10} = \{(n,m) \in \mathbb{N}^2 \mid n+m = 10\}$, $R_w = \{(x,y) \in W^2 \mid x \text{ ist höher als } y\}$.
7. Die Relation $R \subset \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^2$ soll gegeben sein durch $((a,b),(c,d)) \in R \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$. Ist R eine Äquivalenzrelation?
8. Welche der folgenden Mengen von Teilmengen von $M = \{1,2,3,4,5,6\}$ ist eine Partition: $T_1 = \{\{1,2\},\{2,3,4\},\{4,5,6\}\}$, $T_2 = \{\{1\},\{2,3,6\},\{4\},\{5\}\}$, $T_3 = \{\{2,4,6\},\{1,3,5\}\}$, $T_4 = \{\{1,4,5\},\{2,6\}\}$?
9. Welche der folgenden durch binäre Matrizen gegebenen Relationen sind Teilordnungen?
$$R_1 = \begin{pmatrix} 1&0&1\\1&1&0\\0&0&1 \end{pmatrix}, R_2 = \begin{pmatrix} 1&1&0\\0&1&0\\1&1&1 \end{pmatrix}, R_3 = \begin{pmatrix} 1&0&1&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\\1&1&0&1 \end{pmatrix}.$$
10. Beweisen Sie, dass für die teilgeordnete Menge (M,R) auch (M,R^{-1}) eine teilgeordnete Menge ist.
11. Es sei $S = \{1,2,3,4\}$. Als Ordnung sei die lexikographische Ordnung mit $\leq$ auf S^2 gegeben. Finden Sie alle Paare in S^2, die kleiner als $(2,3)$ oder größer als $(3,1)$ sind!
12. Ordnen Sie die Bitstrings 0, 01, 11, 001, 010, 011, 0001 und 0101 lexikographisch an, mit der Teilordnung $0 < 1$ für ein Bit!
13. Zeichnen Sie das Hasse-Diagramm für die Teilbarkeit ohne Rest auf den Mengen $M_1 = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$, $M_2 = \{1,2,3,5,7,11,13\}$, $M_3 = \{1,2,3,6,12,24,36,48\}$ und $M_4 = \{1,2,4,8,16,32,64\}$!
14. Gegeben ist die teilgeordnete Menge $(\{3,5,9,15,24,45\}, |)$. Geben Sie die maximalen und minimalen Elemente an! Geben Sie alle oberen Schranken für die

Teilmenge $\{3, 5\}$ und das Supremum an, falls es existiert. Bestimmen Sie die unteren Schranken der Teilmenge $\{15, 45\}$ und das Infimum, falls es existiert.

15. Für eine Menge M und ihre Potenzmenge $\mathbb{P}(M)$ sollen die Teilmengen $A, B \subseteq M$ betrachten werden. Begründen Sie, dass $A \cap B$ das Infimum und $A \cup B$ das Supremum von $\{A, B\} \in \mathbb{P}(M)$ ist!
16. Bestimmen Sie eine topologische Sortierung für die teilgeordnete Mengen in 4.17 und 4.29!

Abbildung 4.29: Hasse-Diagramme für Aufgabe 16

17. M sei die Menge aller Bitfolgen. Welche der folgenden Relationen aus $M \times \mathbb{N}$ ist eine Abbildung: $f_1(x)$ ist die Position einer 0 in x; $f_2(x)$ ist die Anzahl der 1 in x, $f_3(x)$ ist die kleinste natürliche Zahl i, sodass das i-te Bit eine 1 ist; dabei wird für das leere Wort $f_3(\epsilon) = 0$ gesetzt.
18. Geben Sie die folgenden Werte an: $\lfloor 1, 1 \rfloor$, $\lceil \frac{3}{4} \rceil$, $\lfloor \frac{1}{2} + \lceil \frac{1}{2} \rceil \rfloor$ und $\lfloor \frac{1}{2} \cdot \lfloor \frac{5}{2} \rfloor \rfloor$. Weisen Sie die folgenden Eigenschaften nach: $\lfloor x + m \rfloor = \lfloor x \rfloor + m$, $\lceil x + m \rceil = \lceil x \rceil + m$ für $m \in \mathbb{Z}$.
19. Untersuchen Sie die folgenden Abbildungen $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität: $f_1(n) = n - 1$, $f_2(n) = n^2 + 1$, $f_3(n) = n^3$, $f_4(n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$.
20. Bestimmen Sie für die reellen Funktionen $f(x) = x + 1$, $g(x) = 2x$ und $h(x) = x^2$ die Verkettungen $f \circ g$, $f \circ h$, $g \circ f$, $g \circ h$, $h \circ f$ und $h \circ g$!
21. Zeichnen Sie die Graphen der folgenden Funktionen $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: $f_1(x) = \lfloor 2x \rfloor$, $f_2(x) = \lceil \frac{x}{2} \rceil$, $f_3(x) = \lfloor x \rfloor + \lfloor \frac{x}{2} \rfloor$, $f_4(x) = \lfloor 2x \rfloor \cdot \lceil \frac{x}{2} \rceil$.
22. Finden Sie für $f(x) = \lfloor x \rfloor$ die folgenden Bilder der inversen Funktion: $f^{-1}(0)$, $f^{-1}(\{-1; 0, 1\})$, $f^{-1}(\{x \,|0 < x < 1\})$.
23. Geben Sie an, welche der folgenden Mengen abzählbar ist, und geben Sie die Zuordnung zwischen $\mathbb{N}$ und den abzählbaren Mengen an: die negativen ganzen Zahlen, die ungeraden natürlichen Zahlen, die reellen Zahlen zwischen 0 und $\frac{1}{2}$ und alle ganzen Zahlen, die ein Vielfaches von 7 sind.
24. Bestimmen Sie die Funktionswerte der Abbildung $\phi : M^* \to \mathbb{N}$ für das Alphabet $M_{10} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ für die folgenden Worte: $w_1 = 55$, $w_2 = 101$, $w_3 = 999$. Bestimmen Sie für das Alphabet $M_2 = \{0, 1\}$ die Funktionswerte für die folgenden Worte: $w_4 = 0101$, $w_5 = 00011$, $w_6 = 111000$.