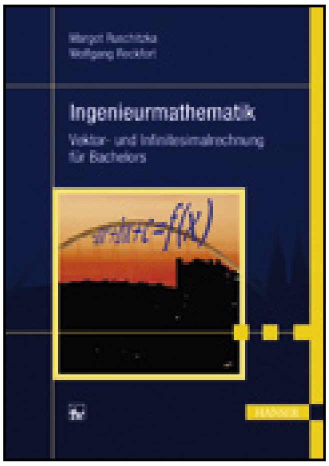


Leseprobe

Margot Ruschitzka, Wolfgang Reckfort

Ingenieurmathematik

Vektor- und Infinitesimalrechnung für Bachelors

ISBN: 978-3-446-41788-5

Weitere Informationen oder Bestellungen unter

http://www.hanser.de/978-3-446-41788-5

sowie im Buchhandel.

6 Funktionen

Die Griechen hatten es mit der Geometrie, das Spezialgebiet der Araber war die Algebra. Der **Begriff Funktion** und die damit zusammenhängende Betrachtungs- und Behandlungsweise der Dinge ist der entscheidende Beitrag des Abendlandes zur Mathematik. Er spielt eine überragende Rolle in Analysis, Physik und Technik.

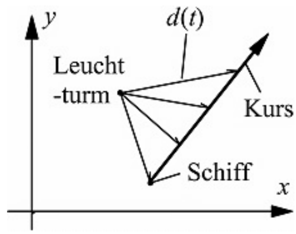
Gleichungen (und Algebra) sind *statisch* und *endlich*; die Lösung einer Gleichung liefert einzelne Werte.

Funktionen (und Analysis) sind *dynamisch* und *unendlich*; sie spiegeln einen Zusammenhang zwischen Größen bzw. Variablen wider. Wenn sich eine Variable ändert, gibt sie die Veränderung der anderen Variablen an.

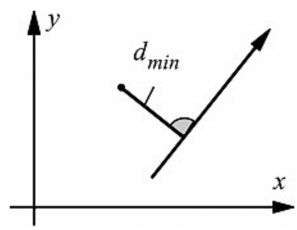
Bei Beweisen ziehen die Mathematiker allerdings eine statische Betrachtungsweise vor, siehe z.B. die „Epsilontik“. Statik kann man in Ruhe sezieren, sie läuft nicht davon.

Mit der Entwicklung von den *Gleichungen* zu den *Funktionen* war ein regelrechter Sinneswandel verbunden. Wir wollen uns den Unterschied an einem Beispiel klar machen.

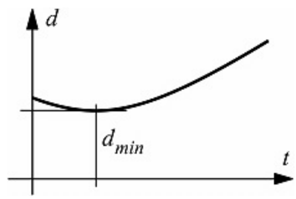
Ein (mathematisch vorgebildeter) Segler schippert bei Nacht und Nebel auf der Nordsee; in der Nähe seines Kurses zeigt die Karte einen Leuchtturm. Er interessiert sich aus naheliegenden Gründen für den Abstand $d_{\min}$, mit dem er den Turm passieren wird.



Ist seine (mathematische) Stärke die Algebra, wird er *Gleichungen* aufstellen und die Werte $d_{\min}$ und $t_{\min}$, den Zeitpunkt, an dem er den Turm querab hat, berechnen.



Hat er in der Schule mehr bei der Analysis aufgepasst, wird er die *Abstandsfunktion* $d(t)$ aufstellen und einen Graphen zeichnen. Dieses Diagramm zeigt ihm die Entwicklung des Abstandes „Boot → Turm“ der nächsten Zeit. Natürlich kann er auch $d_{\min}$ und den Zeitpunkt $t_{\min}$ entnehmen.

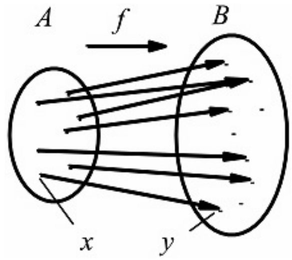


Tatsächlich wird unser Skipper keins von beiden tun! Er wird seinen Kurs in die Karte eintragen und alle Informationen dort abgreifen. Auch mathematisch vorgebildete Segler rechnen nicht gern: Seeleute sind „Sehleute".

