Leseprobe

Taschenbuch der Nachrichtentechnik

Herausgegeben von Wolfgang Frohberg, Horst Kolloschie, Helmut Löffler

ISBN: 978-3-446-41602-4

Weitere Informationen oder Bestellungen unter

http://www.hanser.de/978-3-446-41602-4

sowie im Buchhandel.

2 Signale

Helmut Löffler

Information ist stets an materielle Träger gebunden, an Signale.

Signal *(signal)*: Träger der Information.

- Charakteristisches Merkmal eines Informationsträgers: Er kann verschiedene zeitliche und/oder räumliche Zustände einnehmen.
- Alle Objekte, die in Zeit und Raum verschiedene Zustände einnehmen können, sind somit als Informationsträger, d. h. als Signale, geeignet bzw. so zu betrachten.

Informationsparameter – auch **Signalparameter**: Größe, welche die Informationen über das betreffende Objekt beinhaltet bzw. abbildet.

❑ *Beispiel von Informationsparametern:* Frequenz, Amplitude, Phase eines Signals.

► *Hinweis:* Signale lassen sich in *Konfigurationen* und *Vorgänge* einteilen. Bei Konfigurationen spielt die Zeit keine Rolle, z. B. bei stehenden Bildern. Ändert sich der Informationsparameter mit der Zeit, handelt es sich um Vorgänge.

Für die Nachrichtentechnik sind nicht alle Signalparameter von gleicher Bedeutung.

Tabelle 2.1 Ortsabhängige sowie orts- und zeitabhängige Signale

Art und Anzahl der unabhängigen Koordinaten	Beispiel
1 Ortskoordinate	einspurig gespeicherte Signalaufzeichnung
2 Ortskoordinaten	Schriftzeichen auf einer Druckseite
3 Ortskoordinaten	stehendes Raumbild, Schriftzeichen in einem Buch
1 Ortskoordinate und Zeitkoordinate	bewegte linienhafte Signalaufzeichnung
2 Ortskoordinaten und Zeitkoordinate	bewegtes ebenes Bild (z. B. Fernsehbild)
3 Ortskoordinaten und Zeitkoordinate	bewegtes Raumbild; Empfangsfeldstärke von Sendern kosmischer Flugkörper an terrestrischen Antennen

2.1 Klassifikation von Signalen

Signale lassen sich in Klassen einteilen. Für die Nachrichtentechnik ist die Einteilung nach Determiniertheit, Quantisiertheit und nach ausgewählten mathematisch-physikalischen Eigenschaften (z. B. nach Bandbreite, Periodizität und Dauer) von Bedeutung.

Signalklassifikation bezüglich der Determiniertheit

Es gibt unter dem Gesichtspunkt der Determiniertheit zwei qualitativ verschiedene Signalklassen: determinierte und stochastische Signale.

- **Determiniertes Signal**: Bei gegebenen Anfangsbedingungen sind die Werte des Signales zu jedem Zeitpunkt bekannt oder berechenbar. Beispiel: harmonische Schwingung. Da ein determiniertes Signal einen stets bekannten Verlauf besitzt, besteht bereits vor seinem Empfang Kenntnis über seine Parameter, d. h., es gibt keinerlei Ungewissheit mehr zu beseitigen. Determinierte Signale spielen in der Nachrichtentechnik eine wichtige Rolle, z. B. für den Informationstransport (→ 8) oder als Testsignale.
- **Stochastisches Signal**: Die Signalwerte sind *Zufallsgrößen*. Sie sind durch Wahrscheinlichkeitsverteilungen bzw. mit den Gesetzmäßigkeiten der Stochastik beschreibbar.

❑ *Beispiel:* Feldstärke an einer Empfangsantenne.

Signalklassifikation bezüglich der Quantisiertheit

Bei der Quantisiertheit von Signalen geht es darum, ob Signalparameter (z. B. Amplitudenwerte oder die Zeit) nur in ganz bestimmten diskreten Werten vorliegen oder in Form eines Kontinuums. Unter dem Gesichtspunkt der Quantisiertheit gibt es im Wesentlichen vier Signalklassen:

- analoge kontinuierliche Signale,
- analoge diskontinuierliche Signale,
- diskrete kontinuierliche Signale,
- diskrete diskontinuierliche Signale.

