HANSER

Mathematik für Bauingenieure

Kerstin Rjasanowa

ISBN 3-446-40479-1

Leseprobe

Für die Mantelfläche O_y des Rotationskörpers, der bei der Rotation derselben Kurve um die y-Achse entsteht, folgt nach analogen Überlegungen

$$O_y = 2\pi \int\limits_{y_A}^{y_B} \varphi(y)\sqrt{1+(\varphi'(y))^2}\,\mathrm{d}y, \tag{7.40}$$

wobei $\varphi(y) = f^{-1}(y)$ die Umkehrfunktion von f ist und $y_A = f(x_A)$, $y_B = f(x_B)$ die Integrationsgrenzen sind bzw. im Falle der **Parameterdarstellung** $x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ t \in [t_A, t_B]$

$$O_y = 2\pi \int\limits_{t_A}^{t_B} \varphi(t)\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2}\,\mathrm{d}t.$$

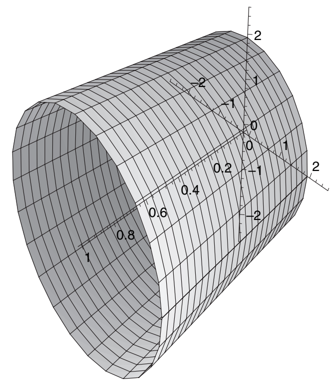

Abb. 7.17 a) Mantelfläche bei Rotation von $f(x) = 0.5x + 2$

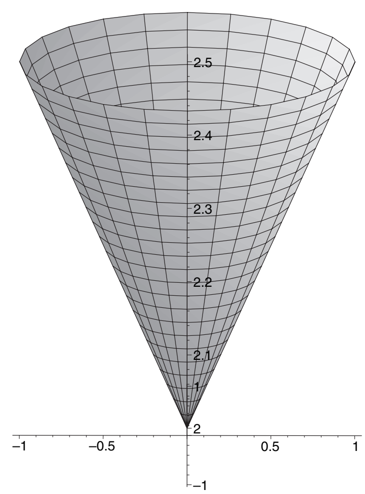

Abb. 7.17 b) Mantelfläche bei Rotation von $\varphi(y) = 2(y-2)$

Beispiel 7.25

Gesucht sind die Mantelflächen des Kegelstumpfes bzw. Kegels, die bei der Rotation des Graphen der linearen Funktion $f(x) = 0.5x + 2,\ x \in [0, 1]$ um die x-Achse bzw. um die y-Achse entstehen (siehe **Abb. 7.17 a), b)**).

Mit Gleichung (7.39) erhält man

$$O_x = \sqrt{5}\pi \int\limits_0^1 (0.5x+2)\,\mathrm{d}x = \sqrt{5}\pi\left[0.25x^2+2x\right]_0^1 = 2.25\sqrt{5}\pi.$$

Die Umkehrfunktion von $y = f(x) = 0.5x + 2,\ x \in [0, 1]$ ist $\varphi(y) = 2(y-2)$, $y \in [2, 2.5]$. Damit ergibt sich aus (7.40)

$$O_y = 2\sqrt{5}\pi \int\limits_2^{2.5} 2(y-2)\,\mathrm{d}x = 4\sqrt{5}\pi\left[y^2-2y\right]_2^{2.5} = 0.5\sqrt{5}\pi.$$

7.9.4 Momente und Schwerpunkte

Masse und Schwerpunkt eines Balkens

Ausgangssituation

Berechnet werden sollen Masse und Schwerpunkt eines Balkens mit inhomogener Masseverteilung.

Lösungsweg

Ein Koordinatensystem wird so gewählt, dass der Balken auf seiner x-Achse im Intervall $[x_A, x_B]$ liegt. Seine lineare Masseverteilung ist durch die Funktion $\rho(x)$ gegeben. Der Beitrag ΔM, den das Segment Δx an der Stelle x zur Gesamtmasse M des Balkens liefert, berechnet sich

$$\Delta M = \rho(x)\Delta x,$$

sodass sich seine Gesamtmasse wie folgt ergibt:

Ergebnis

$$M = \int_{x_A}^{x_B} \rho(x)\,\mathrm{d}x. \tag{7.41}$$

Ausgangssituation

Der Schwerpunkt x_S eines Punkt-Masse-Systems von n Massen m_i, die sich an den Stellen $x_i,\ i = 1, 2, ..., n$ befinden, berechnet sich nach der Gleichung

