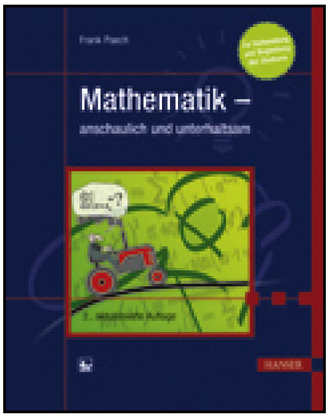


Leseprobe

Frank Paech

Mathematik - anschaulich und unterhaltsam

ISBN: 978-3-446-42788-4

Weitere Informationen oder Bestellungen unter

http://www.hanser.de/978-3-446-42788-4

sowie im Buchhandel.

Beachten Sie den unterschiedlichen Gebrauch des Dimensionsbegriffs!

dinaten einer Vektorgröße gilt alles, was bereits in Abschnitt 4.1 *Bild 4.1.1* gesagt wurde. Soll eine Linearkombination oder ein Spaltenvektor mit konkreten Zahlenwerten eine Einheit bekommen, betrachtet man sie wie einen skalaren Faktor – allerdings hängt man, wie bei den normalen Größen auch, die Einheit hinten an. Damit ein solcher Faktor auf jeden Summanden einer Linearkombination verteilt wird, muss diese in Klammern gesetzt werden. Im Falle eines Koordinatenvektors sind Klammern ohnehin schon vorhanden.

Sonderstatus: Ortsvektoren

Obwohl ein Koordinatenvektor aus einer anderen Menge als das zugehörige Original stammt, ist es bei Größenvektoren nicht notwendig, ihnen verschiedene Namen zu geben. Es entstehen keine Verwechslungskonflikte. Man nimmt in beiden Darstellungen die üblichen Formelzeichen und stattet sie durch einen Pfeil bzw. mit den Indizes x, y, z aus. Einen Sonderstatus nehmen Ortsvektoren ein. Der Vektor bekommt das Formelzeichen „r“ (von Radiusvektor) und die Koordinaten werden mit x, y und z benannt. Puristen sind die in Physik und Technik gern verwendeten Schreibweisen ein Graus. Sie verwenden (auch wenn sie nie über das Dreidimensionale hinauskommen) konsequent das Formelzeichen x und nummerieren sowohl die Koordinaten als auch die Basisvektoren mit 1, 2, 3 durch:

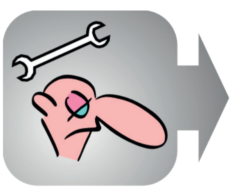
(8.5.6)

„Puristische“ Schreibweise für einen Ortsvektor

$$\underline{\text{Radiusvektor}}:\ \vec{r} = x \cdot \mathfrak{i} + y \cdot \mathfrak{j} + z \cdot \mathfrak{k} \qquad \text{bzw.} \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3 \qquad \text{bzw.} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Ein Koordinatenvektor ist, wenn erforderlich, leicht mithilfe der Basisvektoren in die Linearkombination zurück verwandelbar (*s. Bild 8.5.2*). Beachten Sie bitte auch den folgenden Tipp!



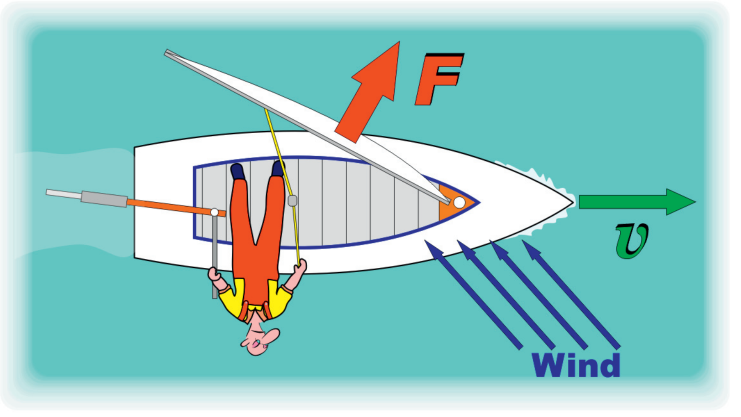
Merksatz 8.5.5

Tipp:
Kennzeichnen Sie, wenn möglich, die Koordinaten von **Größenvektoren** mit den Indizes x, y, z und nicht mit 1, 2, 3! Sie vermeiden damit einen unübersichtlichen Indexsalat. Die Verwendung der indexfreien Basisvektoren ($\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$) erspart Ihnen zusätzlich mühselige Index- und Pfeilbeschriftungen. Für handschriftliche Aufzeichnungen schreiben Sie ($\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$) in einer von Ihrer Normalschrift **deutlich** verschiedenen Schnörkelschrift (US: funny letters)!

