HANSER

Mathematik für Bauingenieure

Kerstin Rjasanowa

ISBN 3-446-40479-1

Leseprobe

6.7 Der Mittelwertsatz der Differenzialrechnung

Der Mittelwertsatz der Differenzialrechnung hat zentrale Bedeutung für die Differenzial-, aber auch die Integralrechnung. Aus ihm folgt unmittelbar die Existenz einer kritischen Stelle einer differenzierbaren Funktion zwischen zwei Nullstellen. Zwei Schlussfolgerungen für die Integralrechnung werden abgeleitet.

Satz 6.48
Mittelwertsatz der Differenzialrechnung

Eine Funktion f sei über dem Intervall $[a, b]$ differenzierbar. Dann existiert mindestens eine Stelle $\xi \in [a, b]$, sodass gilt

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \tag{6.11}$$

Dieser Satz besitzt folgende geometrische Interpretation: Verbindet man die beiden Endpunkte $P_a(a, f(a))$ und $P_b(b, f(b))$ des Graphen von f auf dem Intervall $[a, b]$, so gibt es eine Stelle $\xi \in [a, b]$, bei der die Tangente an den Graphen der Funktion parallel zur Verbindungsgeraden (Sekanten) $P_a P_b$ verläuft (siehe **Abb. 6.20**). Auf der rechten Seite von (6.11) steht der Anstieg der Verbindungsgeraden, und $f'(\xi)$ ist der Anstieg der Tangenten an den Graphen der Funktion an der Stelle ξ.

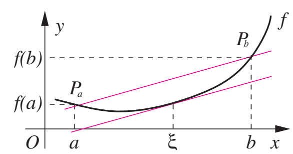


Abb. 6.20 Sekante und Tangente

Der Mittelwertsatz der Differenzialrechnung hat drei unmittelbare Folgerungen.

Satz 6.49
Satz von Rolle

Ist eine Funktion f über dem Intervall $[a, b]$ differenzierbar und gilt $f(a) = f(b) = 0$, so existiert mindestens eine Stelle $\xi \in [a, b]$, sodass gilt $f'(\xi) = 0$.

Der Beweis dieses Satzes ergibt sich unmittelbar aus (6.11). Er bedeutet, dass im Intervall $[a, b]$ mindestens eine kritische Stelle existiert.

Satz 6.50

Ist eine Funktion f über dem Intervall $[a, b]$ differenzierbar und gilt $f'(x) = 0$ für alle $x \in [a, b]$, so ist f über $[a, b]$ konstant. (Verschwindet die Ableitung einer Funktion auf einem Intervall, so handelt es sich um die konstante Funktion.)

Beweis: Für eine beliebige, aber feste Stelle $x_0 \in [a, b]$ und *jede beliebige* weitere Stelle $x \in [a, b]$ existiert nach **Satz 6.49** eine Stelle $\xi \in [x_0, x]$ so, dass

$$f'(\xi) = \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x}.$$

Wegen der Voraussetzung $f'(x) = 0$ für alle $x \in [a, b]$ aus **Satz 6.50** erhält man für *jede beliebige* weitere Stelle $x \in [a, b]$ $f(x) = f(x_0) = const.$ ■

Michel Rolle (* 21. April 1652 in Ambert, Basse-Auvergne, † 8. November 1719 in Paris)

französischer Mathematiker, Mitglied der Académie des Sciences

Grundlagen der Analysis, Diophantische Analysis, algebraische Gleichungen höheren Grades

hier: Satz von Rolle

Satz 6.51 Sind zwei Funktionen f_1 und f_2 über dem Intervall $[a, b]$ differenzierbar und gilt $f_1'(x) = f_2'(x)$ für alle $x \in [a, b]$, so gilt $f_1(x) = f_2(x) + c$ mit $c \in \mathbb{R}$. (Stimmen die Ableitungen zweier Funktionen überein, so unterscheiden sich die Funktionen um eine additive Konstante.)

