HANSER

Günther Kurz, Heide Hübner

Prüfungs- und Testaufgaben zur PHYSIK

Mechanik - Schwingungslehre - WärmelehreInteraktive Lernmaterialien zum Selbststudium für technische Studienrichtungen an Hochschulenfür technische Studienrichtungen an Hochschulen

ISBN-10: 3-446-40710-3
ISBN-13: 978-3-446-40710-7

Leseprobe

4 Beispiele für Musterlösungen

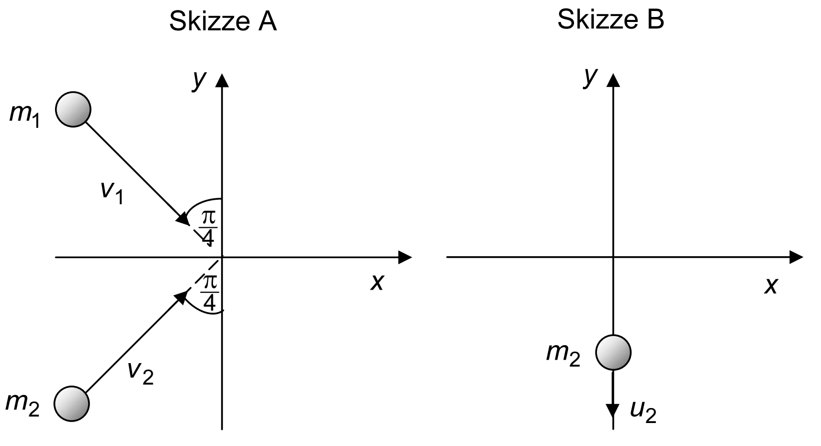
Im Folgenden finden Sie beispielhaft für jeweils eine Prüfungsaufgabe aus den Teilbereichen „Mechanik“, „Schwingungslehre“ und „Wärmelehre“ eine ausführliche Musterlösung.

Musterlösungen für sämtliche Prüfungsaufgaben finden Sie auf der CD-ROM.

4.1 Musterlösung Mechanik

Prüfungsaufgabe 15

Zwei Körper '1' und '2' gleicher Masse ($m_1 = m_2 = m$) stoßen in der gezeichneten Geometrie nach Skizze A zusammen. Vor dem Stoß sind die Beträge ihrer Geschwindigkeiten mit $v_1 = v_2 = v = 10\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ ebenfalls gleich. Nach dem Stoßvorgang bewegt sich Körper '2' mit der Geschwindigkeit $u_2 = 5\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ in der in Skizze B gezeichneten Richtung.

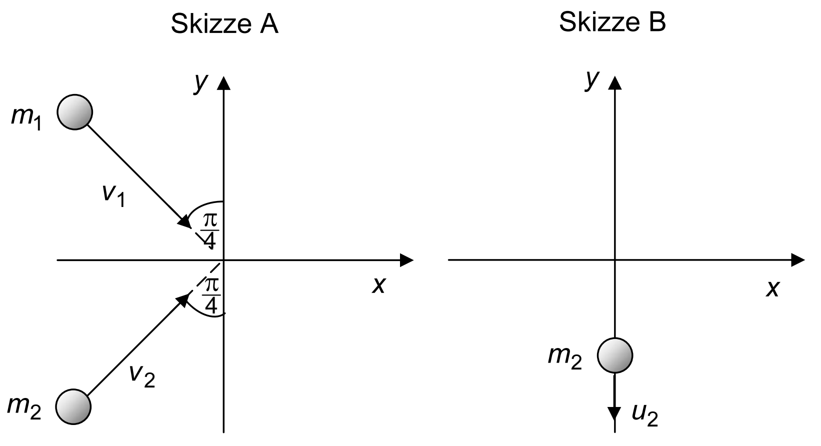


(a) Bestimmen Sie die Geschwindigkeit u_1 des Körpers '1' – Betrag und Richtung – nach dem Stoß?