> **Analoges Signal**: Die Werte des Informationsparameters können jeden beliebigen Wert annehmen.
>
> **Diskretes Signal**: Die Werte des Informationsparameters nehmen nur ganz bestimmte Werte an. Der Informationsparameter als Merkmalsgröße ist bei einem diskreten Signal quantisiert; er besitzt eine endliche Anzahl von Wertestufen.

Bezüglich der Zeitabhängigkeit eines Signals gibt es zwei Signalklassen: kontinuierliche und diskontinuierliche Signale.

> **Kontinuierliches Signal**: Die Werte des Signals können sich zu jedem Zeitpunkt ändern.
>
> **Diskontinuierliches Signal**: Seine Werte können sich nur zu bestimmten Zeitpunkten ändern oder gewinnen lassen. Bei diskontinuierlichen Signalen ist die Zeitkoordinate quantisiert.

► *Hinweis:* Grundsätzlich kann es sich bei den oben angegebenen Größen auch um andere Informationsparameter als die Zeit handeln. In einem ebenen Festbild mit endlicher Anzahl von Farbwerten sind die Farbwerte diskret. Ändert sich ein Farbwert nur an bestimmten Ortskoordinaten, so handelt es sich um ein diskretes diskontinuierliches Signal (→ Tabelle 2.1).

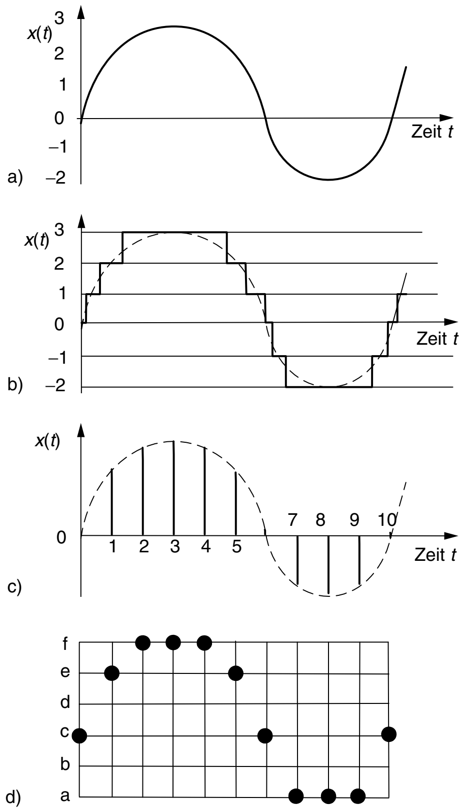


Bild 2.1 a) Kontinuierliches Signal, b) Quantisierung nach der Amplitude, c) Quantisierung nach der Zeit, d) Quantisierung nach Amplitude und Zeit (Digitalisierung des ursprünglichen Signals)

Bild 2.1 veranschaulicht, wie durch Quantisierung nach Amplitude und Zeit aus einem analogen kontinuierlichen Signal schließlich ein digitales erzeugt werden kann. Die Amplitudenquantisierung (→ Bild 2.1b) ergibt ein diskretes kontinuierliches Signal. Eine Zeitquantisierung des Ursprungssignals (→ Bild

2.1a) liefert ein analoges diskontinuierliches Signal. Die Quantisierung nach der Amplitude und Zeit (→ Bild 2.1c) ergibt ein diskretes diskontinuierliches Signal. Jedem Wert des nach Amplitude und Zeit quantisierten Signals lassen sich beliebig gewählte Zeichen eindeutig zuordnen. Eine Zuordnung dieser Art nennt man bekanntlich Codierung (→ 5). Der ursprüngliche Signalverlauf ist somit durch eine Folge von Codezeichen ersetzbar. Im vorliegenden einfachen Beispiel entspricht der Signalverlauf nach dem doppelten Quantisierungsprozess (Amplitude und Zeit) der Codezeichenfolge cefffecaaac.

► *Hinweis:* Bei Quantisierungen kann es zu Abbildungsfehlern kommen. Die führt zum sog. *Quantisierungsrauschen* (→ 2.2.5, 8).

❑ *Beispiel für die Überführung analoger in digitale Signale:* Speicherung von (analogen) Sprach- oder Musiksignalen auf Compact Disc.

Isochrones Signal: Folge von Signalelementen gleicher Dauer und gleichen Zeitabstandes; jedes Signalelement besitzt diskrete Werte.

