HANSER

Hans-Jürgen Dobner, Bernd Engelmann

Analysis 1

Grundlagen und Differenzialrechnung

ISBN-10: 3-446-41115-1
ISBN-13: 978-3-446-41115-9

Leseprobe

rungsweise dargestellt werden (Methode der inversen Interpolation). Der Funktionswert $Q_3(0)$ des Polynoms $x = Q_3(y)$ ist dann eine Näherung für die gesuchte Nullstelle. Als Schema der dividierten Differenzen erhält man jetzt:

Ordnung	0	1	2	3
$y_0 = 0.9960$	1.7			
$y_1 = 0.4830$	2.0	-0.5848		
$y_2 = -0.1920$	2.3	-0.4444	-0.1181	
$y_3 = -0.9318$	2.6	-0.4055	-0.02751	-0.04701

Das Polynom

$$x = Q_3(y) = 1.7 - 0.5848(y - 0.996) - 0.1181(y - 0.996)(y - 0.483) \\ - 0.04701(y - 0.996)(y - 0.483)(y + 0.192)$$

besitzt den Funktionswert $Q_3(0) = 2.2213$, der als Näherung der Nullstelle dient. Es ist zu bemerken, dass beide Methoden unterschiedliche Näherungen der Nullstelle liefern. Auf Grund der geringen Information über die Funktion ist natürlich eine Unsicherheit bei der Bestimmung der Nullstelle zu erwarten. ■

6.2 Gebrochenrationale Funktionen

Ebenfalls lediglich auf Basis der mathematischen Grundoperationen sind die gebrochenrationalen Funktionen als Quotient zweier Polynome berechenbar.

Definition 6.3

Ein Ausdruck der Form

$$R(x) = \frac{Q_m(x)}{P_n(x)} = \frac{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0}{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}$$

wird als **gebrochenrational** bezeichnet und eine Funktion $y = f(x) = R(x)$ als gebrochenrationale Funktion. Im Fall $m < n$ spricht man von einem **echt gebrochenrationalen** Ausdruck $R(x)$ und im Fall $m \geq n$ von einem **unecht gebrochenrationalen** Ausdruck.

Bemerkungen: (1) Nullstellen des Nennerpolynoms $P_n(x)$, die nicht gleichzeitig Nullstellen des Zählerpolynoms $Q_m(x)$ sind, werden als **Polstellen** der Funktion bezeichnet und sind Unstetigkeitsstellen. Gemeinsame Nullstellen von $P_n(x)$

und $Q_m(x)$ heißen **Lückenstellen**. Eine Lückenstelle kann durch die stetige Ergänzung der Funktion mit Hilfe des Grenzwertes geschlossen werden (vergleiche dazu Beispiel 5.12). Man spricht von einer hebbaren Unstetigkeitsstelle. Der Definitionsbereich *D* einer derart stetig ergänzten gebrochenrationalen Funktion umfasst somit alle reellen Zahlen *x*, die nicht Polstellen sind.

(2) Ein unecht gebrochenrationaler Ausdruck kann mit Hilfe der **Partialdivision** in die Summe eines ganzrationalen und eines echt gebrochenrationalen Ausdrucks zerlegt werden. Diese Vorgehensweise wird später im Rahmen der Integralrechnung mittels Partialbruchzerlegung verwendet. Das **Grenzverhalten** einer gebrochenrationalen Funktion für $x \to \pm\infty$ wird durch den ganzrationalen Anteil bestimmt, da der echt gebrochenrationale Anteil gegen Null strebt.

Beispiel 6.7

Man untersuche die gebrochenrationale Funktion auf Nullstellen, Polstellen und Lückenstellen und bestimme ihr Verhalten für $x \to \pm\infty$. Die Funktion ist durch $y = f(x) = \dfrac{2x^4 + x^3 - 12x^2 - x + 10}{4x^3 - 14x^2 - 28x - 10}$ gegeben.

