HANSER

Physik für Wirtschaftsingenieure

Christopher Dietmaier, Matthias Mändl

ISBN 3-446-22373-8

Leseprobe

2 Mechanik

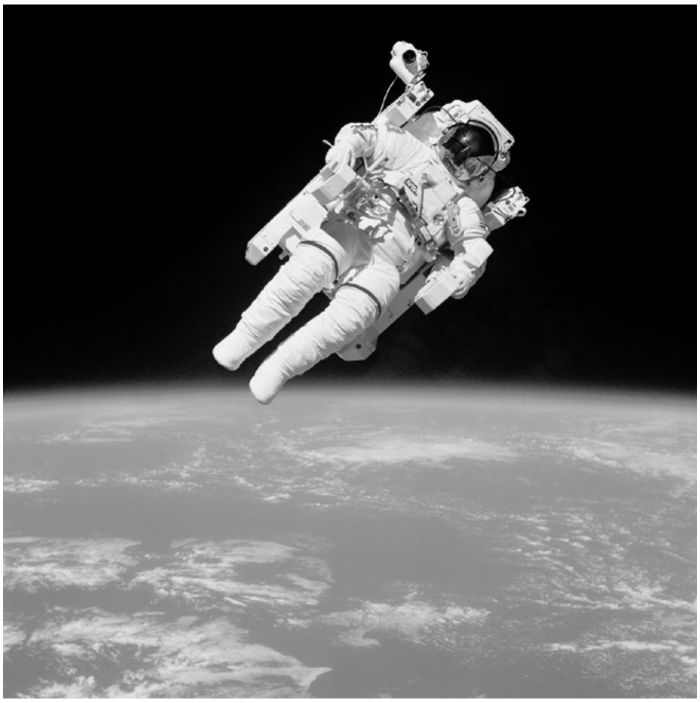

Bild 2.1 Bewegung eines Astronauten unter dem Einfluss der Gravitation auf einer Kreisbahn um die Erde [*NASA*]

Die Mechanik beschäftigt sich mit der Bewegung von Körpern unter dem Einfluss von Kräften. Mehr noch als Phänomene aus anderen physikalischen Gebieten (Elektromagnetismus, Thermodynamik, Atomphysik) prägen mechanische Vorgänge unsere Alltagserfahrungen. Wir sind ständig umgeben von Körpern, deren Bewegung wir beobachten. Die Anwendung mechanischer Gesetzmäßigkeiten ist nicht wegzudenken aus Technik und Industrie. Die Untersuchung der Bewegung von Körpern gehört zu den grundlegendsten Gegenständen der Physik. Die Begriffe, Konzepte und Gesetze, die aus dieser Untersuchung hervorgingen (z. B. Geschwindigkeit, Kraft, Energie, Arbeit etc.), spielen für die gesamte Physik eine wichtige Rolle. Bei Körpern unterscheidet man starre und deformierbare Körper. Starre Körper stellen eine Idealisierung dar, welche in vielen Fällen zweckmäßig und gerechtfertigt ist. Eine weitergehende Idealisierung ist die Darstellung eines starren Körpers als Massenpunkt, die dann betrachtet wird, wenn man nur an der Bewegung des Schwerpunktes eines Körpers interessiert ist. Wir wollen in diesem Kapitel die grundlegenden Begriffe, Konzepte und Gesetze der Mechanik darstellen, weshalb wir uns auf die Mechanik der Massenpunkte und der starren Körper beschränken.

2.1 Mechanik der Massenpunkte

Wenn in diesem Abschnitt von Körpern die Rede ist, so sind damit immer Massenpunkte bzw. die Schwerpunkte der Körper gemeint. In der ***Kinematik*** wird die Bewegung von Körpern (Massenpunkten) beschrieben, ohne die Bewegung zu begründen. Die Begründung einer bestimmten Bewegung durch Kräfte und die Frage, wie sich ein Körper unter dem Einfluss von Kräften bewegt, ist Gegenstand der ***Dynamik***.

