1 Begriffe und Bezeichnungen

1.1 Gewöhnliche Differenzialgleichungen

Definition 1.1

Eine **gewöhnliche Differenzialgleichung** ist eine Gleichung, in der neben der gesuchten Funktion $y(x)$ und der unabhängigen Variablen x auch die Ableitungen $y'(x), y''(x), y'''(x), \ldots$ vorkommen**.** Die höchste in der Gleichung auftretende Ableitung nennt man die **Ordnung der Differenzialgleichung**.

Bemerkung: Bei einer Differenzialgleichung ist außerdem der Definitionsbereich (Lösungsgebiet) $B = \{(x, y), x \in I \subseteq \mathbf{R}, y \in J \subseteq \mathbf{R}\}$ festzulegen. In vielen Fällen ist das erst nach Bestimmung der Lösung möglich.

Beispiel 1.1

$y'(x)\,y(x) + x - 1 = 0$ ist eine Differenzialgleichung erster Ordnung.

$(x^2 + 1)y'''(x) + \sin x\, y'(x) - y(x) = \mathrm{e}^x$ ist eine Differenzialgleichung dritter Ordnung.

$y^{(6)}(x) + 3xy^{(5)}(x) - y'''(x)y(x) = 0$ ist eine Differenzialgleichung sechster Ordnung.

$y''(x) + \int\limits_0^1 \sin(x - \xi)\; y(\xi)\mathrm{d}\xi = x^2$ ist keine Differenzialgleichung, da bei dieser Gleichung außer der zweiten Ableitung von $y(x)$ auch deren Integral auftritt. ■

Bemerkung: Die allgemeine Form einer gewöhnliche Differenzialgleichung n-ter Ordnung lautet

$$F\left(x, y(x), y'(x), \ldots, \ldots y^{(n)}(x)\right) = 0 \tag{1.1}$$

Ist es möglich, die Differenzialgleichung nach der höchsten Ableitung aufzulösen, so liegt die Differenzialgleichung in **expliziter Form** vor:

$$y^{(n)}(x) = f\left(x, y(x), y'(x), \ldots, \ldots y^{(n-1)}(x)\right) \tag{1.2}$$

Dagegen ist Gleichung (1.1) eine Differenzialgleichung in **impliziter Form**. Bei einem **Anfangswertproblem** wird außer der Differenzialgleichung noch die Erfüllung von n Anfangsbedingungen an einer beliebigen Stelle $x_0 \in I$

$$y(x_0) = y_0\,, y'(x_0) = y_1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

gefordert. Bei einem **Randwertproblem** wird außer der Differenzialgleichung noch die Erfüllung von Vorgaben in den Randpunkten a, b (Zwei-Punkt-Randwertproblem) ihres Definitionsintervalls $[a, b]$ gefordert.

Beispiel 1.2

Man entscheide, welche der Differenzialgleichungen in expliziter bzw. impliziter Form vorliegen und bestimme jeweils die Ordnung der Differenzialgleichung.

a) $\sin\sqrt{y^{(6)}(x)y^{(5)}(x)} - y'''(x)y(x) = 0$, b) $y'(x) = xy(x) + 18x$,

c) $\mathrm{e}^{2\ln y'''(x)} + y^2(x)y''(x) = 1 + (y'''(x))^2$, d) $(y'(x))^2 + xy'(x) - 3y(x) = 0$.

Lösung: a) Die Differenzialgleichung ist von sechster Ordnung und liegt, da sie nicht nach $y^{(6)}(x)$ aufgelöst werden kann, in impliziter Form vor.

b) Hier handelt es sich um eine explizite Differenzialgleichung erster Ordnung mit $y'(x) = f(x, y(x)) := xy(x) + 18x$.

c) Wegen $\mathrm{e}^{2\ln y'''(x)} = \mathrm{e}^{\ln(y'''(x))^2} = (y'''(x))^2$ fallen die dritten Ableitungen weg, somit liegt eine Differenzialgleichung zweiter Ordnung vor. Diese kann wegen $y''(x) = f(x, y(x), y'(x)) = \dfrac{1}{y^2(x)}$ in eine explizite Gleichung überführt werden.

d) Diese Differenzialgleichung ist von erster Ordnung und entspricht den beiden expliziten Differenzialgleichungen

$$y'(x) = \frac{-x - \sqrt{x^2 + 12y(x)}}{2} \quad \text{und} \quad y'(x) = \frac{-x + \sqrt{x^2 + 12y(x)}}{2}. \quad ■$$

Definition 1.2

Eine Funktion $y(x) = \phi(x), x \in I$ heißt **Lösung** oder auch **Integral** bzw. **Integralkurv**e einer Differenzialgleichung, wenn $y(x) = \phi(x)$, in die Gleichung eingesetzt, diese für alle $x \in I$ erfüllt.

Bemerkung: Um Missverständnissen vorzubeugen, sollte eine Differenzialgleichung, wenn immer möglich, als explizite Gleichung formuliert werden.

Beispiel 1.3

Zeigen Sie, dass $y(x) = 2\mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x + 5x^2\mathrm{e}^x + \frac{1}{2}x^3\mathrm{e}^x,\ x \in \mathbf{R}$ die Differenzialgleichung $y'''(x) - 3y''(x) + 3y'(x) - y(x) = 3\mathrm{e}^x, x \in \mathbf{R}$ löst.