Lösung: Zunächst bestimmen wir die Nullstellen von Zähler- und Nennerpolynom. Als mögliche ganzzahlige Werte für Nullstellen kommen die Zahlen $\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10$ in Frage. Mit Hilfe des Horner-Schemas kann man für das Zählerpolynom $x = -1$ und $x = +1$ als Nullstellen bestimmen mit dem Restpolynom $2x^2 + x - 10$, welches die Nullstellen $x = 2$ und $x = -\dfrac{5}{2}$ besitzt. Für das Nennerpolynom bestimmt man $x = -1$ als Nullstelle und erhält als reduziertes Polynom $4x^2 - 18x - 10$ mit den Nullstellen $x = 5$ und $x = -\dfrac{1}{2}$. Damit gilt die Produktdarstellung in Zähler und Nenner

$$y = f(x) = \frac{2(x-1)(x+1)(x-2)\left(x + \frac{5}{2}\right)}{4(x+1)(x-5)\left(x + \frac{1}{2}\right)}.$$

Lückenstelle ist $x = -1$ als gemeinsame Nullstelle von Zähler und Nenner. Nullstellen der Funktion sind somit die Werte $x = +1$, $x = 2$ und $x = -\dfrac{5}{2}$. Polstellen sind Nullstellen des Nenners, die nicht auch Nullstellen des Zählers sind, also $x = 5$, $x = -\dfrac{1}{2}$. Als Grenzwert an der Lückenstelle $x = -1$ erhält man

$$\lim_{x\to -1} f(x) = \lim_{x\to -1} \frac{2(x-1)(x-2)\left(x+\frac{5}{2}\right)}{4(x-5)\left(x+\frac{1}{2}\right)} = \frac{2(-2)(-3)\frac{3}{2}}{4(-6)\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{3}{2}.$$

Mit der Definition $f(-1) = \frac{3}{2}$ ist die Lücke geschlossen und die Funktion stetig ergänzt. Zur Bestimmung des Grenzverhaltens der Funktion für $x \to \pm\infty$ beachten wir, dass der unecht gebrochene Funktionsausdruck in Form einer Summe aus einem Polynom und einem echt gebrochen rationalen Ausdruck dargestellt werden kann. Diese Zerlegung wird mittels Partialdivision berechnet:

$$
\begin{array}{l}
\left(2x^4 + x^3 - 12x^2 - x + 10\right) : \left(4x^3 - 14x^2 - 28x - 10\right) = \frac{1}{2}x + 2 \\
\underline{-\left(2x^4 - 7x^3 - 14x^2 - 5x\right)} \\
\quad 8x^3 + 2x^2 + 4x + 10 \\
\underline{-\left(8x^3 - 28x^2 - 56x - 20\right)} \\
\quad 30x^2 + 60x + 30
\end{array}
$$

Damit gilt $y = f(x) = \frac{1}{2}x + 2 + \frac{15(x^2 + 2x + 1)}{2x^3 - 7x^2 - 14x - 5}$. Für $x \to \pm\infty$ strebt der echt gebrochenrationale Anteil gegen Null, so dass das Grenzverhalten durch den ganzrationalen Anteil beschrieben wird. Die Funktion besitzt somit für $x \to \pm\infty$ die Gerade $y = 0.5x + 2$ als Grenzwertasymptote (siehe Bild 6.1). ■

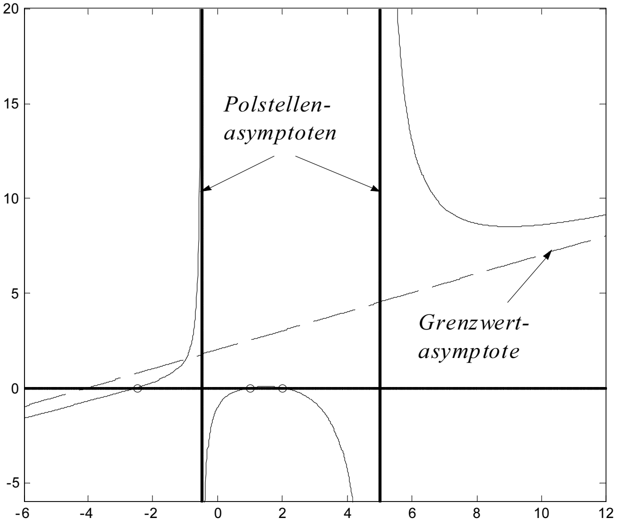

Bild 6.1 Gebrochenrationale Funktion des Beispiels 6.7

6.3 Exponential- und Logarithmusfunktionen

Funktionen, die nicht mit Hilfe der Grundoperationen darstellbar sind, werden als nichtrationale Funktionen bzw.als transzendente Funktionen bezeichnet. Eine wichtige Klasse sind die Exponentialfunktionen und ihre Umkehrfunktionen. Sie beschreiben u. a. Wachstums- und Alterungsprozesse, Aufladevorgänge bei Kondensatoren, Abkling- und Sättigungsverhalten von technischen Prozessen.