In der Nachrichtentechnik unterscheidet man außerdem Nutz- und Störsignale:

- *Nutzsignale:* Träger von Nachrichten bzw. Information.
- *Störsignale:* unerwünschte Signale, welche das Erkennen von Informationsparametern beeinträchtigen.

2.2 Zeitliche und spektrale Darstellung von Signalen

Signale besitzen **zeitliche** und **spektrale** Darstellungsformen. Beide Darstellungsformen sind **gleichwertig**.

► *Hinweis:* Welche der beiden Darstellungsformen benutzt wird, hängt von der Zweckmäßigkeit ab.

Die mathematische Darstellung von Signalen und deren physikalisch-technische Interpretation hängt wesentlich von der jeweiligen Signalklasse ab. Mathematisch-physikalische Grundlagen von Signalen findet man z. B. in /2.1/, /2.3/, /2.4/, /2.8/, /2.10/, /2.13/, /2.14/.

2.2.1 Periodische Signale

Ein Signal $x(t)$ mit der konstanten Periodendauer T ist periodisch, wenn es die **Periodizitätsbedingung** erfüllt:

$$x(t + nT) = x(t); \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{2.1}$$

► *Hinweis:* Es müssen grundsätzlich die Dirichlet'schen Bedingungen erfüllt sein: $x(t)$ lässt sich innerhalb einer Periode in endlich viele Teilintervalle mit jeweils monotonem Verlauf zerlegen; $x(t)$ darf innerhalb einer Periodendauer T nur endlich viele Unstetigkeitsstellen mit endlichem Grenzwert besitzen.

Periodische Signale können durch zwei gleichwertige Fourier-Reihen dargestellt werden: durch die **trigonometrische** und die **komplexe Fourier-Reihe**.

Trigonometrische Form der Fourier-Reihe für das Signal $x(t)$:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t) \tag{2.2}$$

ω_0 Kreisfrequenz; $\omega_0 = 2\pi f_0$
f_0 reelle Frequenz; $f_0 = 1/T = \omega_0/2\pi$

► *Hinweis:* Maßeinheit der Kreisfrequenz ω_0: Radiant/s; Maßeinheit der reellen Frequenz f_0: $1\,\mathrm{Hz} = 1\,\mathrm{s}^{-1}$.

Die Fourier-Koeffizienten von Gl. (2.2) lauten für $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T}\int_0^T x(t) \cos n\omega_0 t \;\mathrm{d}t \\ b_n &= \frac{2}{T}\int_0^T x(t) \sin n\omega_0 t \;\mathrm{d}t \end{aligned} \tag{2.3}$$

Für den Gleichstromanteil, d. h. $n = 0$, gilt:

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\;\mathrm{d}t \tag{2.4}$$

❑ *Beispiel:* Diskretes Amplitudenspektrum einer periodischen Rechteckschwingung (→ Bild 2.2). Die Fourier-Reihe der Rechteckschwingung lautet

$$x(t) = \frac{4A}{\pi}\left(\sin\omega_0 t + \frac{1}{3}\sin 3\omega_0 t + \frac{1}{5}\sin 5\omega_0 t + \ldots\right) \tag{2.5}$$

Es treten nur ungeradzahlige Vielfache der Grundschwingung $\omega_0 = 2\pi/T$ auf.

Eine andere Form der *trigonometrischen* Fourier-Reihe für ein Signal $x(t)$ ist:

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n) \tag{2.6}$$

mit den Koeffizienten

$$c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \tag{2.7}$$

und dem Phasenwinkel

$$\varphi_n = -\arctan(b_n/a_n) \tag{2.8}$$

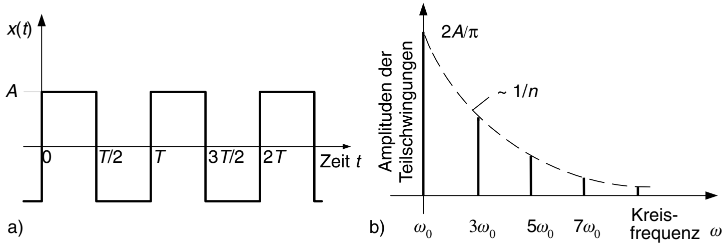


Bild 2.2 a) Rechteckschwingung und b) deren diskretes Amplitudenspekrtrum

Komplexe Form der Fourier-Reihe für das Signal $x(t)$:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n \, \mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_0 t} \tag{2.9}$$