Lösung: Die ersten drei Ableitungen von $y(x)$ sind

$$y'(x) = \mathrm{e}^x + 9x\mathrm{e}^x + \frac{13}{2}x^2\mathrm{e}^x + \frac{1}{2}x^3\mathrm{e}^x,$$

$$y''(x) = 10\mathrm{e}^x + 22x\mathrm{e}^x + 8x^2\mathrm{e}^x + \frac{1}{2}x^3\mathrm{e}^x,$$

$$y'''(x) = 32\mathrm{e}^x + 38x\mathrm{e}^x + \frac{19}{2}x^2\mathrm{e}^x + \frac{1}{2}x^3\mathrm{e}^x.$$

Damit lautet die linke Seite der vorgelegten Differenzialgleichung

$$32\mathrm{e}^x + 38x\mathrm{e}^x + \frac{19}{2}x^2\mathrm{e}^x + \frac{1}{2}x^3\mathrm{e}^x - 3\left(10\mathrm{e}^x + 22x\mathrm{e}^x + 8x^2\mathrm{e}^x + \frac{1}{2}x^3\mathrm{e}^x\right)$$
$$+3\left(\mathrm{e}^x + 9x\mathrm{e}^x + \frac{13}{2}x^2\mathrm{e}^x + \frac{1}{2}x^3\mathrm{e}^x\right) - \left(2\mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x + 5x^2\mathrm{e}^x + \frac{1}{2}x^3\mathrm{e}^x\right) = 3\mathrm{e}^x.$$

Diese Funktion ist mit der rechten Seite der Differenzialgleichung identisch. ■

Beispiel 1.4

Zeigen Sie: Die Funktionen $\phi_1(x) = \sin x, x \in \mathbf{R}$, $\phi_2(x) = \cos x, x \in \mathbf{R}$ und $\phi_3(x) = \alpha \sin x + \beta \cos x, \alpha, \beta, x \in \mathbf{R}$ sind Lösungen der Differenzialgleichung $y''(x) + y(x) = 0, x \in \mathbf{R}$.

Lösung: Wir berechnen die Ableitungen $\phi_1(x) = \sin x, x \in \mathbf{R}$, $\phi_1'(x) = \cos x, x \in \mathbf{R}$, $\phi_1''(x) = -\sin x, x \in \mathbf{R}$; durch Einsetzen erhält man $-\sin x + \sin x = 0, x \in \mathbf{R}$. Für $\phi_2(x) = \cos x, x \in \mathbf{R}$ folgt $\phi_2'(x) = -\sin x, x \in \mathbf{R}$, $\phi_2''(x) = -\cos x, x \in \mathbf{R}$. Einsetzen in die Differenzialgleichung liefert die Identität $-\cos x + \cos x = 0, x \in \mathbf{R}$. Für $\phi_3(x) = \alpha \sin x + \beta \cos x,\ x \in \mathbf{R}$ ergibt sich $\phi_3'(x) = \alpha \cos x - \beta \sin x,\ x \in \mathbf{R}$ sowie $\phi_3''(x) = -\alpha \sin x - \beta \cos x,\ x \in \mathbf{R}$. Durch Einsetzen in die Differenzialgleichung erhalten wir mit $\phi_3''(x) + \phi_3(x) = -\alpha \sin x - \beta \cos x + \alpha \sin x + \beta \cos x = 0, x \in \mathbf{R}$ die Behauptung. ■

Bemerkung: Im Allgemeinen erhält man für eine Differenzialgleichung eine Schar von Lösungen, die man zur Lösungsmenge L zusammenfasst. So lautet die Lösungsmenge in Beispiel 1.3

$$L=\left\{ y(x)=C_1\mathrm{e}^x+C_2x\mathrm{e}^x+C_3x^2\mathrm{e}^x+\frac{1}{2}x^3\mathrm{e}^x \,\middle|\, C_1,C_2,C_3,x\in\mathbf{R} \right\}.$$

Geometrische Deutung einer expliziten Differenzialgleichung erster Ordnung

Wir geben eine geometrische Deutung der expliziten Differenzialgleichung

$$y'(x)=f(x,y(x)) \tag{1.3}$$

Ist $B=\{(x,y),x\in I\subseteq\mathbf{R},y\in J\subseteq\mathbf{R}\}$ der Definitionsbereich von $f(x,y)$ und $P_0=(x_0,y_0)$ ein Punkt der Ebene, in dem $f(x,y)$ definiert ist, so wird in diesem Punkt durch (1.3) eine Richtung $y'(x_0)=\tan\alpha_0=f(x_0,y_0)$ zugeordnet. Geht also eine Lösung von (1.3) durch den Punkt $P_0=(x_0,y_0)$, d. h. ist $y(x_0)=y_0$, so beträgt die Steigung an dieser Stelle $y'(x_0)=f(x_0,y(x_0))$. Führt man diese Überlegungen für jeden Punkt des Definitionsgebiets durch, so kommt man zu folgender Definition.

Definition 1.3

Das Tripel $(x_0,y_0,f(x_0,y_0)),x_0\in I$ heißt **Linienelement** der Differenzialgleichung $y'(x)=f(x,y(x))$. Das **Richtungsfeld** ist die Gesamtheit aller Linienelemente $(x,y(x),y'(x))$ mit $(x,y(x)),x\in B$. Als **Isokline** bezeichnet man die Kurven, auf denen das Richtungsfeld die gleiche Steigung c hat. Die Isoklinen sind durch die Gleichung $f(x,y(x))=c$ definiert.

Bemerkung: Bei der grafischen Darstellung zeichnet man zunächst die Verbindungslinie (Isokline) aller Punkte, deren Linienelemente die gleiche Steigung haben.

Definition 1.4

Kommen in einer Differenzialgleichung n-ter Ordnung die gesuchte Funktion $y(x)$ und ihre Ableitungen $y'(x),y'''(x),\ldots y^{(n)}(x)$ nur in der ersten Potenz vor, so liegt eine **lineare Differenzialgleichung** vor, andernfalls ist die Differenzialgleichung **nichtlinear**.