Definition 6.4

Die Funktion $y = f(x) = \mathrm{e}^x = \exp(x)$ wird als Exponentialfunktion oder **e-Funktion** und $y = f(x) = a^x$ mit $a > 0,\ a \neq 1$ als **allgemeine Exponentialfunktion** bezeichnet. Sie besitzt den Definitionsbereich $D = R$ und den Wertebereich $W = (0, \infty)$. Für $a > 1$ ist die allgemeine Exponentialfunktion streng monoton steigend und für $0 < a < 1$ streng monoton fallend im gesamten Definitionsbereich, so dass jeweils die Umkehrfunktion existiert. Diese wird als **Logarithmusfunktion** $y = f^{-1}(x) = \log_a x$ zur Basis a bezeichnet. Im Fall $a = \mathrm{e}$ wird die Funktion **natürlicher Logarithmus** genannt $y = f^{-1}(x) = \ln x$

und im Fall $a = 10$ **dekadischer Logarithmus** $y = f^{-1}(x) = \lg x$.

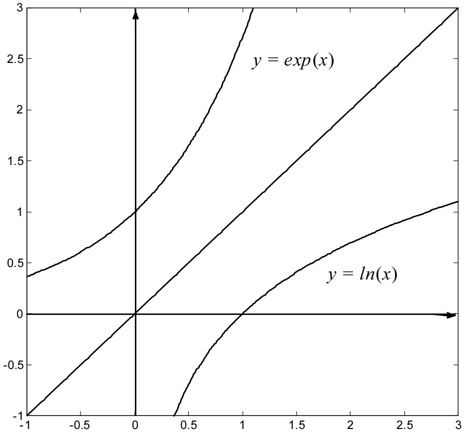

Bild 6.2 Exponential- und Logarithmusfunktion

Bemerkung: Basis der Exponentialfunktion bzw. der natürlichen Logarithmusfunktion ist die im Abschnitt 3.3 durch den Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ erklärte

Eulersche Zahl e. Wegen $a^x = \mathrm{e}^{x \cdot \ln a}$ bzw. $\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$ können die allgemeine Exponentialfunktion bzw. die allgemeine Logarithmusfunktion auf die e-Funktion bzw. die natürliche Logarithmusfunktion zurückgeführt werden.

Beispiel 6.8

Bestimmen Sie die Lösungen der Gleichungen:

a) $3 + 2\mathrm{e}^{-2t} - 5\mathrm{e}^{-t} = 0$ b) $\lg(x+1)^2 = \lg 2 + \lg(x+1) + \lg(x-1)$.

Lösung: a) Mit der Substitution $z = \mathrm{e}^{-t}$ erhält man wegen $z^2 = \mathrm{e}^{-2t}$ eine quadratische Gleichung in der Variablen z: $3 + 2z^2 - 5z = 2\left(z^2 - \frac{5}{2}z + \frac{3}{2}\right) = 0$ mit den beiden Lösungen $z_1 = \frac{3}{2}$ und $z_2 = 1$. Die Umkehrung der Substitution $z = \mathrm{e}^{-t}$ ergibt $t = -\ln z$ und damit erhält man die beiden Lösungen der Ausgangsgleichung $t_1 = -\ln z_1 = -\ln\frac{3}{2} = \ln\frac{2}{3}$ und $t_2 = -\ln z_2 = -\ln 1 = 0$.