Lösungsweg

$$x_s = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}. \tag{7.42}$$

Unterteilt man den Balken durch Teilpunkte $x_i, i = 0, 1, 2..., n$ in n Teilstücke der Breite $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i, i = 1, 2, ..., n$, so beträgt die Masse m_i jedes dieser Teilstücke nach Gleichung (7.41)

$$m_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \rho(x)\,\mathrm{d}x = \rho(\xi_i)\,\Delta x_i,\ \xi_i \in [x_i, x_{i+1}],$$

wenn man noch den Mittelwertsatz der Integralrechnung (siehe **Satz 7.5** in **Abschnitt 7.4**) berücksichtigt. Damit ergibt sich

$$\sum_{i=1}^{n} m_i x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i \rho(\xi_i)\,\Delta x_i$$

und nach dem Grenzprozess $\Delta x_i \to 0$ in Gleichung (7.42) für den Schwerpunkt x_s

Ergebnis

$$x_s = \frac{\int_{x_A}^{x_B} x\rho(x)\,\mathrm{d}x}{\int_{x_A}^{x_B} \rho(x)\,\mathrm{d}x}.$$

Gesamtkraft

Ist für einen Balken (s. o.) eine Lastverteilung $q(x)$ (Elementlast bzw. Streckenlast) gegeben, so errechnet sich die Gesamtlast Q, die auf den Balken einwirkt, als

Ergebnis

$$Q = \int_{x_A}^{x_B} q(x)\,\mathrm{d}x.$$

Statische Momente

Ausgangssituation

Berechnet werden soll das statische Moment einer **Fläche** der Dichte 1 bezüglich der y-Achse (**Flächenmoment 1. Grades**), die vom Graphen einer Funktion f, der x-Achse und den Geraden $x = x_A$, $x = x_B$ begrenzt wird (siehe **Abb. 7.18 a), b)**).

Lösungsweg

Der Beitrag ΔM_y, den das Flächenstück der Breite Δx an der Stelle x zu diesem Moment liefert, berechnet sich näherungsweise als Produkt seiner Masse $f(x)\ \Delta x$ und seines Abstandes x von der Bezugsachse (siehe **Abb. 7.18 a)**):

$$\Delta M_y = x f(x)\ \Delta x.$$

Damit ergibt sich für das Gesamtmoment M_y

Ergebnis

$$M_y = \int\limits_{x_A}^{x_B} x f(x)\ \mathrm{d}x. \qquad (7.43)$$

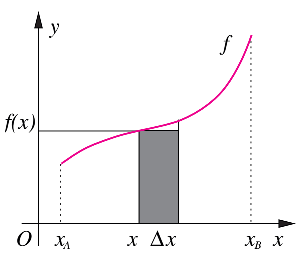

Abb. 7.18 a) Statisches Moment bezüglich y-Achse

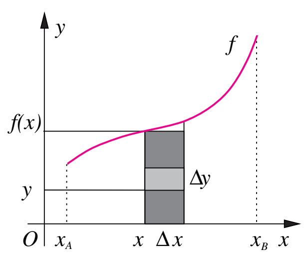

Abb. 7.18 b) Statisches Moment bezüglich x-Achse

Bei der Berechnung des statischen Moments einer **Fläche** der Dichte 1 bezüglich der x-Achse (**Flächenmoment 1. Grades**) wird zuerst der Beitrag ΔM_x, den das Flächenstück der Breite Δx an der Stelle x zu diesem Moment liefert, ermittelt. Der Anteil des Flächenstücks der Höhe Δy im Abstand y von der Bezugsachse an ΔM_x beträgt $y \Delta y \Delta x$ (siehe **Abb. 7.18 b)**). Das Aufsummieren (Integrieren) in den Grenzen von 0 bis $f(x)$ liefert

$$\Delta M_x = \int\limits_0^{f(x)} y\ \mathrm{d}y\ \Delta x = \frac{1}{2}(f(x))^2\ \Delta x.$$

Damit erhält man für das Gesamtmoment M_x

Ergebnis

$$M_x = \frac{1}{2}\int\limits_{x_A}^{x_B} (f(x))^2\ \mathrm{d}x. \qquad (7.44)$$

Ausgangssituation Bei der Berechnung des statischen Moments einer **Kurve** $y = f(x)$, $x \in [x_A, x_B]$ der Dichte 1 bezüglich der x-Achse wird wieder zunächst der