(b) Wie ist der Stoßvorgang zu klassifizieren? Bestimmen Sie dazu die kinetischen Energien vor und nach dem Stoß. Wurden kinetische Energien in nicht-mechanische Energieformen umgesetzt oder wurde bei diesem Stoßprozess Energie zugeführt?

Musterlösung

Variante 1: Überlegungen aus Forderungen der Geometrie



Bei Stoßprozessen zweier Körper in der Ebene sind zur Bestimmung der beiden Geschwindigkeiten nach dem Stoß vier Gleichungen notwendig um jeweils die zwei Geschwindigkeitskomponenten eines Körpers festzulegen.

Zur Bestimmung der vier Geschwindigkeitskomponenten stehen die zwei Beziehungen des Impulserhaltungssatzes für die beiden kartesischen Komponenten zur Verfügung. Dazu kommen zwei Aussagen über die Bewegung des Körpers '2' nach dem Stoßprozess, nämlich seine Richtung (in die negative *y*-Richtung) und der Betrag seiner Geschwindigkeit u_2.

Zwei Aussagen zur Physik des Stoßes sind sofort möglich

(1) Aussage über die *x*-Komponenten

Körper '1' muss die *x*-Komponente des Gesamtimpulses nach dem Stoß mitnehmen, weil Körper '2' nach dem Stoß in die negative *y*-Richtung fliegt und damit sein Impuls keine x-Komponente hat.

Die Geschwindigkeiten der beiden Körper vor dem Stoß in *x*-Koordinatenrichtung sind nach Skizze A mit $v_1 = v_2 = v$

$$v_{1x} = v \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\, v$$

$$v_{2x} = v \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\, v$$

Die Impulskomponente in *x*-Richtung des Systems vor dem Stoß

$$p_{\text{ges,x}} = m\, v_{1x} + m\, v_{2x}$$

wird von Körper '1' nach dem Stoß 'mitgenommen', also

$$m\, u_{1x} = p_{\text{ges,x}}$$

Gleichsetzen liefert

$$m\,v_{1x} + m\,v_{2x} = m\,u_{1x}$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{2}\,v + \frac{1}{2}\sqrt{2}\,v = u_{1x}$$

und schließlich

$$u_{1x} = \sqrt{2}\,v = 14{,}1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$$

(2) Aussage über die *y*-Komponente

In *y*-Richtung ist die Impulskomponente vor dem Stoß gleich null. Deshalb muss Körper '1' beim Stoß einen Impuls in positive *y*-Richtung mitnehmen, der betragsmäßig der Impulskomponente des Körpers '2' in negative Koordinatenrichtung gleich ist.

$$m\,u_{1y} + m\,u_{2y} = m\,u_{1y} + m\,u_2 = 0$$

$$u_{1y} + u_2 = 0$$

$$u_{1y} = -u_2 = -(-5{,}0\,\mathrm{m\,s^{-1}})$$

$$= 5{,}0\,\mathrm{m\,s^{-1}}$$

Aus den Komponenten der Geschwindigkeiten von Körper '1' nach dem Stoß ergeben sich der **Betrag der Geschwindigkeit** u_1 und die **Richtung des Geschwindigkeitsvektors** $\vec{u}_1$.

Der Betrag der Geschwindigkeit u_1 ergibt sich aus den beiden Komponenten im rechtwinkligen Dreieck (PYTHAGORAS)

$$u_1^2 = u_{1x}^2 + u_{1y}^2 = 2v^2 + u_2^2 = 200\,\mathrm{m^2\,s^{-2}} + 25\,\mathrm{m^2\,s^{-2}}$$

$$= 225\,\mathrm{m^2\,s^{-2}}$$

und

$$u_1 = 15\,\mathrm{m\,s^{-1}}$$

Für die Richtung des Geschwindigkeitsvektors von Körper '1' nach dem Stoß ergibt sich die trigonometrische Beziehung

$$\tan\varphi = \frac{u_{1y}}{u_{1x}} = \frac{5{,}0\,\mathrm{m\,s^{-1}}}{14{,}1\,\mathrm{m\,s^{-1}}} = 0{,}35$$