b) Da die Summe von Logarithmen den Logarithmus des Produkts der Argumente ergibt, erhält man

$$\lg(x+1)^2 = \lg 2 + \lg(x+1) + \lg(x-1) = \lg\left[2(x+1)(x-1)\right].$$

In dieser Beziehung müssen die Argumente der Logarithmen übereinstimmen, so dass sich die quadratische Gleichung $(x+1)^2 = 2(x+1)(x-1)$ ergibt bzw. $(x+1)\left[(x+1) - 2(x-1)\right] = 0$. Der erste Faktor liefert die Lösung $x_1 = -1$ und der zweite Faktor die Lösung $x_2 = 3$. Da weiterhin die Argumente der Logarithmen in der Ausgangsgleichung größer Null sein müssen, sind nur Lösungen $x > 1$ zugelassen. Damit ist $x = 3$ die einzige Lösung der Ausgangsgleichung. ■

6.4 Potenz- und Wurzelfunktionen

Wird neben den Grundoperationen Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division (rationale Operationen) auch die Wurzeloperation bezüglich des Arguments x zugelassen, so entstehen **irrationale Funktionen**, die gemeinsam mit den rationalen Funktionen die Klasse der **algebraischen Funktionen** bilden.

Die in diesem Abschnitt betrachteten Potenzfunktionen und die entsprechenden Wurzelfunktionen bilden Paare inverser Funktionen.

Definition 6.5

Die Funktion $y = f(x) = x^a = \mathrm{e}^{a\ln x}$ mit beliebigem reellem Wert a $(a \neq 0)$ wird als **Potenzfunktion** bezeichnet. Sie ist für $x \in D = (0, \infty)$ definiert mit Werten $y \in W = (0, \infty)$. Wegen der strengen Monotonie im gesamten Definitionsbereich ist die Funktion umkehrbar mit $y = f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{a}}$ als Umkehrfunktion. Für eine natürliche Zahl $a = n$, $n \in N = \{1, 2, 3, ...\}$ wird die Umkehrfunktion als **Wurzelfunktion** bzw. als *n-te* Wurzel aus x bezeichnet.

Bemerkung: Bei positivem Exponenten a ist die Potenzfunktion auch für $x = 0$ definiert und für $x \in D = [0, \infty)$ streng monoton steigend. Bei negativem Exponenten a ist die Funktion für $x \in D = (0, \infty)$ streng monoton fallend.

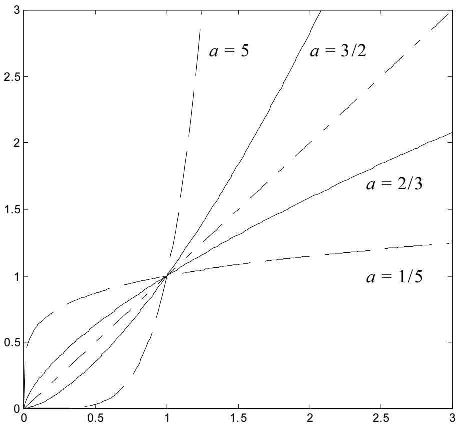

Bild 6.3 Potenzfunktionen $y = x^a$ für verschiedene Werte des Exponenten

6.5 Winkel- und Arkusfunktionen

Die trigonometrischen oder goniometrischen Funktionen gehören zur Klasse der transzendenten Funktionen. Sie besitzen für einen spitzen Winkel x eine anschauliche Interpretation als Verhältniszahlen von Seitenlängen in einem rechtwinkligen Dreieck bzw. am Einheitskreis.

Definition 6.6

Im rechtwinkligen Dreieck mit den Eckpunkten *A,B,C* und dem rechten Winkel bei *C* bezeichnen wir den Winkel $\angle(ABC)$ mit *x*. *D*ie dem Winkel *x* gegenüberliegende Seite *b* wird als **Gegenkathete**, die anliegende Seite *a* als **Ankathete** und die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite *c* als **Hypotenuse** bezeichnet. Sind *a, b, c* gleichzeitig die Bezeichnungen der Seitenlängen, so sind die **Winkelfunktionen** des Winkels *x* wie folgt definiert:

$$\sin x = \frac{b}{c}, \quad \cos x = \frac{a}{c}, \quad \tan x = \frac{b}{a}, \quad \cot x = \frac{a}{b}.$$

