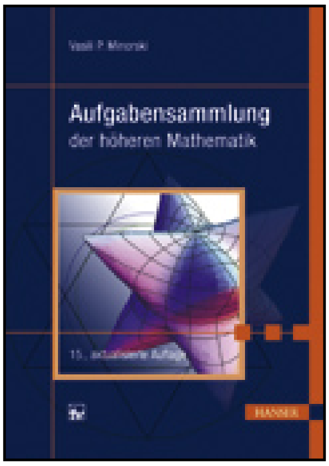
HANSER



Leseprobe

Vasili P. Minorski

Aufgabensammlung der höheren Mathematik

ISBN: 978-3-446-41616-1

Weitere Informationen oder Bestellungen unter

http://www.hanser.de/978-3-446-41616-1

sowie im Buchhandel.

3 Vektorrechnung, Analytische Geometrie

3.1 Darstellung von und Rechnen mit Vektoren im $\mathbb{R}^3$

Im räumlichen kartesischen Koordinatensystem (rechtwinkliges x, y, z-System) wird ein Vektor $\boldsymbol{a}$ mit Hilfe der Einheitsvektoren $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ in der Form

$$\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3 \tag{3.1}$$

dargestellt. Dabei sind

- a_1, a_2, a_3 die *skalaren Komponenten* (oder **Koordinaten**) des Vektors $\boldsymbol{a}$,
- $a_1\boldsymbol{e}_1$, $a_2\boldsymbol{e}_2$, $a_3\boldsymbol{e}_3$ die *vektoriellen Komponenten* des Vektors $\boldsymbol{a}$.

Üblich ist auch die Darstellung eines Vektors durch Angabe seiner skalaren Komponenten in Spaltenform oder auch in Zeilenform mit dem Transpositionszeichen T:

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = (a_1, a_2, a_3)^{\mathrm{T}} \tag{3.2}$$

$$\boldsymbol{o} = (0, 0, 0)^{\mathrm{T}} \quad \text{ist der } \textbf{Nullvektor} \tag{3.3}$$

Die Vektoren $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ von der Länge 1 weisen in die positive Richtung der x- bzw. y- bzw. z-Achse.

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \quad \textbf{Betrag} \text{ (Länge) des Vektors } \boldsymbol{a} \tag{3.4}$$

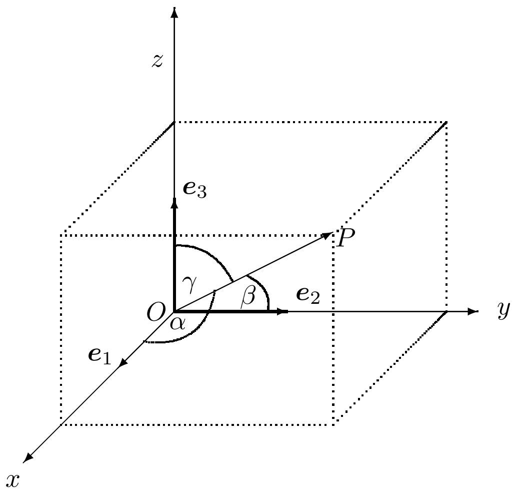
$$\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OP} = (x, y, z)^{\mathrm{T}} \quad \text{Ortsvektor zum Punkt } P(x; y; z) \text{ mit dem Angriffspunkt im Koordinatenursprung} \tag{3.5}$$

Sind α, β, γ die Winkel zwischen dem Ortsvektor $\boldsymbol{r} = (x, y, z)^{\mathrm{T}}$ und der positiven x- bzw. y- bzw. z-Achse, so erhält man ihre *Richtungskosinus* zu

$$\cos\alpha = \frac{x}{|\boldsymbol{r}|}, \quad \cos\beta = \frac{y}{|\boldsymbol{r}|}, \quad \cos\gamma = \frac{z}{|\boldsymbol{r}|} \tag{3.6}$$

Daraus folgt:

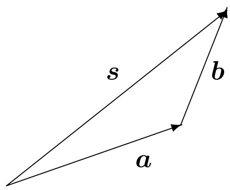
$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \tag{3.7}$$



Multiplikation eines Vektors $\boldsymbol{a}$ mit einem Skalar $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\lambda \boldsymbol{a} = \lambda(a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3) = \lambda a_1\boldsymbol{e}_1 + \lambda a_2\boldsymbol{e}_2 + \lambda a_3\boldsymbol{e}_3 = \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \\ = \lambda(a_1, a_2, a_3)^{\mathrm{T}} = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3)^{\mathrm{T}}\end{aligned} \tag{3.8}$$

$$\boldsymbol{a}^0 = \frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a} \quad \textbf{Einheitsvektor} \text{ zu } \boldsymbol{a} \text{ mit } |\boldsymbol{a}| \neq 0 \tag{3.9}$$



Addition zweier Vektoren: $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{s}$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} \tag{3.10}$$

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \qquad \text{(Kommutativgesetz)} \tag{3.11}$$

$$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) \qquad \text{(Assoziativgesetz)} \tag{3.12}$$

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{o} = \boldsymbol{a} \qquad (\boldsymbol{o}\,\text{Nullvektor}) \tag{3.13}$$

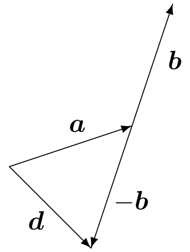
$$\lambda \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}\lambda \qquad \lambda \in \mathbb{R} \tag{3.14}$$

$$(\lambda + \mu)\boldsymbol{a} = \lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{a} \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \tag{3.15}$$

$$\lambda(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \lambda\boldsymbol{a} + \lambda\boldsymbol{b} \qquad \lambda \in \mathbb{R} \tag{3.16}$$

$$|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}| \leq |\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}| \qquad \text{(Dreiecksungleichung)} \tag{3.17}$$

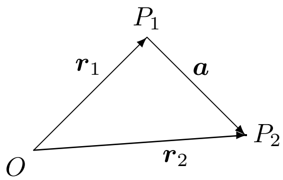
$\boxed{\text{Subtraktion zweier Vektoren: } \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{d}}$



$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ a_3 - b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} \tag{3.18}$$

$$\boldsymbol{d} = \boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{b}) \tag{3.19}$$

Den *Verbindungsvektor* $\boldsymbol{a}$, der vom Punkt $P_1(x_1, y_1, z_1)$ zum Punkt $P_2(x_2, y_2, z_2)$ zeigt, erhält man in der Form



$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix} \tag{3.20}$$

Dieser Verbindungsvektor wird auch mit $\overrightarrow{P_1P_2}$ bezeichnet: $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{P_1P_2}$.

1. Berechne $\boldsymbol{a}^0$, $\boldsymbol{b}^0, \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$, $-2\boldsymbol{a} + 3\boldsymbol{b}$ für $\boldsymbol{a} = (-3, 2, -1)^{\mathrm{T}}$ und $\boldsymbol{b} = 5\boldsymbol{e}_1 - 3\boldsymbol{e}_2 + 2\boldsymbol{e}_3$. Bestätige für $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ und für $-2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$ die Dreiecksungleichung.

2. Berechne die skalaren Komponenten des Vektors $\boldsymbol{a}$, wenn $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$ ist und $A(0; 0; 1)$, $B(3; 2; 1)$, $C(4; 6; 5)$ und $D(1; 6; 3)$.

3. Berechne den Betrag des Vektors
$$\boldsymbol{a} = \lambda\boldsymbol{e}_1 + (\lambda + 1)\boldsymbol{e}_2 + \lambda(\lambda + 1)\boldsymbol{e}_3.$$

4. Berechne die Länge des Vektors $\boldsymbol{a} = (20, 30, -60)^{\mathrm{T}}$ und seine Richtungskosinus. Kontrolliere: $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

5. Gegeben ist ein Dreieck ABC mit $A(1; 2; 3)$, $B(3; 2; 1)$ und $C(1; 4; 1)$. Zeige, dass dieses Dreieck gleichseitig ist.