Der Beweis dieses Satzes ergibt sich unmittelbar aus dem vorhergehenden für $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$. ■

6.8 Taylorpolynome und Funktionsapproximation

Brook Taylor (* 18. August 1685 in Edmonton, Middlesex, England, † 29. Dezember 1731 in Somerset House, London, England)

britischer Mathematiker und Künstler, Sekretär der Royal Society

Taylor-Formel als Basis der Differenzialrechnung, Methode der Finiten Differenzen bei der Berechnung von Oszillationen (vibrierende Saiten), Beschreibung der Grundlagen der perspektivischen Darstellung und des Fluchtpunktes

hier: Taylorpolynom, Taylorreihe

Taylorpolynome werden zur Näherung von komplizierten Funktionen verwendet. Die Berechnung der Ableitungen von Polynomen ist problemlos möglich (siehe **Abschnitt 6.3**), außerdem sind sie unendlich oft differenzierbar. Die Berechnung ihrer Funktionswerte ist (z. B. mit dem Horner-Schema) ebenfalls einfach. Die Koeffizienten des Taylorpolynoms lassen sich mit den Ableitungen der Funktion berechnen. Das Restglied nach Lagrange dient zur Abschätzung des Fehlers bei der Näherung mit dem Taylorpolynom.

Oft erweist sich die Berechnung des Funktionswertes einer Funktion f in der Umgebung einer Stelle x_0 aufwändig. Gesucht wird nach Möglichkeiten, diese Berechnung auf einfachere Art und Weise durchzuführen. Eine dieser Möglichkeiten besteht z. B. darin, den Funktionsverlauf in der Umgebung der Stelle x_0 durch die Tangente an den Funktionsgraphen an der Stelle x_0 mit der Gleichung (vergl. (6.1))

$$g(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

anzunähern. An der Stelle x_0 sind dann Funktionswert der Funktion f und Funktionswert der Tangenten g gleich, in einer Umgebung der Stelle x_0 können sie sich je nach Gestalt der Funktion f unterscheiden. Je weiter man sich von der Stelle x_0 entfernt, desto schlechter nähert die Tangente unter Umständen den Funktionsverlauf.

Die Frage ist daher, ob z. B. ein Polynom höheren Grades (n-ten, $n \geq 2$) besser geeignet für die Näherung ist. Dabei können an ein solches Polynom

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

mit seinen $n+1$ wählbaren Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_n$ folgende $n+1$ Forderungen gestellt werden: Übereinstimmen sollen an der Stelle x_0 sowohl die Funktionswerte von f und P_n als auch die Ableitungen bis zur Ordnung n:

$$\begin{aligned} f(x_0) &= P_n(x_0), \\ f'(x_0) &= P_n'(x_0), \\ &\vdots \\ f^{(n)}(x_0) &= P_n^{(n)}(x_0). \end{aligned} \tag{6.12}$$

Für den Fall $x_0 = 0$ ergeben sich aus (6.12) die Gleichungen

$$\begin{aligned} P_n(0) &= \quad a_0 &&= f(0), \\ P_n'(0) &= \quad a_1 &&= f'(0), \\ P_n''(0) &= \quad 2a_2 &&= f''(0), \\ P_n'''(0) &= 3 \cdot 2 \cdot a_3 &&= f'''(0), \\ &\quad\vdots \\ P_n^{(n)}(0) &= \quad n!\, a_n &&= f^{(n)}(0), \end{aligned}$$

woraus man unmittelbar die Koeffizienten

$$a_0 = f(0),\; a_1 = f'(0),\; a_2 = \frac{1}{2} f''(0),\; a_3 = \frac{1}{6} f'''(0),\; \ldots,\; a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)$$

und damit das approximierende Polynom

$$\begin{aligned} P_n(x) = f(0) &+ \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 \\ &+ \frac{f'''(0)}{3!} x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \end{aligned} \tag{6.13}$$

Taylorpolynom

erhält.