also

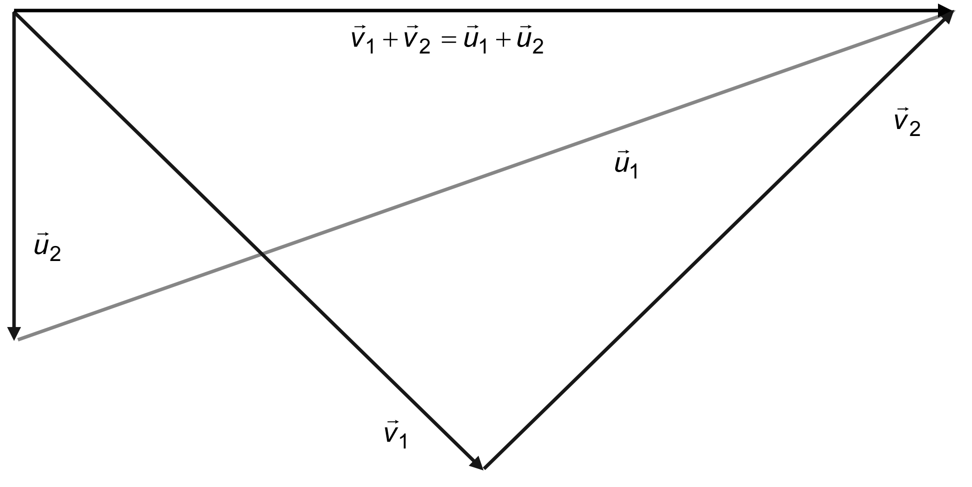
$$\varphi = 19{,}5^{\circ}$$

Variante 2: Grafische Lösung (Vereinfachung wegen gleicher Massen)

Das Problem kann auch grafisch gelöst werden. Da die Massen der beiden Stoßpartner gleich sind, kann von 'Impuls' einfach auf 'Geschwindigkeiten' übergegangen werden. Die Addition der Geschwindigkeiten erfolgt nach der Parallelogrammregel.

Es gilt bei gleichen Massen

$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$$



Variante 3:

Sture Bearbeitung in ausführlicher Schreibweise in *x*- und *y*-Komponente.

Impulserhaltung für die beiden Koordinatenrichtungen liefert

- Für die *x*-Koordinatenrichtung

  $$m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} = m_1 u_{1x} + m_2 u_{2x}$$

- für die *y*-Koordinatenrichtung

  $$m_1 v_{1y} + m_2 v_{2y} = m_1 u_{1y} + m_2 u_{2y}$$

- dazu kommen die speziellen Bedingungen

  $$m_1 = m_2 = m$$

  $$v_1 = v_2 = v$$

Die geometrischen Bedingungen (Skizze A) vor dem Stoß liefern für die Komponenten

$$v_{1x} = v \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\, v$$
$$v_{1y} = -v \cos\frac{\pi}{4} = -\frac{1}{2}\sqrt{2}\, v$$
$$v_{2x} = v \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\, v$$
$$v_{2y} = v \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\, v$$

Die geometrischen Bedingungen (Skizze B) nach dem Stoß liefern für die Komponenten

$$u_{2x} = 0$$
$$u_{2y} = -u_2$$

Einsetzen dieser Werte in obige Gleichungen liefern:

- Für die x-Koordinatenrichtung

  $$m\frac{1}{2}\sqrt{2}\, v + m\frac{1}{2}\sqrt{2}\, v = m\, u_{1x} + 0$$

  also

  $$u_{1x} = \sqrt{2}\, v = 14{,}1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$$

- Für die y-Koordinatenrichtung

  $$-m\frac{1}{2}\sqrt{2}\, v + m\frac{1}{2}\sqrt{2}\, v = m\, u_{1y} + m\, u_2$$
  $$0 = u_{1y} + u_2$$
  $$u_{1y} = -u_2 = -(-5{,}0\,\mathrm{m\,s^{-1}})$$
  $$= 5{,}0\,\mathrm{m\,s^{-1}}$$

