CARL HANSER VERLAG

Peter Stingl

Operations Research
Linearoptimierung

3-446-22018-6

www.hanser.de

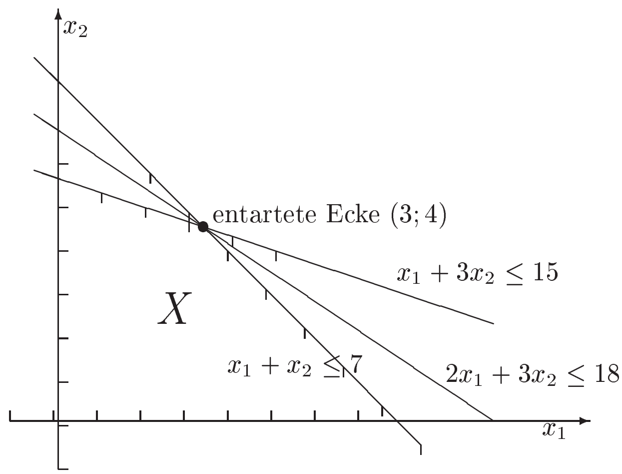

Bild 1.4.2

Aufgaben

1.4.1 Man führe Schlupfvariable ein und bestimme nach dem beschriebenen Verfahren sämtliche Ecken des zulässigen Bereichs

$2x_1 + x_2 \leq 800, \quad 4x_1 + 5x_2 \leq 2000, \quad 2x_1 + 5x_2 \leq 1500, \quad x_1, x_2 \geq 0.$

Kennzeichnen Sie für die Ecken BV und NBV!

(a) Wo ist $z_1 = 16x_1 + 32x_2$ maximal?

(b) Wo ist $z_2 = 4x_1 + 3x_2$ maximal?

1.4.2 Man führe Schlupfvariable ein und bestimme nach dem beschriebenen Verfahren sämtliche Ecken des zulässigen Bereichs

$2x_1 + x_2 \leq 700, \quad 4x_1 + 5x_2 \leq 2000, \quad 2x_1 + 5x_2 \leq 1500, \quad x_1, x_2 \geq 0.$

Welche Ecke ist degeneriert? Kennzeichnen Sie hierfür BV und NBV!

1.5 Simplexverfahren

Die Idee dieses von G. B. Dantzig entwickelten Verfahrens ist, nicht alle Ecken von X aufzusuchen, sondern, ausgehend von einer *Startecke* mit einer *Ausgangsbasis* durch *Basistausch* mittels Austauschalgorithmus bzw. Gauß-Jordan-Algorithmus (SWV) zu einer Ecke mit (i. Allg.) besserem Zielfunktionswert fortzuschreiten. Da es nur endlich viele Ecken gibt, erhält man nach endlich vielen Schritten den *optimalen Eckpunkt*.

Wir entwickeln den Algorithmus zunächst an einem Beispiel:

Beispiel 1.5.1

Wir ordnen die Koeffizienten des kanonischen Maximumproblems von Beispiel 1.3.1 (ohne die redundante Bedingung $x_1 < 6$) zu einem *Tableau*:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_3	1	1	1	0	0	10
x_4	5	2	0	1	0	30
x_5	0	1	0	0	0	9
z	-30	-25	0	0	0	0

Dieses Tableau beschreibt die Startecke

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \\ 30 \\ 9 \end{pmatrix} \quad \text{mit } 30x_1 - 25x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 + z = 0$$

Hierbei sind die Strukturvariablen x_1, x_2 NBV, die Schlupfvariablen x_3, x_4, x_5 BV, was in der ersten Spalte des Tableaus angemerkt ist. Die NBV haben in der Ecke $\vec{x}$ den Wert 0, die Werte der BV ergeben sich aus den Nebenbedingungs-Gleichungen, die durch die Zeilen des Tableaus repräsentiert sind. Die Zielfunktionszeile (z-Zeile) beinhaltet die Zielfunktionsgleichung und ganz rechts den aktuellen Zielfunktionswert.
Nach Isolierung der BV ist die Ecke $\vec{x}$ durch folgende Gleichungen beschrieben:

$$\begin{aligned} x_3 &= 10 - x_1 - x_2 \\ x_4 &= 30 - 5x_1 - 2x_2 \\ x_5 &= 9 - x_2 \\ z &= 0 + 30x_1 + 25x_2 \end{aligned}$$