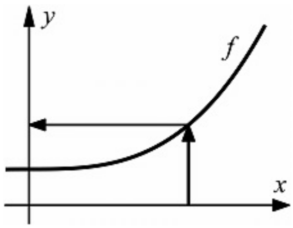
Bevor wir uns kopfüber in die Funktionen stürzen, sollten wir uns klar machen, was eine Funktion oder Abbildung eigentlich ist. Bemühen wir das in Mathe-Witzen gern vorgeführte Trio, so könnte man verschiedene **Definitionen** zusammenstellen.

Der *Mathematiker* wäre mit folgender Formulierung zufrieden:

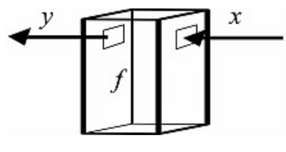
Gegeben seien zwei nichtleere Mengen A und B. Es sei jedem Element x aus der Menge A auf eine bestimmte Weise genau ein Element y aus der Menge B zugeordnet. Diese Zuordnung heißt dann eine Funktion oder *Abbildung* (z.B. f). Die Menge A nennt man den Definitionsbereich oder die Urbildmenge, die Menge B den Wertebereich oder die Bildmenge.



Der *Physiker* würde herausstellen, dass der Wert einer abhängigen Variable (z.B. y) gesetzmäßig vom Wert einer frei wählbaren unabhängigen Variablen (z.B. x) abhängt. Dieses Gesetz würde er *Funktion* nennen, ihm einen Namen geben (z.B. f) und sagen: „y gleich f von x" $\rightarrow$ $y = f(x)$

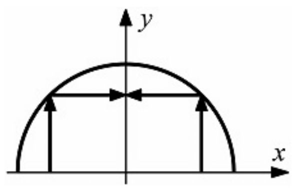


Der *Ingenieur* würde den maschinentechnischen Aspekt bevorzugen, den wir bereits bei den Folgen kennengelernt haben. Eine Funktion gleicht einer Maschine: Eingangsseitig füttert man x-Werte ein und erhält nach Bearbeitung durch die Maschine namens f am Ausgang die Werte y $\rightarrow$ $y = f(x)$.

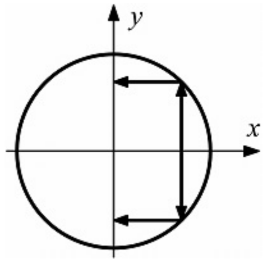


Wichtig ist die *eindeutige* Zuordnung:

$y = +\sqrt{1-x^2}$ *ist* eine Funktion; dass verschiedene x-Werte den gleichen y-Wert haben, ist zulässig.



$y = \pm\sqrt{1-x^2}$ ist *keine* Funktion: ein x-Wert hat zwei y-Werte. Der Ausdruck ist nicht zweideutig, sondern *mehrwertig*.



Das sind sehr weitgefasste Definitionen, die auch abstruse Vorschriften und Mengen zulassen. Lassen Sie sich einmal folgende Funktion auf der Zunge zergehen, die von keinem geringeren als L. Dirichlet, Nachfolger von C. F. Gauß in Göttingen, kreiert wurde:

y ist 0	für alle rationalen x,
y ist 1	für alle nichtrationalen x!

Denken oder blättern Sie zurück zum Abschnitt 1.2 „Zahlen". Dort hatten wir gewisse Schwierigkeiten, die irrationalen Zahlen auf der dicht an dicht mit rationalen Zahlen belegten Zahlengeraden unterzubringen und nun machen Sie sich ein Bild von der obigen Funktion!

Mathematiker haben ihre Freude an solchen Dingen. Verständlich, für einen Zoologen ist das australische Schnabeltier auch aufregender als die holländische Feld-, Wald- und Wiesenkuh.

Wir werden uns in Zukunft aber fast ausschließlich mit „braven", sprich: stetigen, glatten und in Formeln gefassten Funktionen befassen, die ggf. ein paar Fehlstellen haben.

Als Definitionsmenge der unabhängigen Variablen x (als Inputwerte) sind nunmehr die reellen Zahlen (x aus R!) zugelassen.