Aus den Komponenten der Geschwindigkeiten von Körper '1' nach dem Stoß ergeben sich der Betrag der Geschwindigkeit u_1 und die Richtung des Geschwindigkeitsvektors $\vec{u}_1$ identisch zur Berechnung in Variante 1, also

Der Betrag der Geschwindigkeit u_1 ergibt sich aus den beiden Komponenten im rechtwinkligen Dreieck (PYTHAGORAS)

$$u_1^2 = u_{1x}^2 + u_{1y}^2 = 2v^2 + u_2^2 = 200\,\mathrm{m^2\,s^{-2}} + 25\,\mathrm{m^2\,s^{-2}}$$
$$= 225\,\mathrm{m^2\,s^{-2}}$$

und

$$u_1 = 15\,\mathrm{m\,s^{-1}}$$

Für die Richtung des Geschwindigkeitsvektors von Körper '1' nach dem Stoß ergibt sich die trigonometrische Beziehung

$$\tan\varphi = \frac{u_{1y}}{u_{1x}} = \frac{5{,}0\,\mathrm{m\,s^{-1}}}{14{,}1\,\mathrm{m\,s^{-1}}} = 0{,}35$$

also

$$\varphi = 19{,}5^{\circ}$$

(b) Für einen schiefen Stoß in einer Ebene müssen zur Klassifikation elastisch/inelastisch/vollständig inelastisch ('plastisch') die kinetischen Energien der Translation vor und nach dem Stoß miteinander verglichen werden.

Es gilt

$$E_{\mathrm{kin}}^{\mathrm{trans}}(\mathrm{vor}) = E_{\mathrm{kin}}^{\mathrm{trans}}(\mathrm{nach}) + Q_{\mathrm{Verlust}}$$

Ein Stoßvorgang ist vollständig elastisch, wenn $Q_{\mathrm{Verlust}} = 0$ und inelastisch, wenn $Q_{\mathrm{Verlust}} \neq 0$ ist.

Mit den Ergebnissen der Teilaufgabe (a) erhält man für die kinetischen Energien vor und nach dem Stoßprozess

$$E_{\mathrm{kin}}^{\mathrm{trans}}(\mathrm{vor}) = \frac{1}{2}m_1 v_1^{\,2} + \frac{1}{2}m_2 v_2^{\,2} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}mv^2 = m(10\,\mathrm{ms^{-1}})^2$$
$$= m(100\,\mathrm{m^2\,s^{-2}})$$

$$E_{\mathrm{kin}}^{\mathrm{trans}}(\mathrm{nach}) = \frac{1}{2}mu_1^{\,2} + \frac{1}{2}mu_2^{\,2} = \frac{1}{2}m\,[(15\,\mathrm{m\,s^{-1}})^2 + (5\,\mathrm{m\,s^{-1}})^2]$$
$$= \frac{1}{2}m\,(225\,\mathrm{m^2\,s^{-2}} + 25\,\mathrm{m^2\,s^{-2}}) = \frac{1}{2}m\,(250\,\mathrm{m^2\,s^{-2}})$$
$$= m\,(125\,\mathrm{m^2\,s^{-2}})$$

Ein Vergleich liefert

$$E_{\mathrm{kin}}^{\mathrm{trans}}(\mathrm{nach}) = m\,(125\,\mathrm{m^2\,s^{-2}}) > E_{\mathrm{kin}}^{\mathrm{trans}}(\mathrm{vor}) = m(100\,\mathrm{m^2\,s^{-2}})$$

Die Massen müssen für diesen Vergleich gar nicht explizit bekannt sein.

Die kinetischen Energien der beiden Körper nach dem Stoß sind größer als diejenigen vor dem Stoß. Beim Stoßvorgang wurde Energie zugeführt; der Stoßvorgang ist inelastisch.