6. Der Ortsvektor des Punktes P bildet mit der y-Achse einen Winkel von $60°$ und mit der z-Achse einen Winkel von $45°$; sein Betrag ist gleich 8. Berechne die Koordinaten des Punktes P, wenn seine x-Koordinate negativ ist.

7. Von einem Parallelogramm $ABCD$ sind drei Eckpunkte $A(3; -4; 7)$, $B(-5; 3; -2)$ und $C(1; 2; -3)$ gegeben.
   a) Bestimme den vierten Eckpunkt D, der dem Punkt B gegenüber liegt.
   b) Gib die beiden Diagonalvektoren an und berechne ihre Länge.

8. Der Vektor $\boldsymbol{x}$ hat den Betrag $|\boldsymbol{x}| = 5\sqrt{6}$ und die Richtung der

Halbierenden des Winkels zwischen den Vektoren $\boldsymbol{a} = (7, -4, -4)^{\mathrm{T}}$ und $\boldsymbol{b} = (-2, -1, 2)^{\mathrm{T}}$. Bestimme $\boldsymbol{x}$.

Hinweis: Die Rhombuswinkel werden von ihren Diagonalen halbiert.

9. $\boldsymbol{r}_A$, $\boldsymbol{r}_B$, $\boldsymbol{r}_C$ seien die den Eckpunkten entsprechenden Ortsvektoren des Dreiecks ABC. Bestimme damit den Ortsvektor $\boldsymbol{r}_S$ des Dreiecksschwerpunktes S.
Berechne den Dreiecksschwerpunkt, wenn $A(2; 3; 4)$, $B(3; 1; 2)$ und $C(4; -1; 3)$ gegeben sind.

10. Gegeben sind die Punkte $A(3; 3; 3)$ und $B(-1; 5; 7)$. Bestimme die Punkte C und D, die die Strecke $\overline{AB}$ in drei gleiche Teile teilen.

11. Im Dreieck ABC liegt ein Punkt P auf der Seite BC so, dass $|\overline{BP}| : |\overline{PC}| = \lambda : 1$ gilt. Gib den Verbindungsvektor $\boldsymbol{v}$ von A nach P an, wenn $\overrightarrow{AC} = \boldsymbol{b}$ und $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{c}$ ist.

12. Bestimme den Punkt P der x-Achse, der von den Punkten $A(2; -4; 5)$ und $B(-3; 2; 7)$ den gleichen Abstand besitzt.

13. Gegeben ist das Dreieck ABC mit $A(1; 1; 1)$, $B(2, 1; 0)$ und $C(1; 2; 3)$. Berechne
    a) die Längen der Seiten a, c, b des Dreiecks.
    b) die Mittelpunkte M_a, M_b, M_c der Dreieckseiten.
    c) den Vektor $\boldsymbol{m}$ von A nach M_a sowie $|\boldsymbol{m}|$.

14. Welcher Punkt der x, y-Ebene hat von den Punkten $A(1; -1; 5)$, $B(3; 4; 4)$ und $C(4; 6; 1)$ gleichen Abstand?

3.2 Skalarprodukt, Vektorprodukt, Spatprodukt

$\boxed{\text{Skalarprodukt}}$

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}| \cdot \cos\varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi \tag{3.21}$$

φ ist der von $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ eingeschlossene Winkel, $\varphi = \angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \tag{3.22}$$

$$\cos\varphi = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}} \tag{3.23}$$

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a} \quad \text{(Kommutativgesetz)} \tag{3.24}$$

$$\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c} \quad \text{(Distributivgesetz)} \tag{3.25}$$

$$\boldsymbol{o} \cdot \boldsymbol{a} = 0 \tag{3.26}$$

$$\lambda(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) = (\lambda \boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \cdot (\lambda \boldsymbol{b}), \quad \lambda \in \mathbb{R} \tag{3.27}$$

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}^2 = |\boldsymbol{a}|^2 \tag{3.28}$$