Für den Fall $x_0 \neq 0$ wird die lineare Koordinatentransformation $\tilde{x} = x - x_0$ betrachtet. Bezüglich des neuen Koordinatensystems gewinnt die Funktion f die Getalt $g(\tilde{x})$ mit $f(x) = g(\tilde{x}) = g(x - x_0)$. Die Aufgabe, für die Funktion f ein Näherungspolynom an der Stelle $x = x_0$ zu ermitteln, ist identisch damit, eins für die Funktion $g(\tilde{x}) = g(x - x_0)$ an der Stelle $\tilde{x} = 0$ zu ermitteln. Nach (6.13) lautet es

$$\tilde{P}_n(\tilde{x}) = g(0) + \frac{g'(0)}{1!} \tilde{x} + \frac{g''(0)}{2!} \tilde{x}^2 + \frac{g'''(0)}{3!} \tilde{x}^3 + \cdots + \frac{g^{(n)}(0)}{n!} \tilde{x}^n$$

bzw. mit $\tilde{x} = x - x_0$ und $g(0) = f(x_0)$, $g'(0) = f'(x_0), \ldots,$ $g^{(n)}(0) = f^{(n)}(x_0)$

$$\begin{aligned} \tilde{P}_n(x - x_0) = f(x_0) &+ \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) \\ &+ \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n. \end{aligned} \tag{6.14}$$

Taylorpolynom

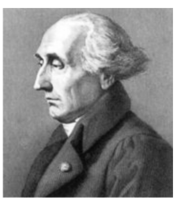
Definition 6.52

Das Polynom $P_n(x) = \tilde{P}_n(x - x_0)$ aus (6.14) heißt **Taylorpolynom der Funktion f an der Stelle $x = x_0$**. Die Stelle x_0 heißt **Entwicklungsstelle**.

Die Güte der Approximation wird bestimmt durch die Differenz von Funktions- und Polynomwert an der Stelle x $f(x) - P_n(x)$, die **Restglied** $R_n(x)$ genannt wird:

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x). \qquad (6.15)$$

Satz 6.53
Restgliedformel von Lagrange



Joseph Louis Lagrange (* 25. Januar 1736 in Turin, † 10. April 1813 in Paris)

britischer Mathematiker und Künstler, Sekretär der Royal Society

Arbeiten zur Analysis (Restglied der Taylor-Formel, Multiplikatorenregel), Variationsrechnung und der Theorie der komplexen Funktionen, Begründer der analytischen Mechanik, Dreikörperproblem der Himmelsmechanik

hier: Restglied von Lagrange

Sei f eine mindestens $(n+1)$-mal differenzierbare Funktion. Dann existiert eine Stelle ξ im Intervall $[x_0, x]$ so, dass gilt

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \text{ mit } \xi \in [x_0, x]. \qquad (6.16)$$

Kann das Restglied abgeschätzt werden (z. B. für alle x aus der zugrunde gelegten Umgebung der Stelle x_0), so erhält man Schranken für den absoluten Fehler beim Ersetzen der Funktion f durch das Näherungspolynom P_n.

Gibt man andererseits einen geforderten maximalen absoluten Fehler vor, so kann der mindestens benötigte Grad n (sowie das Polynom P_n selber) bestimmt werden, das die Funktion f mit diesem maximalen Fehler nähert.

Beispiel 6.54

1. Gesucht sind Näherungspolynome für die Funktion $f(x) = \mathrm{e}^x$ an der Stelle $x_0 = 0$ im Intervall $[-1, 1]$ (siehe **Abb. 6.21**). Mit Gleichung (6.13) findet man

$$P_1(x) = \mathrm{e}^0 + \frac{\mathrm{e}^0}{1!}x = 1 + x,$$

$$P_2(x) = \mathrm{e}^0 + \frac{\mathrm{e}^0}{1!}x + \frac{\mathrm{e}^0}{2!}x^2 = 1 + x + \frac{1}{2}x^2,$$

$$P_3(x) = \mathrm{e}^0 + \frac{\mathrm{e}^0}{1!}x + \frac{\mathrm{e}^0}{2!}x^2 + \frac{\mathrm{e}^0}{3!}x^3 = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3.$$

Für die entsprechenden Restglieder ergeben sich bei $x \in [-1, 1]$ und folglich auch $\xi \in [-1, 1]$ sowie mit $f^{(k)}(x) = \mathrm{e}^x$ mit (6.16) folgende Abschätzungen:

$$|R_1(x)| = \left|\frac{f''(\xi)}{2!}x^2\right| \leq \frac{\mathrm{e}}{2} \approx 1.3591,$$

$$|R_2(x)| = \left|\frac{f'''(\xi)}{3!}x^3\right| \leq \frac{\mathrm{e}}{6} \approx 0.4530,$$

$$|R_3(x)| = \left|\frac{f'''(\xi)}{4!}x^4\right| \leq \frac{\mathrm{e}}{24} \approx 0.1132.$$

Mit steigendem Grad des Taylorpolynoms wird die Approximation auf dem Intervall $[-1, 1]$ besser. Die Restgliedabschätzungen bestätigen die graphischen Resultate.

