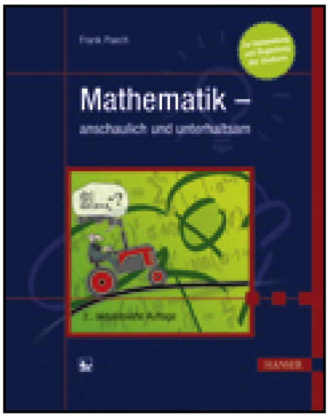


Leseprobe

Frank Paech

Mathematik - anschaulich und unterhaltsam

ISBN: 978-3-446-42788-4

Weitere Informationen oder Bestellungen unter

http://www.hanser.de/978-3-446-42788-4

sowie im Buchhandel.

$$(p =) \quad \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{x - x_0} \tag{5.3.9}$$

Lineare Funktionen lassen sich als Näherungsfunktionen verwenden.

Wenn die Punkte $(x_0,\ y_0)$ und $(x_1,\ y_1)$ Elemente einer beliebigen Funktion sind und die Punkte nahe genug zusammenliegen, kann man in der Regel den Graphen dazwischen näherungsweise als Gerade mit dem Quotienten (*5.3.8*) als Steigung p betrachten. Dann lässt sich die Zweipunkteform dazu benutzen, um den Funktionswert $f(x)$ einer zwischen x_0 und x_1 gelegenen Stelle x näherungsweise zu ermitteln.

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \cdot (x - x_0) \tag{5.3.10}$$

Die Zweipunkteform (*5.3.9*) wurde einfach nach y aufgelöst und die Werte der linearen Funktion durch Funktionswerte der beliebigen Funktion ersetzt. Wenn Sie mithilfe von (*5.3.10*) den Zwischenwert einer Funktion näherungsweise ermitteln, heißt das (lineares) *Interpolieren*.

5.4 Der Differenzenquotient

Der Graph einer linearen Funktion hat im ganzen Definitionsbereich überall die gleiche Steigung. Was wird aus dem Steigungsbegriff bei nichtlinearen Funktionen? Schicken wir wieder unseren Traktorfahrer los und fragen, wie groß denn die Steigung eines Funktionsgraphen im Punkt (x_0, y_0) bzw. „an der Stelle x_0“ sei.

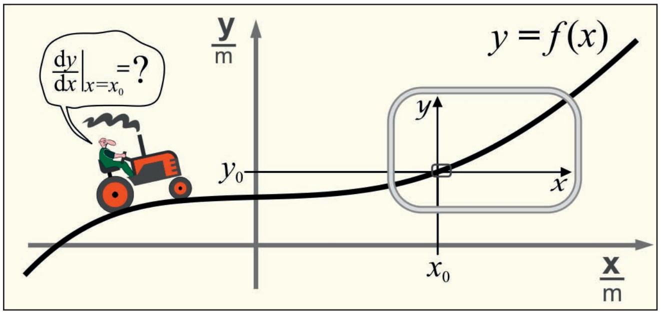
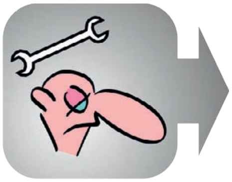


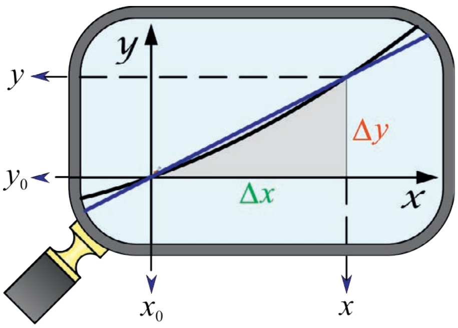
Bild 5.4.1
Steigungsbegriff im Falle einer nichtlinearen Funktion



Merksatz 5.4.1

Merke:
Bei Funktionsgraphen ergibt sich die y-Koordinate eines Punktes $(x,\ y)$ zwangsläufig aus dem Funktionswert, d. h. $y = f(x)$. Deshalb ist dieser Punkt bereits durch die Erwähnung der x-Koordinate festgelegt. Anstatt „Punkt (x,y)“ sagt man (auch wenn es holperig klingt): „an der **Stelle** x“. Im vorliegenden Fall suchen wir „**die Steigung an der Stelle x_0**“!

Da die gesuchte Steigung eine lokale Angelegenheit ist, müssen wir nur einen kleinen Teil des Funktionsgraphen in der Umgebung des Punktes (x_0, y_0) betrachten. Die beiden symbolischen Lupen in *Bild 5.4.1* zeigen, welche Bildausschnitte betrachtet werden sollen. Beginnen wir mit dem größeren Ausschnitt:



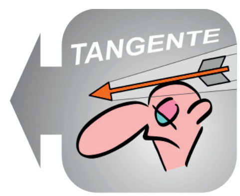
Schauen Sie genau hin, auf dem Graphen krabbelt ein Maikäfer.

Bild 5.4.2
Ausschnittsvergrößerung des Funktionsgraphen

Ignorieren wir einmal die Krümmung des Graphen und gehen genauso wie bei den linearen Funktionen vor (*vgl. Bild 5.3.4*). Dazu wählen wir rechts neben dem Punkt (x_0, y_0) einen zweiten Punkt (x, y) auf dem Graphen und zeichnen ein „Steigungsdreieck“. Aber ein Steigungsdreieck ohne Gerade? Denken wir uns einfach die Hypotenuse dieses Dreiecks zu einer Geraden verlängert. Diese Gerade – in Bild 5.4.3 blau eingezeichnet – nennen wir *Sekante*! Dann ist der Quotient $\Delta y/\Delta x$ die *Steigung* dieser Sekante.

Sinnvoll oder nicht: ein Steigungsdreieck ohne Gerade?

Merke:
Eigentlich heißt eine Gerade, die einen Kreis in zwei Punkten schneidet, **Sekante** und eine Gerade, die mit einem Kreis nur einen Punkt gemeinsam hat, ihn sozusagen berührt, **Tangente**. **Beide** Begriffe werden ebenfalls für Kurvenbögen benutzt!



Merksatz 5.4.2

Da der Quotient aus Differenzen von Funktionswerten und der Differenz der zugehörigen Argumente besteht, heißt der Quotient $\Delta y/\Delta x$ *Differenzenquotient*. Bezüglich des Funktionsgraphen kann die Sekantensteigung als **mittlere Steigung** im Intervall (x_0, x) angesehen werden – die wollen wir nicht, uns interessiert die Steigung **an der Stelle x_0**!

Differenzenquotient: mittlere Steigung

Gehen wir jetzt zu dem wesentlich kleineren Bildausschnitt über und vergrößern ihn auf das Zehnfache (*s. Bild 5.4.3*). Damit wird der in *Bild 5.4.2* noch nicht zu erkennende Maikäfer sichtbar. Dagegen ist von der Krümmung des Funktionsgraphen nichts mehr zu erkennen, d. h., die Kurve ist visuell nicht mehr von einer Geraden zu unterscheiden. Damit wird der Steigungsbegriff auch ohne Anführungszeichen anwendbar. Wir zeichnen ein verkleinertes Steigungsdreieck. Die Stelle x wurde dabei so dicht an die Stelle x_0 herangerückt, dass Δx im Vergleich zu *Bild 5.4.2* auf den zehnten Teil zusammengeschrumpft ist. Berechnen wir nun den Wert des Differenzenquotienten, können wir zwar immer noch nicht sicher sein kann, ob sich hinter der Strichstärke doch noch eine Krümmung verbirgt, aber jetzt müsste bereits eine brauchbare Näherung für die gesuchte Steigung vorliegen.

Eine Krümmung ist nicht mehr erkennbar: Der Graph kann näherungsweise als Gerade angesehen werden.

Bei der Vergrößerung wird der Käfer sichtbar. Die Krümmung ist nicht mehr erkennbar.

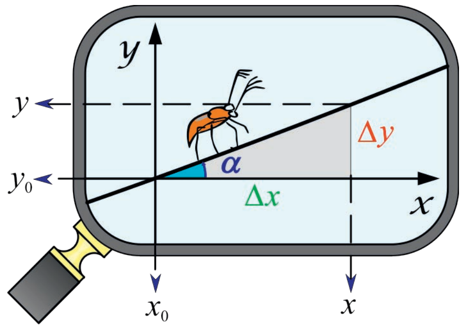


Bild 5.4.3
Nochmalige Ausschnittsvergrößerung

Auf alle Fälle dürfte die Vorgehensweise klar sein. Man lässt die Stelle x sukzessive an die Stelle x_0 heranrücken und ermittelt jeweils den Wert des Differenzenquotienten. Wenn sich die avisierte signifikante Stelle der Sekantensteigung nicht mehr ändert, können wir die Prozedur beenden. Die gesuchte Steigung ist gefunden.

Merksatz 5.4.3

Merke:
Bitte vergessen Sie nicht, dass die Variable x eine freie Variable ist. Ihr können deshalb beliebige Werte zugewiesen werden! Im Gegensatz dazu ist x_0 gebunden!
Wegen $\Delta x = x - x_0$ kann man x durch $x_0 + \Delta x$ ersetzen. Aus $f(x)$ wird somit alternativ im xy-Koordinatensystem $f(x_0 + \Delta x)$!
Beachten Sie unbedingt: $f(x_0 + \Delta x) \neq f(x_0) + \Delta x$!

Im verschobenen xy-Koordinatensystem stellt sich der Differenzenquotient wie folgt dar:

(5.4.1)

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \underline{\underline{\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}}}$$

Es ist unbedingt erforderlich, dass Sie alle Darstellungsmöglichkeiten des Differenzenquotienten verstehen! Hier handelt es sich um das Fundament der Differenzialrechnung! Testen Sie Ihr Verständnis und betrachten dazu folgendes Bild!

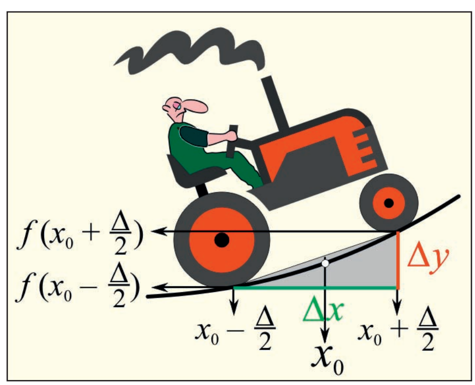


Bild 5.4.4
Alternativer Differenzenquotient

Unser Traktor demonstriert einen alternativen Differenzenquotienten. Wie oben erwähnt, ist die Sekantensteigung als mittlere Steigung in einem Intervall der Breite Δx anzusehen. Warum wird das Intervall nicht so gelegt, dass die Stelle x_0 in der Intervallmitte liegt? Auf diese Weise könnte der Mittelwert der wahren Steigung auch ohne drastische Verkleinerung von Δx nahe kommen.

Verbesserter Differenzenquotient

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \frac{\Delta x}{2}) - f(x_0 - \frac{\Delta x}{2})}{\Delta x} \qquad (5.4.2)$$

In (*5.4.3*) ist angegeben, welche konkrete Funktion und welche Stelle x_0 für die nichtlineare Funktion in *Bild 5.4.1* bisher verwendet wurde. In *Bild 5.4.2* betrug $\Delta x = 0{,}2$ – in *Bild 5.4.3* waren es nur noch 0,02.

$$f(x) = x^3 - \tfrac{1}{2} \cdot x^4 + \tfrac{1}{10} \quad \text{und} \quad x_0 = 0{,}4 \qquad (5.4.3)$$

Lassen wir uns nun von EXCEL ein paar Differenzquotienten für diese Funktion an der Stelle $x_0 = 0{,}4$ für verschiedene Δx konkret ausrechnen:

Tabelle 5.4.1
Differenzenquotienten

Δx	$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ nach 5.4.1	$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ nach 5.4.2
+ 0,20000	0,50000	0,35400
– 0,20000	0,22000	
+ 0,02000	0,36648	0,35202
– 0,02000	0,33768	
+ 0,00200	0,35344	0,35200
– 0,00200	0,35056	
+ 0,00020	0,35214	0,35200
– 0,00020	0,35186	
+ 0,00002	0,35201	0,35200
– 0,00002	0,35199	
+ 1·10^{-14}	**0,35250**	**0,35232**

Rote Zeile: Aufgrund der Differenzbildung sind zu viele signifikante Stellen verloren gegangen. Die Werte sind deshalb unbrauchbar!

In *Tabelle 5.4.1* wird gezeigt, dass man Δx auch negativ wählen kann. In diesem Fall wird das Steigungsdreieck am Punkt (x_0, y_0) gespiegelt. Gegen- und Ankathete werden negativ. Das Vorzeichen des Differenzenquotienten ändert sich nicht. Man erhält damit die mittlere Steigung für ein links von der Stelle x_0 liegendes Intervall der Breite $|\Delta x|$. Im Falle des symmetrischen Differenzenquotienten kann sich dessen Wert durch Vorzeichenänderung von Δx nicht ändern.

Man kann anhand der Tabelle bereits vermuten, wie sich die Werte der Differenzenquotienten entwickeln, wenn man für Δx die Glieder einer Nullfolge einsetzt. Sie nähern sich immer mehr dem Wert $0{,}35\underline{2}$; diesen Grenzwert können wir wohl als die gesuchte Steigung an der Stelle $x = x_0$ ansehen.

Die Steigung an der Stelle x_0 ist gleich $0{,}35\underline{2}$.

Für den Grenzwert gibt es auch eine kompakte Schreibweise (*s.* (*5.4.4*)). Man liest das so: „Limes Δx gegen null Δy durch Δx ist gleich effgestrichen von x_0“. Mit „Δx gegen null“ wird gesagt, dass Δx Glieder einer beliebigen (deswegen wird auch kein Index mitgeschrieben) Nullfolge sind. Mit dem Wort „Limes“

wird gesagt, dass die zugeordneten Folgen von Differenzenquotienten konvergieren. Der **einheitliche** Grenzwert, der hier die geometrische Bedeutung einer Steigung hat, soll $f'(x_0)$ heißen („effgestrichen von x_0“)! Die Schreibweise ist ideal, enthält sie doch sowohl den speziellen Funktionsnamen f als auch die jeweilige Stelle x_0. An dem Hochkomma als Postfix erkennt man, dass nicht der Funktionswert, sondern die Steigung an der Stelle x_0 gemeint ist.

(5.4.4)

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$$

Rotes Tabellenende – eine weitere Genauigkeitssteigerung ist nicht mehr möglich.

Leider lassen sich derartige Grenzwerte nicht mit Computern berechnen. Erinnern Sie sich bitte an die Gleitkommazahlen in Abschnitt 4.2! Bei der Differenzbildung gehen signifikante Stellen verloren. Wenn Δx zu klein wird, spielen die errechneten Werte für die Differenzenquotienten verrückt. Bei unserem Beispiel passiert das bei $\Delta x = 10^{-14}$ und kleiner. Die Werte sind deshalb in der Tabelle rot unterlegt! Aus diesem Grund kann man $f'(x_0)$ nur erraten. Bei uns ist wohl $f'(x_0)$ gleich $0{,}35\underline{2}$. Sollte etwa $f'(x_0)$ eine Irrationalzahl sein, wäre man allerdings völlig aufgeschmissen. Wir werden im übernächsten Abschnitt sehen, dass es mit vielen Tricks doch gelingt, derartige Grenzwerte exakt zu ermitteln.

5.5 Der Differenzialquotient

Gerade und Funktionsgraph: ein gemeinsamer Punkt und dort gemeinsame Steigung

In *Bild 5.5.1* wurde der in *Bild 5.4.2* bereis dargestellte Kurvenbogen noch einmal gezeichnet. Die Sekante wurde fortgelassen und stattdessen eine Gerade durch den Punkt (x_0, y_0) mit der vermuteten Steigung $f'(x_0) = 0{,}352$ eingetragen. Weiterhin wurde rechts von dem Punkt (x_0, y_0) ein Steigungsdreieck gezeichnet. Die Länge der Ankathete ist frei wählbar, hier wurde 0,2 genommen! Die Gegenkathete muss dann $0{,}352 \cdot 0{,}2 = 0{,}0704$ lang sein.

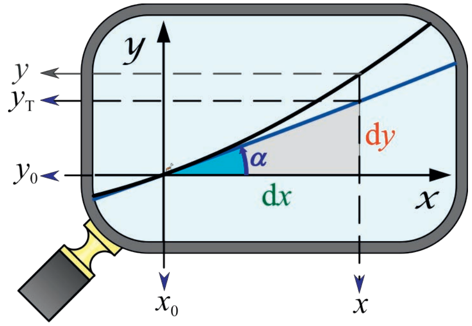


Bild 5.5.1
Funktionsgraph mit Tangente

Die Gerade ist eine Tangente!

Auf diese, in *Bild 5.5.1* blau gezeichnete Gerade, wollen wir uns im Folgenden konzentrieren! Man erkennt, dass diese Gerade die Kurve nicht in zwei Punkten schneidet, sondern sie berührt (tangiert). Sie ist eine Tangente! Ganz im Gegensatz zu den aus den Differenzenquotienten ermittelten Geraden. Diese schneiden die Kurve in zwei Punkten, es sind Sekanten.