Die Größen X_n heißen **spektrale Amplituden**. Es handelt sich i. Allg. um komplexe Größen:

$$X_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0 t} x(t)\, \mathrm{d}t = |X_n|\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\Theta n} = \frac{1}{2}(a_n - \mathrm{j}b_n) \tag{2.10}$$

$$X_{-n} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t} x(t)\, \mathrm{d}t = |X_{-n}|\, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Theta n} = \frac{1}{2}(a_n + \mathrm{j}b_n) \tag{2.11}$$

a_n, b_n Koeffizienten der trigonometrischen Fourier-Reihe (→ Gl. (2.3))

Dem Betrag nach sind die spektralen Amplituden X_n und X_{-n} gleich groß: $|X_n| = |X_{-n}|$.

2.2.2 Nichtperiodische, zweiseitig begrenzte Signale

Nichtperiodische, zeitlich zweiseitig begrenzte Signale existieren nur im Zeitintervall $-T < t < T$; $T < \infty$.

Die spektrale Darstellung eines nichtperiodischen, zweiseitig begrenzten Signals $x(t)$ heißt **spektrale Amplitudendichte** oder **Spektralfunktion** (*frequency spectrum*). Mathematisch kann die Spektralfunktion mithilfe der Fourier-Transformation gewonnen werden:

$$\mathfrak{F}\{x(t)\} = X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\, \mathrm{d}t \tag{2.12}$$

Die spektrale Amplitudendichte $X(\omega)$ ist eine *komplexe kontinuierliche* Funktion mit dem *reelen* Argument $\omega = 2\pi f$ (f: Frequenz in Hz). Aus Gl. (2.11) folgt

$$X(\omega) = A(\omega) - \mathrm{j}B(\omega) = |X(\omega)|\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi(\omega)} \tag{2.13}$$

$A(\omega)$ Realteil der spektralen Amplitudendichte
$B(\omega)$ Imaginärteil spektralen Amplitudendichte
$\varphi(\omega)$ Phasenwinkel
$|X(\omega)|$ Betrag der spektralen Amplitudendichte

Das Minuszeichen in Gl. (2.13) vor $\mathrm{j}B(\omega)$ ergibt sich aus der Anwendung der Euler-Formel /2.1/:

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t} = \cos\omega t - \sin\omega t$$

Realteil $A(\omega)$ und Imaginärteil $B(\omega)$ der spektralen Amplitudendichte $X(\omega)$ berechnen sich aus

$$A(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x(t)\cos\omega t\ \mathrm{d}t \tag{2.14}$$

$$B(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x(t)\sin\omega t\ \mathrm{d}t \tag{2.15}$$

Für den Phasenwinkel $\varphi(\omega)$ gilt

$$\varphi(\omega) = \arctan\frac{B(\omega)}{A(\omega)} \tag{2.16}$$

Den Betrag der spektralen Amplitudendichte erhält man aus

$$|X(\omega)| = |\sqrt{A^2(\omega) + B^2(\omega)}| \tag{2.17}$$

Maßeinheit der spektralen Amplitudendichte: Amplitude je Hz.

Wichtige naturwissenschaftlich-technische Aussagen über die spektrale Amplitudendichte lassen sich wie folgt zusammenfassen:

- Die spektrale Amplitudendichte $X(\omega)$ ist das Bild des Signals $x(t)$ im Spektral- bzw. Frequenzbereich.
- Die Darstellung eines Signals in der Form $x(t)$ gibt an, wie groß die reelle Signalamplitude zu jedem Zeitpunkt t ist. Aus der spektralen Amplitudendichte $X(\omega)$ kann entnommen werden, wie groß der Amplitudenanteil einer bestimmten Frequenz ist.
- Die komplexe Amplitudendichte $X(\omega)$ bzw. der reelle Betrag $|X(\omega)|$ nichtperiodischer Signale besitzt stetige Verteilungen. Periodische Signale im Zeitbereich besitzen ein diskretes Frequenzspektrum, nichtperiodische dagegen ein nichtdiskretes (kontinuierliches) Frequenzspektrum.