2.1.1 Kinematik der Massenpunkte

Geradlinige Bewegung

Bewegt sich ein Körper entlang einer Geraden, so kann der Ort des Körpers durch die Position $x(t)$ auf einer Koordinatenachse beschrieben werden, die auf der Geraden liegt. Diese Position ändert sich i. Allg. mit der Zeit und ist damit eine Funktion der Zeit t. Sie heißt Ortsfunktion.

Ortsfunktion	$x(t)$	

Die Geschwindigkeit $v(t)$ gibt an, wie bzw. wie schnell sich der Ort mit der Zeit ändert. Sie ist die Ableitung der Ortsfunktion nach der Zeit t.

Geschwindigkeit	$v(t) = \dot{x}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x(t)$	(2.1)

Die Ableitung nach der Zeit t wird durch einen Punkt (und nicht wie in der Mathematik üblich durch einen Strich) dargestellt. Ändert sich die Geschwindigkeit, so spricht man von Beschleunigung (auch ein Bremsvorgang ist in diesem Sinne eine Beschleunigung). Die Beschleunigung ist die Ableitung der Geschwindigkeit nach der Zeit.

Beschleunigung	$a(t) = \dot{v}(t) = \ddot{x}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} v(t) = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} x(t)$	(2.2)

Aus den Beziehungen (2.1) und (2.2) folgt unmittelbar durch Integration:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(\tau)\mathrm{d}\tau \qquad \text{mit } x_0 = x(t_0) \tag{2.3}$$

$$v(t) = v_0 + \int_{t_0}^{t} a(\tau)\mathrm{d}\tau \qquad \text{mit } v_0 = v(t_0) \tag{2.4}$$

Ist die Geschwindigkeit v konstant, so spricht man von einer ***gleichförmigen Bewegung***. In diesem Fall folgt aus (2.3):

Gleichförmige Bewegung

$$x(t) = x_0 + v(t - t_0) \qquad \text{mit } x_0 = x(t_0) \tag{2.5}$$

Für $t_0 = 0$ wird daraus

$$x(t) = x_0 + vt \qquad \text{mit } x_0 = x(0) \tag{2.6}$$

Ist die Beschleunigung a konstant, so spricht man von einer ***gleichförmig beschleunigten Bewegung***. In diesem Fall folgt aus (2.4):

Gleichförmig beschleunigte Bewegung

$$v(t) = v_0 + a(t - t_0) \qquad \text{mit } v_0 = v(t_0) \tag{2.7}$$

$$x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2 \qquad \text{mit } x_0 = x(t_0) \text{ und } v_0 = v(t_0) \tag{2.8}$$

Für $t_0 = 0$ wird daraus

$$v(t) = v_0 + at \qquad \text{mit } v_0 = v(0) \tag{2.9}$$

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \qquad \text{mit } x_0 = x(0) \text{ und } v_0 = v(0) \tag{2.10}$$

Beispiel 2.1 Bremsen eines Kfz

Wie schnell darf ein Kfz höchstens fahren, wenn der Bremsweg beim Bremsen mit einer konstanten Beschleunigung $a = -10\,\mathrm{m/s^2}$ höchstens $s = 45\,\mathrm{m}$ betragen soll? Ist v_0 die gesuchte Geschwindigkeit und t' die Zeit, bis das Fahrzeug zum Stillstand kommt, so folgen aus (2.9) und (2.10) die Gleichungen $v(t') = v_0 + at' = 0$ und $x(t') = v_0 t' + \frac{1}{2}at'^2 = s$. Auflösen der ersten Gleichung nach t' und Einsetzen in die zweite Gleichung führt zu $-\frac{1}{2}\frac{v_0^2}{a} = s \Rightarrow v_0 = \sqrt{-2as}$. Man erhält die Geschwindigkeit $v_0 = 30\ \mathrm{m/s} = 108\ \mathrm{km/h}$.