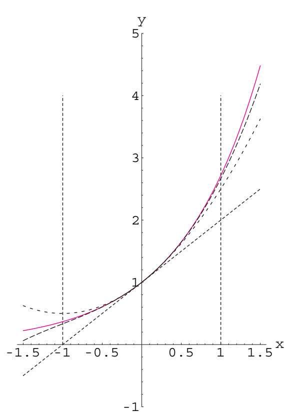


Abb. 6.21 $f(x) = \mathrm{e}^x$ und Taylorpolynome für $x_0 = 0$

2. Zerlegt werden soll die Funktion $f(x) = \mathrm{e}^x$ an der Stelle $x_0 = 1$ im Intervall $[-1, 2]$ (siehe **Abb. 6.22**). Mit Gleichung (6.14) findet man

$$P_1(x) = f(1) + \frac{f'(1)}{1!}(x-1) = \mathrm{e} + \mathrm{e}(x-1),$$

$$P_2(x) = P_1(x) + \frac{f'(1)}{2!}(x-1)^2 = \mathrm{e} + \mathrm{e}(x-1) + \frac{1}{2}\mathrm{e}(x-1)^2,$$

$$P_3(x) = P_2(x) + \frac{f'(1)}{3!}(x-1)^3 = \mathrm{e} + \mathrm{e}(x-1) + \frac{1}{2}\mathrm{e}(x-1)^2 + \frac{1}{6}\mathrm{e}(x-1)^3,$$

und für die entsprechenden Restglieder ergeben sich mit $\xi \in [1, x]$, $x \in [-1, 2]$ die Abschätzungen

$$|R_1(x)| = \left|\frac{f''(\xi)}{2!}x^2\right| \le \frac{\mathrm{e}^2}{2} \cdot 4 = 2\mathrm{e}^2 \approx 14.7781,$$

$$|R_2(x)| = \left|\frac{f'''(\xi)}{3!}x^3\right| \le \frac{\mathrm{e}^2}{6} \cdot 8 = \frac{4}{3}\mathrm{e}^2 \approx 9.8520,$$

$$|R_3(x)| = \left|\frac{f'''(\xi)}{4!}x^4\right| \le \frac{\mathrm{e}^2}{24} \cdot 16 = \frac{2}{3}\mathrm{e}^2 \approx 4.9260.$$

3. Zerlegt werden soll die Funktion $f(x) = 7x^2 - 5x + 4$ (Polynom 2. Grades) an der Stelle $x = 4$ in ein Taylorpolynom 2. Grades.
   Mit Gleichung (6.14) findet man

$$P_2(x) = f(4) + \frac{f'(4)}{1!}(x-4) + \frac{f''(4)}{2!}(x-4)^2.$$

   Mit $f(4) = 96$, $f'(4) = 51$, $f''(4) = 14$ ergibt sich das Taylorpolynom

$$P_2(x) = 96 + 51(x-4) + 7(x-4)^2,$$

   und da das Restglied $R_2(x)$ gleich 0 ist (die dritte Ableitung eines Polynoms 2. Grades ist identisch 0), gilt sogar $P_2(x) = f(x)$, d. h. das Taylorpolynom ist exakt die Funktion f.
   Diese Zerlegung ist z. B. sinnvoll, wenn Funktionswertberechnungen in einer Umgebung der Zerlegungsstelle erfolgen. So ergibt sich z. B. an der Stelle $x = 4.1$ mit dem Taylorpolynom $f(4.1) = P_2(4.1) = 96 + 5.1 + 0.07 = 101.17$. Die Berechnung ist stabiler (da kleinere Zahlen auftreten) und schneller als diejenige nach der ursprünglichen Funktionsgleichung.