Lösungsweg Beitrag ΔM_x, den das Kurvenstück Δx an der Stelle x zum Gesamtmoment M_x liefert, ermittelt. Sein Abstand zur Bezugsachse beträgt näherungsweise $f(x)$ und seine Masse $\Delta s = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$. Damit wird

$$\Delta M_x = f(x)\,\Delta s$$

und mit dem Grenzübergang $\Delta x \longrightarrow 0$ (siehe auch (7.38))

Ergebnis

$$M_x = \int_{x_A}^{x_B} f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x. \qquad (7.45)$$

Analog erhält man

$$M_y = \int_{x_A}^{x_B} x\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x \qquad (7.46)$$

als statisches Moment der Kurve bezüglich der y-Achse.

Das statische Moment eines **Rotationskörpers** bezüglich der y-Achse, der bei der Rotation des Graphen einer stetigen Funktion $y = f(x)$ über dem Intervall $[x_A, x_B]$ um die x-Achse entsteht, berechnet sich als

Ergebnis

$$M_y = \pi \int_{x_A}^{x_B} x(f(x))^2\,\mathrm{d}x. \qquad (7.47)$$

Flächenmomente 1. Grades

Beispiel 7.26

Gesucht sind die Flächenmomente 1. Grades der Fläche bezüglich der x- und y-Achse, die der Graph der Funktion $f(x) = \sin x,\ x \in [0, \pi]$ mit der x-Achse einschließt (siehe **Abb. 7.19**).

Mit Gleichung (7.43) erhält man

$$M_x = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} (\sin x)^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{4}.$$

Aus Gleichung (7.44) ergibt sich

$$M_y = \int_0^{\pi} x\sin x\,\mathrm{d}x = [-x\cos x + \sin x]_0^{\pi} = \pi.$$

Das unbestimmte Integral $\int x\sin x\,\mathrm{d}x$ kann mit der partiellen Integration ermittelt werden.

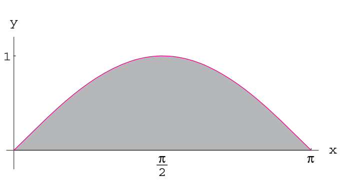

Abb. 7.19 Fläche unter $f(x) = \sin x, x \in [0, \pi]$

Schwerpunkte

Nach der Definition des Schwerpunktes eines Massensystems ist das statische Moment einer verteilten Masse gleich dem statischen Moment der im Schwerpunkt konzentrierten Gesamtmasse, bezogen auf dieselbe Achse. Der Schwerpunkt eines Massensystems wird daher auch als Massenmittelpunkt bezeichnet.

Ausgangssituation

Damit ergeben sich für die Koordinaten x_S und y_S des Schwerpunktes einer **Fläche**, die vom Graphen einer Funktion f, der x-Achse und den Geraden $x = x_A$, $x = x_B$ begrenzt wird,

Ergebnis

$$x_S = \frac{M_y}{F} \quad \text{und} \quad y_S = \frac{M_x}{F}, \tag{7.48}$$

wobei M_y und M_x die statischen Momente der Fläche bezüglich der y- bzw. x-Achse aus den Gleichungen (7.43), (7.44) sind und F der Flächeninhalt dieser Fläche aus der Gleichung (7.33) ist.

Die Koordinaten x_S, y_S des Schwerpunktes einer **Kurve** $y = f(x)$, $x \in [x_A, x_B]$, errechnen sich analog zu

Ergebnis

$$x_S = \frac{M_y}{l} \quad \text{und} \quad y_S = \frac{M_x}{l}, \tag{7.49}$$

wobei M_y und M_x die statischen Momente der Kurve bezüglich der y- bzw. x-Achse aus den Gleichungen (7.45), (7.46) sind und l die Länge der Kurve aus der Gleichung (7.31) ist.

Die Koordinate x_S des Schwerpunktes $S(x_S, y_S, z_S)$ eines **Rotationskörpers**, der bei der Rotation des Graphen einer stetigen Funktion $y = f(x)$ über dem Intervall $[x_A, x_B]$ um die x-Achse entsteht, berechnet sich als

Ergebnis

$$x_S = \frac{M_y}{V_x},$$

wobei M_y sein statisches Moment bezüglich der y-Achse aus der Gleichung (7.47) und V_x sein Volumen aus der Gleichung (7.37) ist. Die Koordinaten y_S und z_S von S sind aus Symmetriegründen gleich Null.