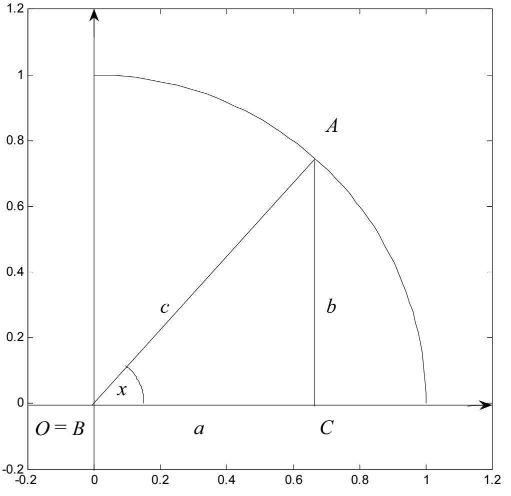

Bild 6.4 Winkelfunktionen am Einheitskreis

Bemerkung: Für beliebige (nichtspitze) Winkel werden Streckenverhältnisse am Einheitskreis zur Definition der Winkelfunktionen verwendet. Einem Punkt *P* auf der Kreislinie entspricht dabei der Zentriwinkel *x* zwischen der positiven Abszissenachse und der Strecke *OP* gemessen im mathematisch positiven Sinn.

Tabelle 6.1 Definitions- und Wertebereiche der Winkelfunktionen

Funktion	Definitionsbereich	Wertebereich	primitive Periode
$\sin x$	$D = (-\infty, +\infty)$	$W = [-1, 1]$	$p = 2\pi$
$\cos x$	$D = (-\infty, +\infty)$	$W = [-1, 1]$	$p = 2\pi$
$\tan x$	$D = (-\infty, +\infty) / \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$	$W = (-\infty, +\infty)$	$p = \pi$
$\cot x$	$D = (-\infty, +\infty) / \{k\pi\}$ $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$	$W = (-\infty, +\infty)$	$p = \pi$

Definitions-, Wertebereich und die jeweilige primitive Periode der Winkelfunktionen sind der obigen Tabelle 6.1 zu entnehmen. Die Funktionen sind in den Bildern 6.5 und 6.6 graphisch dargestellt.

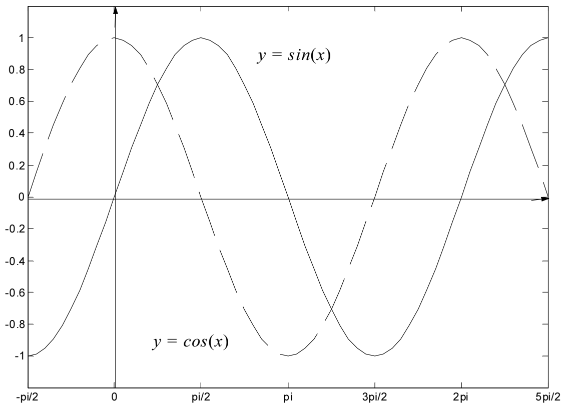

Bild 6.5 Sinus- und Kosinusfunktion

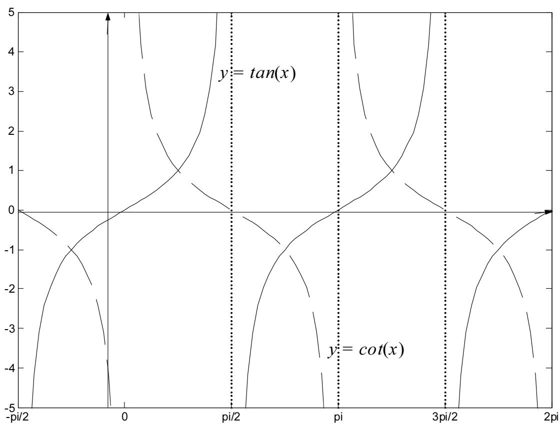

Bild 6.6 Tangens- und Kotangensfunktion

Zur Berechnung von Funktionswerten der trigonometrischen Funktionen für mehrfache Winkel, Summen von Winkeln und zur Umrechnung der Funktionen existieren Additionstheoreme, Reduktions- und Umrechnungsformeln, die Formelsammlungen zu entnehmen sind. Wir geben einige wichtige Beziehungen an:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \quad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{1}{\tan x}$$

sowie in der Tabelle 6.2 ausgewählte Additionstheoreme.

Tabelle 6.2 Auswahl von Additionstheoremen der Winkelfunktionen