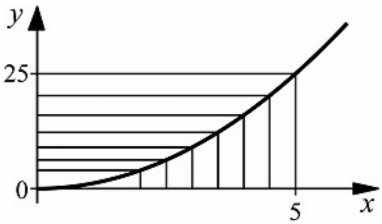
6.1 Darstellungsarten

Tabellarische Darstellung

Handgemachte Wertetabellen oder „Vierstellige Vollständige Logarithmische und Trigonometrische Tafel" sind mit der Verbreitung des Taschenrechners aus der Mode gekommen.

Graphische Darstellung

Die Darstellung bedarf nach der Vorbereitung bei den Folgen keiner langen Erklärung. Wir tragen über der Zahlengeraden senkrecht zum jeweiligen Inputwert x die Größe y des entsprechenden Funktionswertes auf; links zeichnen wir den verwendeten Maßstab der Funktionswerte. Da wir nun die reellen Zahlen als Definitionsbereich haben, entsteht eine Kurve in der Ebene.



D. h.: Eigentlich ist die so entstandene *Kurve* gar keine! Der *Graph* ist neben Wertetabelle, Leiterdiagramm etc. nur eine spezielle *Darstellungsart* unserer Funktion.

Es gibt aber eine andere, mehr „kurvige" Lesart des Graphen: Man berechnet für jedes x das entsprechende y. Die so ermittelten Zahlenpärchen (x, y) fasst man als Koordinaten eines Punktes in der (x, y)-Ebene auf, zeichnet alle errechneten Punkte in die „koordinierte" Ebene und erhält als graphische Darstellung der Funktion eine Kurve.

Gerade wegen dieser Doppeldeutigkeit hat sich der Graph als das beste Mittel zur Veranschaulichung einer Funktion durchgesetzt. Im Zeitalter der Computer ist so ein Diagramm zudem blitzschnell erstellt.

Analytische Darstellung

Für die rechnerische Behandlung brauchen wir eine analytische Beschreibung, eine algebraische Formel. Das ist nun seit René Descartes (1596 bis 1650) und der Einführung der nach ihm benannten *Kartesischen Koordinaten* und dem dazu passenden Achsenkreuz kein Problem.

Wir wollen uns die gebräuchlichsten vier Darstellungsarten anschauen.

1. Die Explizite Form $y = f(x)$

ist eindeutig die für unsere Zwecke wichtigste und bequemste (nicht nur weil sie aus der Schule hinlänglich bekannt ist).

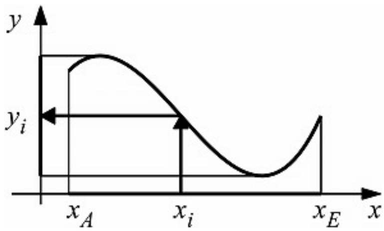
Der Einheits(halb)kreis: $y = +\sqrt{1 - x^2}$

Eine Parabel: $y = 3x^2 + 2$
Die Sinusschwingung: $y = \sin(2x)$

Wir werden alle wichtigen Gedanken und Methoden mit der Expliziten Form entwickeln. Auch die anderen, weiter unten angeführten Formen versucht man möglichst auf diese Form zurückzuführen.

Man wählt ein x-Intervall von x_A bis x_E, setzt jedes x in die Formel ein und bekommt durch direktes Ausrechnen das passende y. Man sagt auch: Das x-Intervall wird auf das entsprechende y-Intervall abgebildet.

$y = f(x)$ kann man als *Bestimmungsgleichung* ansehen.



Die Vorschrift $y = f(x)$ sollte dabei *eindeutig* jedem Punkt des x-Intervalls genau ein y zuordnen, sonst verdient sie nicht *Funktion* genannt zu werden.

Wird auch noch verlangt, dass umgekehrt jedem y des y-Intervalls eindeutig genau ein Punkt des x-Intervalls zugeordnet werden kann, spricht man insgesamt von einer *eineindeutigen* Abbildung f (siehe Abschnitt 6.4 „Umkehrfunktionen").