Bewegung in Raum

Bewegt sich ein Körper im Raum, so kann der Ort eines Körpers durch die Koordinaten $x(t), y(t), z(t)$ in einem kartesischen Koordinatensystem beschrieben werden. Diese drei zeitabhängigen Koordinaten sind die Komponenten eines Vektors, der Ortsvektor heißt und der den Ort der Körpers angibt.

Ortsvektor	$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$	(2.11)

Die zeitliche Änderung des Ortsvektors wird durch den Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}(t)$ beschrieben.

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}\big(x(t+\Delta t) - x(t), y(t+\Delta t) - y(t), z(t+\Delta t) - z(t)\big) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t))$$

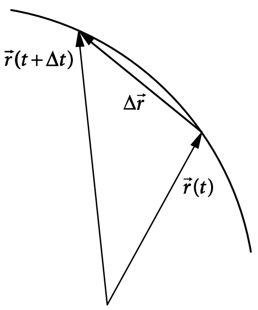

Bild 2.2

Geschwindigkeit	$\vec{v}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)) = (v_x(t), v_y(t), v_z(t))$	(2.12)

Aus Bild 2.2 geht hervor, dass der Geschwindigkeitsvektor tangential zur Bahn gerichtet ist. Die Geschwindigkeit ist die Ableitung des Ortes nach der Zeit t. Sie enthält zwei Informationen: Die Richtung des Vektors $\vec{v}(t)$ gibt die Richtung an, in die sich der Körper bewegt. Der Betrag $v(t)$ des Vektors $\vec{v}(t)$ gibt an, wie schnell sich der Körper auf seiner Bahn bewegt. Die zeitliche Änderung der Geschwindigkeit wird beschrieben durch die Beschleunigung, welche die zeitliche Ableitung der Geschwindigkeit ist.

Beschleunigung

$$\vec{a}(t) = (\dot{v}_x(t), \dot{v}_y(t), \dot{v}_z(t)) = (\ddot{x}(t), \ddot{y}(t), \ddot{z}(t)) = (a_x(t), a_y(t), a_z(t)) \qquad (2.13)$$

Die Beziehungen (2.3) bis (2.10) im eindimensionalen Fall gelten im dreidimensionalen Fall komponentenweise, d. h. jeweils für die x-, y- und z-Komponente, z. B. gilt

$$v_x(t) = v_{x0} + \int_{t_0}^{t} a_x(\tau)\mathrm{d}\tau \qquad \text{mit } v_{x0} = v_x(t_0)$$

$$v_y(t) = v_{y0} + \int_{t_0}^{t} a_y(\tau)\mathrm{d}\tau \qquad \text{mit } v_{y0} = v_y(t_0)$$

$$v_z(t) = v_{z0} + \int_{t_0}^{t} a_z(\tau)\mathrm{d}\tau \qquad \text{mit } v_{z0} = v_z(t_0)$$

Bei konstanter Beschleunigung $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ gilt z. B.

$$x(t) = x_0 + v_{x0}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \qquad \text{mit } x_0 = x(0) \text{ und } v_{x0} = v_x(0) \tag{2.14}$$

$$y(t) = y_0 + v_{y0}t + \frac{1}{2}a_y t^2 \qquad \text{mit } y_0 = y(0) \text{ und } v_{y0} = v_y(0) \tag{2.15}$$

$$z(t) = z_0 + v_{z0}t + \frac{1}{2}a_z t^2 \qquad \text{mit } z_0 = z(0) \text{ und } v_{z0} = v_z(0) \tag{2.16}$$

Diese drei Gleichungen lassen sich zusammenfassen zu der Vektorgleichung

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2 \qquad \text{mit } \vec{r}_0 = \vec{r}(0) \text{ und } \vec{v}_0 = \vec{v}(0) \tag{2.17}$$