Nun soll ein Basistausch vorgenommen werden: Als neue BV wählt man eine bisherige NBV (mit dem Wert 0), die dann (möglichst stark) positiv werden soll; die größte Verbesserung von z verspricht hier x_1 (da der Koeffizient 30 in der Zielfunktion größer ist als 25); x_2 bleibt NBV und auf dem Wert 0. Man nennt dann die x_1-Spalte die *Pivotspalte* für den Basistausch. Welche bisherige BV wird jetzt NBV? x_1 kann höchstens den Wert $30/5 = 6$ annehmen, wenn keine der Variablen x_3, x_4, x_5 negativ werden soll. Es wird dann $x_4 = 30 - 5 \cdot 6 - 2 \cdot 0 = 0$ und neue NBV; $x_3 = 10 - 6 - 0 = 4, x_5 = 9 - 0 = 9$, bleiben BV.
x_4 soll demnach neue NBV werden; man nennt die x_4-Zeile *Pivotzeile.* Zur Ermittlung der Pivotzeile muss man also die Quotienten $\frac{b_i}{a_{i1}}$, (soweit $a_{i1} > 0$)

vergleichen; ein Index i, für den dieser Quotient minimal wird, kennzeichnet die Pivotzeile; hier ist $i = 2$; die zweite Zeile ist Pivotzeile.
Pivotspalte und Pivotzeile schneiden sich im *Pivot*(*-Element*) („Drehpunkt"), hier $a_{21} = 5$.
Es ist günstig, das Pivotelement im Tableau zu markieren.
Aus $x_4 = 30 - 5x_1 - 2x_2$ errechnen wir $x_1 = \frac{30}{5} - \frac{2}{5}x_2 - \frac{1}{5}x_4$ und substituieren dies in allen übrigen Gleichungen („Austausch"); wir erhalten das neue Tableau; die Pivotzeile wird

$$x_1 + \frac{2}{5}x_2 - \frac{1}{5}x_4 = 6$$

Die erste Zeile wird $\left(6 - \frac{2}{5}x_2 - \frac{1}{5}x_4\right) + x_2 + x_3 = 10$, also $\frac{3}{5}x_2 + x_3 - \frac{1}{5}x_4 = 4$, die dritte Zeile $x_2 + x_5 = 9$ bleibt unverändert, da x_4 nicht vorkommt.
Die Zielfunktionszeile wird $-30(6 - \frac{2}{5}x_2 - \frac{1}{5}x_4) - 25x_2 + z = 0$, also

$$-13x_2 + 6x_4 + z = 180$$

Somit lautet das neue Tableau:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_3	0	$\boxed{\frac{3}{5}}$	1	$-\frac{1}{5}$	0	4
x_1	1	$\frac{2}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	0	6
x_5	0	1	0	0	1	9
z	0	-13	0	6	0	180

Diese Veränderung des Tableaus bedeutet also, dass man

- die Pivotzeile durch den Pivotwert dividiert und dadurch den Pivot zu 1 macht,
- zu den übrigen Zeilen ein derartiges Vielfaches der Pivotzeile addiert, dass dort in der Pivotspalte Nullen entstehen, insgesamt also in der Pivotspalte ein Einheitsvektor entsteht.