2. Die Parameterform $x(p) = f(p)$, $y(p) = g(p)$
mit p als *Parameter* bzw. Laufvariable

Sie bietet ein Höchstmaß an Freiheit, da man *zwei* Funktionen zur Beschreibung einer Kurve oder eines Bewegungsablaufs hat (und wird in vielen Bereichen der Mathematik eingesetzt).

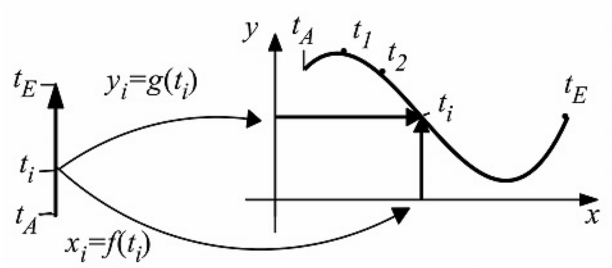
Bevorzugte Parameter: die Zeit t, ein Winkel φ.

Eine Parabel: $x(t) = t$, $y(t) = t^2$; $t = t_A \ldots t_E$
in Kurzschrift: $f(t) = \big(x(t), y(t)\big) = \big(t, t^2\big)$

Der Einheits(voll)kreis: $x(\varphi) = 1 \cdot \cos(\varphi)$, $y(\varphi) = 1 \cdot \sin(\varphi)$; $\varphi = 0 \ldots 2\pi$
kurz und bündig: $g(\varphi) = \big(x(\varphi), y(\varphi)\big) = \big(1 \cdot \cos(\varphi), 1 \cdot \sin(\varphi)\big)$

(Physik und Technik formulieren 2D- und 3D-Wege und -Bahnen parametrisch.)

Wir haben gewissermaßen zwei *Bestimmungsvorschriften* vor uns, für jede Koordinate eine.



Man denke sich eine Laufvariable, z.B. die Zeit *t*. *t* soll alle Zahlenwerte von t_A bis t_E durchlaufen und rechne mit jedem (Parameter-)Wert *t* per Funktionsvorschrift 1 ($x = f(t)$) ein *x* und per Funktionsvorschrift 2 ($y = g(t)$) ein *y* aus. Die jeweils zu einem *t* gehörigen *x*- und *y*-Werte kann man zusammenfassen und in der *kartesischen Ebene* als „Punktekurve" darstellen.

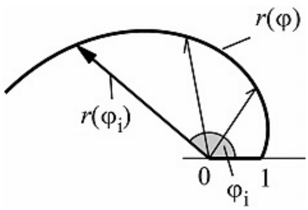
Kleiner Nachteil: Der eigentliche Auslöser der Kurvenpunkte, der Parameter *t* taucht in der Ebene nicht mehr auf. (Man kann *t* aber durch entsprechende Markierungen an der Kurve wieder ins Bild mogeln.)

Großer Vorteil: Die Darstellung ist kein Graph, sondern eine echte *Kurve*, ein *Weg*, eine *Bahn*.

3. Die Polare Form $r(\varphi) = f(\varphi)$
(*r* ist abhängig von φ; *r* ist eine Funktion *f* von φ)

Sie ist recht nützlich wenn es „rund geht" (und es geht in Natur und Technik recht häufig rund).

Der Einheits(voll)kreis:	$r(\varphi) = 1$ (!)
Die Archimedische Spirale:	$r(\varphi) = a \cdot \varphi$ (φ im Bogenmaß)
Die logarithmische Spirale:	$r(\varphi) = e^{(a \cdot \varphi)}$, der wir einen eigenen Abschnitt widmen werden.



Es liegt wieder eine *Bestimmungsform* vor: Zu jedem gegebenen φ kann man nach Vorschrift f direkt einen Abstand r vom Nullpunkt aus berechnen und auf dem entsprechenden Winkelschenkel abtragen. Nicht einmal ein komplettes Achsenkreuz braucht man: Nur eine Bezugsgerade, von der aus man φ zählt, und eine *Einheit,* um r abtragen zu können.

Bei Bedarf kann man die Polarform in andere Formen umrechnen, wozu dann doch ein Achsenkreuz erforderlich ist.

4. Die Implizite Form $F(x,y)=0$
ist in der Handhabung recht unbequem (sofern man sie nicht durch Auflösung nach x oder y in die Explizite Form überführen kann).

Der Einheitskreis: $x^2+y^2-1=0$

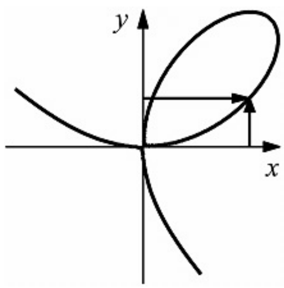
Das Kartesische Blatt: $x^3+y^3-3\cdot x\cdot y=0$

Die Kegelschnitte sind häufig implizit formuliert.

Sie sieht aus wie eine Gleichung, kann aber zu einer Funktion uminterpretiert werden: Für jedes eingesetzte x gibt es ein davon abhängiges $y\to y(x)$.

Also: $x^2+y(x)^2-1=0$; $x^3+y(x)^3-3\cdot x\cdot y(x)=0$

$F(x,y)=0$ stellt nur eine *Bedingung* oder Forderung auf: „Finde zu einem vorgegebenen x ein y, sodass die Gleichung $F(x,y)=0$ erfüllt ist!“ Eine Handlungsanweisung gibt es nicht.



In vielen Fällen muss man ein kluges Buch, einen klugen Algebraiker oder einen Computer zu Rate ziehen. Der Computer benutzt im Zweifelsfalle die Holzhammermethode: Er setzt ein x in die Gleichung ein und testet eine lange Reihe von y's, bis er ein passendes gefunden hat.

Für einige gebräuchliche Kurven gibt es Gott sei Dank benutzerfreundlichere alternative Darstellungsformen. Der Blick in ein „Taschenbuch der Mathematik“ zeigt z.B. für die Ellipse die formelmäßige Darstellung in allen hier vorgeführten Formen. Nun ist es höchste Zeit, konkret zu werden.

6.2 Die Standardfunktionen

Der Katalog ist erfreulich kurz: Er besteht aus nur drei Grundtypen!

1. Die Potenzfunktionen: $y = x^k$ (die Universalfunktionen)
2. Die Exponentialfunktionen: $y = k^x$ (die Wachstumsfunktionen)
3. Die Trigonometrischen Funktionen: $y = \sin(x),\ \cos(x),\ \tan(x),...$
   (die periodischen (Schwingungs-)funktionen)

Die Vielfalt der Funktionsvorschriften entsteht daraus, dass man diese Grundfunktionen (mit den üblichen Rechenzeichen) *kombinieren, umkehren*, „*auf den Kopf stellen*" (die Reziprokfunktion bilden) und *verketten* kann.

Für die *Umkehrfunktionen* werden wir uns einen kleinen eigenen Abschnitt gönnen und dort auch die *Reziprokfunktionen* vorstellen.

Neues verspricht die *Verkettung* von Funktionen $y = g(f(x))$. Eine *verkettete* oder *geschachtelte* Funktion liegt vor, wenn man erst die „innere" Funktion $f(x)$ auswerten muss, um mit diesem Wert die „äußere" Funktion $g(f(x))$ zu füttern.

> *Beispiel*: $y = \sin(2x^2)$: Man muss für jedes x erst die *innere* Funktion $f = 2x^2$ berechnen, um mit diesem Wert den *äußeren* Sinus ermitteln zu können.

Man kann Funktionen gewissermaßen als „Höhere Zahlen" betrachten und behandeln. Neben den bekannten elementaren Rechenarten müsste man das Differenzieren und Integrieren der nächsten Abschnitte dann als „Höhere Rechenarten" bezeichnen.

Zu 1. Die Potenzfunktionen: $y = x^k$

Die beiden einfachsten Vertreter: die konstante Funktion $y = a = konst.$, die identische Funktion $y = x = x^1$

Die erste „richtige" Potenzfunktion: $y = x^2$

Lässt man als Exponenten die *rationalen* Zahlen zu, kann man auch die Wurzelfunktionen, die Umkehrfunktionen darunter abhandeln. Bei *irrationalen* Exponenten wie $y = x^{\sqrt{2}}$ muss man sich erinnern, dass man jede irrationale Zahl durch eine rationale Zahl, einen Bruch beliebig genau annähern kann.