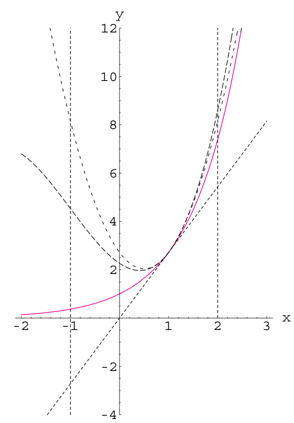


Abb. 6.22 $f(x) = \mathrm{e}^x$ und Taylorpolynome für $x_0 = 1$

Beispiel 6.55

Berechnung von Absteckungspunkten mit dem Taylorpolynom

Bei der Berechnung von Absteckungspunkten auf einem Kreis mit dem Radius r und dem Mittelpunkt $M(0, r)$ (siehe **Abschnitt 4.4.4**) werden bei gegebener x-Koordinate ihre y-Koordinaten y_1 bzw. y_2 aus der Kreisgleichung

$$y_1(x) = r - \sqrt{r^2 - x^2} \qquad \text{bzw.} \qquad y_2(x) = r + \sqrt{r^2 - x^2}$$

berechnet. Für kleine x kann dabei das Taylorpolynom 2. Grades mit der Zerlegungsstelle 0 verwendet werden. Es ist

$$y_1(x) \approx y_1(0) + y_1'(0)x + 0.5y_1''(0)x^2.$$

Mit den Ableitungen

$$y_1'(x) = x/\sqrt{r^2 - x^2}, \qquad y_1'(0) = 0,$$
$$y_1''(x) = r^2/\left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)^3, \quad y_1''(0) = 1/r$$

ergibt sich

$y_1(x) \approx x^2/(2r)$.

Analog erhält man

$y_2(x) \approx 2r - x^2/(2r)$.

Bemerkung 6.56 Nicht für alle Funktionen f wird das Restglied R_n mit steigendem n kleiner.

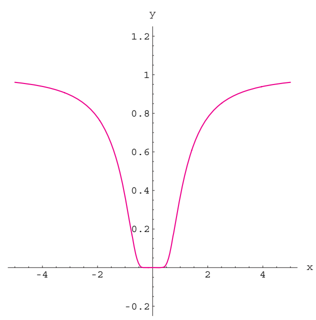


Abb. 6.23 $f(x) = \mathrm{e}^{-1/x^2}$

Beispiel 6.57

Die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-1/x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

(siehe **Abb. 6.23**) hat die Eigenschaft, dass an der Stelle $x_0 = 0$ sämtliche Ableitungen verschwinden, d. h. es gilt $f^{(k)}(0) = 0, k > 0$. Daher ist *jedes* Taylorpolynom P_n für diese Funktion mit der Zerlegungsstelle $x_0 = 0$ identisch Null, unabhängig von seinem Grad n. Die Funktionswerte von f sind aber bis auf die Stelle $x = 0$ von Null verschieden. Das Restglied R_n als Differenz von Funktions- und Polynomwert (siehe (6.15)) ist daher bis auf die Stelle $x = 0$ verschieden von Null und konstant.

Bemerkung 6.58 Lässt sich zeigen, dass für eine beliebig oft differenzierbare Funktion f gilt

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0,$$

so erhält man aus (6.15)

$$\lim_{n\to\infty} f(x) = \lim_{n\to\infty} P_n(x) + \lim_{n\to\infty} R_n(x) \text{ bzw.}$$

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} P_n(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \text{ oder einfach}$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k.$$

Dieser Term wird **Taylorreihe** der Funktion f an der Stelle $x = x_0$ genannt.

Taylorreihe

Beispiel 6.59

Für die Funktion $f(x) = \mathrm{e}^x$ ergibt sich die Taylorreihenzerlegung

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

Das Restglied für das Taylorpolynom P_n lautet nach (6.16) $R_n(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{\xi}}{(n+1)!}x^{n+1}$. Es konvergiert für jedes x gegen 0.