❑ *Beispiel:* Spektrale Amplitudendichte des einmaligen Rechteckimpulses der folgenden Größe:

$$x(t) = \begin{cases} A & \text{für} \quad |t| \leqq \tau/2 \\ 0 & \text{für} \quad |t| > \tau/2 \end{cases}$$

Die spektrale Amplitudendichte des obigen Signals ist

$$X(\omega) = A \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\, \mathrm{d}t = \frac{A}{-\mathrm{j}\omega}(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau/2} - \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega\tau/2}) \tag{2.18}$$

Anwendung der Euler-Formel führt mit $\operatorname{si} x = \sin x / x$ zu

$$X(\omega) = \frac{2A}{\mathrm{j}\omega}\,\mathrm{j}\sin\frac{\omega\tau}{2} = \frac{A\tau}{\omega\tau/2}\sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) = A\tau\operatorname{si}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right). \tag{2.19}$$

Die Hüllkurve des Frequenzspektrums eines einmaligen Rechteckimpulses ist durch den Verlauf der Spaltfunktion gekennzeichnet. Innerhalb der Hüllkurve (→ Bild 2.3) ist die spektrale Amplitudendichte kontinuierlich verteilt. Nur an den Stellen $\omega = \pm 2\pi/\tau$, $\pm 4\pi/\tau$, $\pm 6\pi/\tau$ usw. besitzt in diesem konkreten Fall das Frequenzspektrum den Wert null.

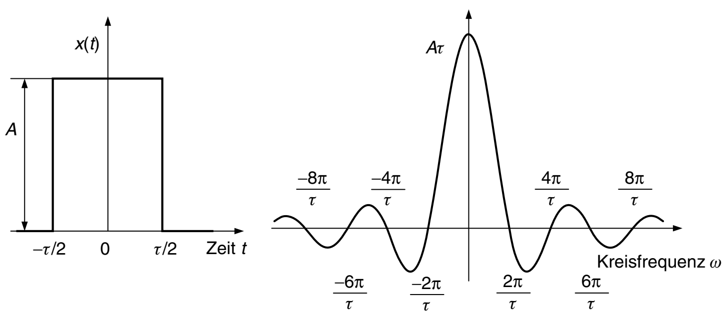


Bild 2.3 Einmaliger Recheckimpuls $x(t)$ und seine spektrale Amplitudendichte $X(\omega)$

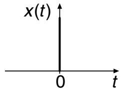
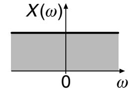
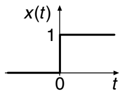
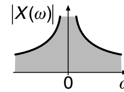
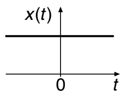
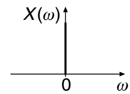
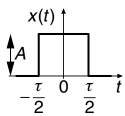
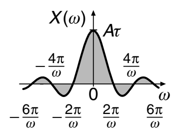
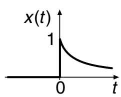
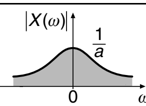
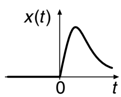
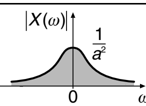
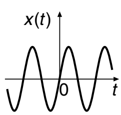
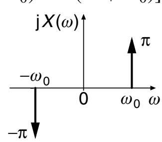
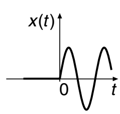
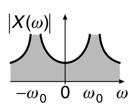
Korrespondenzen von deterministischen Signalen $x(t)$ und ihren spektralen Amplitudendichten $X(\omega)$ zeigt Tabelle 2.2. Es lässt sich daraus das *Gesetz der Reziprozität von Zeit und Frequenz* herleiten: Je schmaler bzw. je kürzer ein Signal im Zeitbereich ist, desto breiter ist sein Frequenzspektrum und umgekehrt. *Technische Konsequenz:* Kurzzeitsignale benötigen breitbandige Übertragungskanäle.

Diskrete Fourier-Transformation DFT (*Discrete Fourier Transform*): Fourier-Transformation von *zeitdiskreten periodischen Signalen*.