Dies ist aber gerade der Schritt des *Gauß-Jordan-Algorithmus*, den man als

- „Ausräumen" der Pivotspalte mit der Pivotzeile als „Arbeitszeile"

bezeichnet.
Durch Vertauschen der Spalten für x_1 und x_4 bringt man das Tableau wieder in die „kanonische" Form

	x_4	x_2	x_3	x_1	x_5	b_i
x_3	$-1/5$	$3/5$	1	0	0	4
x_1	$1/5$	$2/5$	0	1	0	6
x_5	0	1	0	0	1	9
z	6	-13	0	0	0	180

Die zugehörige Ecke ist

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix} \quad \text{mit } 6 \cdot x_4 - 13 \cdot x_2 + z = 6 \cdot 0 - 13 \cdot 0 + z = 180$$

Ein weiterer Austauschschritt erfolgt wegen des Koeffizienten -13 in der Zielfunktionszeile; man macht deswegen die Variable x_2 zur neuen BV (Pivotspalte). Da $\frac{4}{3/5}$ das Minimum der Quotienten $\frac{4}{3/5}$, $\frac{6}{2/5}$, $\frac{9}{1}$ ist, wird x_3 neue NBV (Pivotzeile). Der Gauß-Jordan-Algorithmus führt zu

	x_4	x_2	x_3	x_1	x_5	b_i
x_2	$-\frac{1}{3}$	1	$\frac{5}{3}$	0	0	$\frac{20}{3}$
x_1	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{2}{3}$	1	0	$\frac{10}{3}$
x_5	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{5}{3}$	0	1	$\frac{7}{3}$
z	$\frac{5}{3}$	0	$\frac{65}{3}$	0	0	$\frac{800}{3}$

Die kanonische Form ist

	x_4	x_3	x_2	x_1	x_5	b_i
x_2	$-\frac{1}{3}$	$\frac{5}{3}$	1	0	0	$\frac{20}{3}$
x_1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0	1	0	$\frac{10}{3}$
x_5	$\frac{1}{3}$	$-\frac{5}{3}$	0	0	1	$\frac{7}{3}$
z	$\frac{5}{3}$	$\frac{65}{3}$	0	0	0	$\frac{800}{3}$

Da nun die Koeffizienten der Zielfunktionszeile für die NBV x_3 und x_4 sämtlich positiv sind, würde eine Vergrößerung der Werte der NBV eine Verschlechterung von z mit sich bringen: Das Verfahren hat zu einer Ecke mit optimalem $z = F(\vec{x})$ geführt.

In der Ecke $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10/3 \\ 20/3 \\ 0 \\ 0 \\ 7/3 \end{pmatrix}$ hat z den maximalen Wert $z_{\max} = \frac{800}{3}$. ■

Wir beschreiben nun den *Simplexalgorithmus* für das SMP bzw. das zugehörige kanonische Maximumproblem:

Algorithmus 1.5.1

Start des *Simplexalgorithmus*:

Es liege ein kanonisches Maximumproblem ($b_i \geq 0$, ($i = 1, \ldots, m$)) vor. Für ein Ausgangstableau zur Ecke

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-m} \\ x_{n-m+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

mit dem Zielfunktionswert $z = 0$ sind die Strukturvariablen die NBV, die Schlupfvariablen die BV. Das Ausgangstableau lautet:

	x_1	$\ldots$	x_t	$\ldots$	x_{n-m}	x_{n-m+1}	$\ldots$	x_{n-m+s}	$\ldots$	x_n	b_i
x_{n-m+1}	a_{11}	$\ldots$	a_{1t}	$\ldots$	$a_{1,n-m}$	1	$\ldots$	0	$\ldots$	0	b_1
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
x_{n-m+s}	a_{s1}	$\ldots$	a_{st}	$\ldots$	$a_{s,n-m}$	0	$\ldots$	1	$\ldots$	0	b_s
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
x_n	a_{m1}	$\ldots$	a_{mt}	$\ldots$	$a_{m,n-m}$	0	$\ldots$	0	$\ldots$	1	b_m
z	$-c_1$	$\ldots$	$-c_t$	$\ldots$	$-c_{n-m}$	0	$\ldots$	0	$\ldots$	0	0

Wahl der Pivotspalte:

Ist die Zielfunktionszeile von der Gestalt

$$z \,|\, d_1 \ \ldots\ d_t\ \ldots\ d_{n-m} \,|\, 0\ \ldots\ 0 \,|\, d \quad \text{mit } d_j \geq 0 \ (j = 1, \ldots, n-m)\,,$$

so ist das Verfahren mit der Startecke als Optimallösung beendet: