5 Lineare Differenzialgleichungen

In Kapitel 2 wurden bereits lineare Differenzialgleichungen erster Ordnung behandelt. Insbesondere ist die allgemeine Lösung einer solchen Differenzialgleichung additiv zusammengesetzt aus der allgemeinen Lösung der zugehörigen homogenen Differenzialgleichung und einer beliebigen (aber festen) speziellen Lösung der inhomogenen Gleichung. Die entsprechende Aussage gilt nun auch für lineare Differenzialgleichungen höherer Ordnung (siehe Abschnitt 5.3).
Zunächst aber wird in diesem Kapitel die **Differenzialoperator-Schreibweise** eingeführt und das **Überlagerungsprinzip** formuliert. Im weiteren Verlauf folgen Strukturaussagen über die Lösungen homogener linearer Differenzialgleichungen, und es wird darauf hingewiesen, wie man, ausgehend von einer Lösungsfunktion, weitere Lösungen erhält.
Danach wenden wir uns inhomogenen linearen Differenzialgleichungen zu und erläutern die Methode **Variation der Konstanten**.
Die Behandlung spezieller Differenzialgleichungen beschließt das vorliegende Kapitel.

5.1 Differenzialoperator-Schreibweise und Überlagerungsprinzip

5.1.1 Linearer Differenzialoperator

Definition 5.1

Eine Differenzialgleichung der Form

$$a_n(x)y^{(n)}(x)+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x)+\ldots+a_1(x)y'(x)+a_0(x)y(x)=b(x) \tag{5.1}$$

mit stetigen Funktionen $a_0(x), a_1(x), \ldots, a_n(x), b(x)$ auf einem Intervall heißt **lineare Differenzialgleichung** n-ter Ordnung. Dabei ist n eine natürliche Zahl.

Ist $b(x)$ die Nullfunktion, so heißt die Differenzialgleichung **homogen**, ansonsten heißt sie **inhomogen**.

Beispiel 5.1

Die Differenzialgleichung $x^2y''(x)+xy'(x)-y(x)=0$ ist linear sowie von zweiter Ordnung und homogen. Sind $y_1(x)=x$ und $y_2(x)=\frac{1}{x}$ Lösungen?

Lösung: Man stellt durch Einsetzen in die Differenzialgleichung leicht fest, dass $y_1(x) = x$ eine Lösung ist. Es ist $x^2 y_2''(x) + x y_2'(x) - y_2(x) = 2\frac{x^2}{x^3} - \frac{x}{x^2} + \frac{1}{x} = 0$, also ist auch $y_2(x) = \frac{1}{x}$ Lösung. ■

Definition 5.2

Die Vorschrift, die jeder auf einem Intervall stetig differenzierbaren Funktion $y(x)$ ihre Ableitungsfunktion $y'(x)$ zuordnet, heißt **Differenzialoperator** und wird mit D bezeichnet, d. h. $Dy(x) = y'(x)$.

Bemerkung: D^k für $k \in \mathbf{N}$ ist dann derjenige Differenzialoperator k-ter Ordnung, der jeder mehrfach stetig differenzierbaren Funktion $y(x)$ ihre k-te Ableitungsfunktion $y^{(k)}(x)$ zuordnet.

Beispiel 5.2

Man schreibe die Differenzialgleichung $x^2 y''(x) + xy'(x) - y(x) = 0$ zweiter Ordnung unter Verwendung des Differenzialoperators D.

Lösung: Man definiert einen neuen Operator L wie folgt

$L = x^2 D^2 + xD - I$, wobei I der identische Operator bedeutet.

Damit gilt dann

$$Ly(x) = \left(x^2 D^2 + xD - I\right)y(x) = x^2 D^2 y(x) + xDy(x) - Iy(\mathrm{x})\,. \quad ■$$

Beispiel 5.2 gibt Anlass zu folgender

Definition 5.3

Es seien $a_0(x), a_1(x), \ldots, a_n(x), b(x)$ auf einem Intervall stetige Funktionen.

Dann heißt

$$L = a_n(x)D^n + a_{n-1}(x)D^{n-1} + \ldots + a_1(x)D + a_0(x)I \tag{5.2}$$

linearer Differenzialoperator n-ter Ordnung, sofern $a_n(x)$ ungleich der Nullfunktion ist.

Ist $a_n(x) \equiv 1$, so heißt L **normiert**.

Bemerkung: a) L kann durch Multiplikation mit $\dfrac{1}{a_n(x)}$ stets normiert werden. Allerdings können bei den neuen Koeffizienten $\dfrac{a_0(x)}{a_n(x)},\ldots,\dfrac{a_{n-1}(x)}{a_n(x)}$ Singularitäten auftreten.

b) Gemäß Definition 5.3 kann die Differenzialgleichung (5.1) platzsparend mit Hilfe des Operators L wie folgt geschrieben werden:

$$Ly(x) = b(x) \tag{5.3}$$

Charakteristisch für lineare Differenzialgleichungen ist, dass für sie das Anfangswertproblem stets eindeutig lösbar ist.

Satz 5.1

Es sei L ein normierter linearer Differenzialoperator n-ter Ordnung und $b(x)$ eine stetige Funktion. Dann gibt es zu jedem reellen (n+1)-Tupel $\left(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}\right)$ genau eine Lösung $y(x)$ der Differenzialgleichung $Ly(x) = b(x)$ mit der Eigenschaft $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0', \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$.

Beispiel 5.3

Es sei $L = x^2 D + xD - I$. Man berechne diejenige Lösung $y_{\mathrm{s}}(x)$ der Differenzialgleichung $Ly(x) = 0$, für die gilt: $y_{\mathrm{s}}(1) = 1, y_{\mathrm{s}}'(1) = 2$.

Lösung: Das Auffinden der Lösung vollzieht sich in zwei Schritten:
Als Erstes wird die allgemeine Lösung von $Ly(x) = 0$ berechnet, die von zwei freien Parametern C_1, C_2 abhängt. Zweitens werden an Hand der vorgelegten Anfangsbedingungen die Parameter C_1, C_2 so bestimmt, dass sich die geforderte Lösung ergibt.
Zur Berechnung der allgemeinen Lösung macht man den Ansatz $y(x) = x^\lambda$ mit einem zu bestimmenden Parameter λ, da man wegen der Bauart der Differenzialgleichung vermuten kann, dass es eine Potenzfunktion als Lösung gibt.
Einsetzen des Ansatzes in die Differenzialgleichung ergibt nun

$$Ly(x) = Lx^\lambda = \lambda(\lambda - 1)x^2 x^{\lambda-2} + \lambda x x^{\lambda-1} - x^\lambda = 0,$$

woraus folgt

$$\lambda(\lambda-1)x^{\lambda}+\lambda x^{\lambda}-x^{\lambda}=\left(\lambda^2-1\right)x^{\lambda}=0.$$

Diese Gleichung ist genau dann erfüllt, wenn gilt

$$\lambda^2-1=0\text{, d. h. }\lambda=1\text{ oder }\lambda=-1\,.$$

Somit erhält man zwei Lösungsfunktionen $y_1(x)=x$ und $y_2(x)=\frac{1}{x}$.

Diese zwei Funktionen $y_1(x)=x$, $y_2(x)=\frac{1}{x}$ bilden dabei ein sogenanntes *Fundamentalsystem*, d. h. die allgemeine Lösung ist als Linearkombination von $y_1(x)=x$ und $y_2(x)=\frac{1}{x}$ darstellbar

$$y_{\text{allg}}(x)=C_1x+C_2\frac{1}{x}\text{ mit }C_1,C_2\text{ als freien Parametern.}$$

Für die gesuchte Lösung soll gelten

$$y_{\text{s}}(1)=C_1+C_2=1$$

$$y_{\text{s}}'(1)=C_1-C_2=2\,.$$

Daraus folgt sofort $C_1=\frac{3}{2}$ und $C_2=-\frac{1}{2}$.

Also ist $y_{\text{s}}(x)=\frac{3}{2}x-\frac{1}{2x}$ diejenige Lösung, welche die Differenzialgleichung erfüllt und zusätzlich den gestellten Anfangsbedingungen $y_{\text{s}}(1)=1, y_{\text{s}}'(1)=2$ genügt. ■

5.1.2 Überlagerungsprinzip

Auf Grund der Linearitätseigenschaft eines Differenzialoperators L ergibt sich sofort die in folgendem Satz formulierte **Überlagerungseigenschaft**, auch **Superpositionsprinzip** genannt.

Satz 5.2

Es sei L ein linearer Differenzialoperator der Ordnung n. Sind $y_1(x)$ bzw. $y_2(x)$ Lösungen von $Ly(x)=b_1(x)$ bzw. $Ly(x)=b_2(x)$, so ist $cy_1(x)+dy_2(x)$ Lösung von $Ly(x)=cb_1(x)+db_2(x)$, wobei c, d beliebige reelle Zahlen sind.

Satz 5.2 gestattet den stufenweisen Aufbau der Lösung einer linearen Differenzialgleichung, indem die rechte Seite $b(x)$ in ihre linearen Bestandteile $b_1(x),\ldots,b_k(x)$ zerlegt wird: $b(x)=b_1(x)+\ldots+b_k(x)$. Man löst dann nacheinander $y(x)=b_j(x);\ j=1,\ldots,k,$ und erhält somit durch Überlagerung die Lösung der ursprünglichen Differenzialgleichung $Ly(x)=b\ (x)$.

Beispiel 5.4

Man löse die Differenzialgleichung $Ly(x)=b(x)$ mit $L=x^2D^2+xD-I$ und $b(x)=\dfrac{1}{x^2}+4$.

Lösung: Es ist $b(x)=b_1(x)+b_2(x)$ mit $b_1(x)=\dfrac{1}{x^2}$ und $b_2(x)=4$.

Aus Beispiel 5.3 ist bekannt, dass $y_0(x)=C_1x+C_2\dfrac{1}{x}$ die allgemeine Lösung von $Ly(x)=0$ ist. Nach dem Überlagerungssatz ist dann

$$y_{\text{allg}}(x)=C_1x+C_2\frac{1}{x}+y_1(x)+y_2(x)$$

die allgemeine Lösung von $Ly(x)=b(x)$, wobei $y_1(x)$ bzw. $y_2(x)$ Lösungen von $Ly(x)=b_1(x)$ bzw. $Ly(x)=b_2(x)$ sind.
Man sieht nun sofort, dass $y_2(x)=4$ eine Lösung von $Ly(x)=b_2(x)=4$ ist.
Auf Grund der Bauart von $Ly(x)=b_1(x)$ ist zu vermuten, dass es eine Lösung der Form $y_1(x)=c\dfrac{1}{x^2}$ gibt mit einem noch zu bestimmenden Parameter c.

Setzt man jetzt diesen Ansatz $y_1(x)=c\dfrac{1}{x^2}$ in die Differenzialgleichung $Ly(x)=b_1(x)=\dfrac{1}{x^2}$ ein, so erhält man $x^2c\dfrac{6}{x^4}+xc\left(-\dfrac{2}{x^3}\right)-c\dfrac{1}{x^2}=3c\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{1}{x^2}$,

woraus $c=\dfrac{1}{3}$ folgt. Also ist $y_1(x)=\dfrac{1}{3x^2}$ eine Lösung von $Ly(x)=b_1(x)$.
Nach dem Überlagerungsprinzip ist somit

$$y_{\text{allg}}(x)=C_1x+C_2\frac{1}{x}+\frac{1}{3x^2}+4$$

mit C_1,C_2 als freien Parametern die allgemeine Lösung von $Ly(x)=b(x)$. ■