Die DFT ist ein wichtiges Werkzeug der digitalen Signalverarbeitung zur

- Bestimmung der in einem abgetasteten Signal hauptsächlich vorkommenden Frequenzen,

Tabelle 2.2 Korrespondenzen von typischen Signalen und deren spektralen Amplitudendichten (Auswahl)

Signal $x(t)$	Fourier-Transformierte von $\mathfrak{F}\{x(t)\}$
$x(t) = \delta(t)$ 	$X(\omega) = 1$ 
$x(t) = 1(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t > 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases}$ 	$X(\omega) = \pi\delta(\omega) + \dfrac{1}{\mathrm{j}\omega}$ 
$x(t) = 1$ 	$X(\omega) = 2\pi\delta(\omega)$ 
$x(t) = \begin{cases} A & \text{für } \lvert t\rvert < \tau/2 \\ 0 & \text{für } \lvert t\rvert > \tau/2 \end{cases}$ 	$X(\omega) = A\tau \,\mathrm{si}\left\{\dfrac{\omega\tau}{2}\right\}$ 
$x(t) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-at} & \text{für } t > 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases}$ 	$X(\omega) = \dfrac{1}{a + \mathrm{j}\omega}$ 
$x(t) = \begin{cases} t\,\mathrm{e}^{-at} & \text{für } t > 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases}$ 	$X(\omega) = \dfrac{1}{(a + \mathrm{j}\omega)^2}$ 
$x(t) = \sin \omega_0 t$ 	$X(\omega) = \mathrm{j}\pi\,[\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)]$ 
$x(t) = 1(t) \cdot \sin \omega_0 t$ 	$X(\omega) = \dfrac{\pi}{2\,\mathrm{j}}\,[\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)]$ 

- Bestimmung der Amplituden bei diesen Frequenzen,
- Implementierung digitaler Filter mit großen Filterlängen.

Für die Berechnung der diskreten Fourier-Transformation DFT gibt es effiziente Algorithmen als Fast Fourier-Transformation FFT /2.2/, /2.13/.

2.2.3 Stochastische Signale

Merkmal stochastischer Signale: Die Signalwerte sind Zufallsgrößen.

Die Grundlage der Beschreibung stochastischer Signale bildet die Theorie der Zufallsfunktionen und -prozesse. Da es oft nicht möglich ist, den zugrunde liegenden Zufallsprozess mathematisch exakt anzugeben, zieht man zur Beschreibung die typischen Parameter von Wahrscheinlichkeitsverteilungen heran: Erwartungswerte, Momente, Dispersion, Standardabweichung usw.

Hängt eine Zufallsfunktion von einem Parameter $t \in T$ ab, spricht man von einem zufälligen Prozess oder **Zufallsprozess**. Meistens ist t die Zeit und T die Menge aller Beobachtungszeitpunkte eines Beobachtungsintervalls. Eine Realisierung des zufälligen Prozesses liegt vor, wenn bei jedem $t \in T$ der stochastische Prozess einen ganz konkreten Verlauf annimmt. Realisierungen zufälliger Prozesse sind grundsätzlich beobachtbar und können auf geeigneten Medien (z. B. magnetischen Speichern, Papier) registriert bzw. aufgeschrieben werden. *Grundsätzlich lassen sich stochastische Signale als Realisierung stochastischer Prozesse auffassen.* Diese Betrachtungsweise liegt den folgenden Ausführungen zugrunde.

Scharmittel

Gegeben sei ein Zufallsprozess $\xi(t)$ mit der eindimensionalen **Wahrscheinlichkeitsdichte** $p(x,t)$. Das Argument x bedeutet die möglichen Werte des Zufallsprozesses bei den Werten des Arguments t. $p(x,t)\,\mathrm{d}x$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Werte des Zufallsprozesses zum Zeitpunkt t im Intervall $(x, x + \mathrm{d}x)$ liegen. Die Wahrscheinlichkeit, dass der Zufallsprozess irgendeinen der möglichen Werte annimmt, ist eins:

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x,t)\,\mathrm{d}x = 1 \tag{2.20}$$

Obwohl die eindimensionale Wahrscheinlichkeitsdichte den Zufallsprozess nicht umfassend beschreibt, lässt sich damit eine Anzahl wichtiger Charakteristika bilden (→ Tabelle 2.3). Der einfache **Erwartungswert** $\mathcal{E}[\xi(t)]$ ist das **Scharmittel**. In der Definitions- bzw. Berechnungsgleichung ist n die Zahl der Realisierungen und $x_i(t)$ ist eine Realisierung von $\xi(t)$.