Für die zwischen den Zeiten t_1 und t_2 zurückgelegte Strecke s gilt:

$$s = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\mathrm{d}t \qquad \text{mit } v(t) = |\vec{v}(t)| \tag{2.18}$$

$v(t)$ ist der Betrag der Geschwindigkeit:

$$v(t) = |\vec{v}(t)| = \sqrt{v_x^2(t) + v_y^2(t) + v_z^2(t)}$$

Beispiel 2.2 Wurfparabel

Ein Massenpunkt werde vom Anfangsort $\vec{r}(0) = \vec{r}_0 = \vec{0}$ mit der Anfangsgeschwindigkeit $\vec{v}(0) = \vec{v}_0 = (v_{x0}, v_{y0}, 0)$ schräg nach oben geworfen (s. Bild 2.3). Die nach unten gerichtete Schwerkraft bewirkt bei der y-Komponente die Beschleunigung $a_y = g = 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$.

$$\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)=(0,-g,0)\Rightarrow\begin{cases}v_x(t)=v_{x0}\\ v_y(t)=v_{y0}-gt\\ v_z(t)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x(t)=v_{x0}t\\ y(t)=v_{y0}t-\dfrac{1}{2}gt^2\\ z(t)=0\end{cases}$$

Mit den Bezeichnungen $x=x(t)$ und $y=y(t)$ erhält man durch Einsetzen von $t=x/v_{x0}$ in $y=v_{y0}t-\frac{1}{2}gt^2$ die Bahn des Massenpunktes in der Form einer Funktionsgleichung:

$$y=\frac{v_{y0}}{v_{x0}}x-\frac{g}{2v_{x0}^2}x^2$$

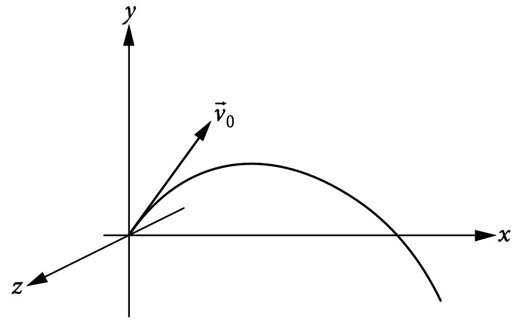

Bild 2.3

Von besonderem Interesse bei Bewegungen in einer Ebene ist die Kreisbewegung. Wir betrachten die Bewegung auf einem Kreis in der Ebene $z=0$ mit Mittelpunkt im Ursprung.

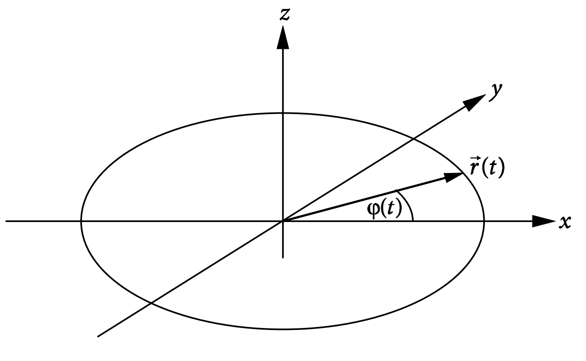

Bild 2.4

Für diese Bewegung gilt (s. Bild 2.4):

$$\vec{r}(t)=(r\cos\varphi(t),r\sin\varphi(t),0)$$
$$\vec{v}(t)=(-\dot{\varphi}(t)r\sin\varphi(t),\dot{\varphi}(t)r\cos\varphi(t),0)=\dot{\varphi}(t)r(-\sin\varphi(t),\cos\varphi(t),0) \tag{2.19}$$

Die Größe $\dot{\varphi}(t)$ heißt ***Winkelgeschwindigkeit***. Sie gibt an, wie schnell sich der Winkel φ ändert.