8.6 Das skalare Produkt

Zusätzliche Verknüpfungen sind möglich!

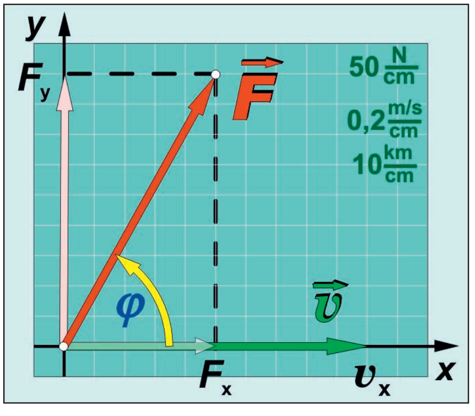
Für die Vektorraumeigenschaft einer beliebigen Menge reichen die beiden vorher besprochenen Verknüpfungen aus. Das soll aber nicht heißen, dass man sich für einen Vektorraum nicht zusätzliche Verknüpfungen ausdenken kann. Ob diese dann nützlich sind oder nicht, ist eine andere Sache. In der Menge der Translationsvektoren ist bereits durch die (euklidische) Geometrie eine zusätzliche Verknüpfung vorhanden und die soll anhand eines Beispiels herausgearbeitet werden.



Gegen den Wind segeln geht nicht – aber schräg von vorn liefert der Wind Vortrieb.

Bild 8.6.1
Tragflügelprinzip beim Segel

In *Bild 8.6.1* sehen Sie einen Jollensegler aus der Perspektive einer über ihm fliegenden Möwe. Die blauen Pfeile geben die Richtung des scheinbaren Windes an. Das Segel wirkt wie ein hochkant gestellter Tragflügel und wird von diesem Wind umströmt. Aufgrund des Tragflügelprinzips entstehen dynamische Kräfte, die im Bild durch einen dicken roten Pfeil zusammengefasst sind. Diese Kraft, bzw. ein Teil davon, treibt das Boot an. Die Geschwindigkeit, die sich aufgrund dieses Phänomens aufbaut, ist durch einen grünen Pfeil angedeutet. Verlegen wir das Szenario in das gewohnte kartesische Koordinatensystem und tragen dort die beiden Vektorgrößen Kraft und Geschwindigkeit mit vernünftigen schlanken Pfeilen ein (*s. Bild 8.6.2*)!



Nur die x-Komponente der Kraft liefert Vortrieb.

Bild 8.6.2
Zerlegung der Kraft in Komponenten

Leider gibt es beim Einzeichnen verschiedener Vektorgrößen in ein einziges Koordinatensystem Irritationen. Der Grund liegt darin, dass für jede Vektorgröße ein eigenes Koordinatensystem erforderlich ist. In *Bild 8.6.2* handelt es sich im Grunde um **drei** Koordinatensysteme übereinander: eines für Kräfte, eines für Geschwindigkeiten und eines für den Ort. Der Ausweg: Die Achsen erhalten keine Skalierungsmarken. Die unterschiedlichen Skalierungen der Achsen werden in Form von Maßstabsfaktoren angegeben (*s. oben rechts in Bild 8.6.2*). Kein Problem sind die üblicherweise nicht mit eingezeichneten Basisvektoren $\imath$, $\jmath$. Sie gelten für alle Vektorgrößen.

Beachten Sie die Maßstabsfaktoren!

Innerhalb ihrer eigenen Koordinatensysteme dürfen Vektorpfeile (außer Ortsvektoren) beliebig verschoben werden (*vgl. Bild 8.1.2*). Zeichnet man – wie in *Bild 8.6.2* – alle Vektorgrößen in ein Koordinatensystem ein, sähe es fürchterlich aus, wenn der Kraftpfeil, weil frei verschiebbar, in „seinem" Koordinatenursprung beginnt, aber der Ort des Angriffspunktes dieser Kraft „woanders" liegt. Wir umgehen dieses Dilemma mit einem lausigen Trick: Wir legen den Koordinatenursprung für den Ort in die Bootsmitte und wählen den Maßstab für das Koordinatensystem der Ortsvektoren so riesig (10 km/cm), dass das Boot darin auf einen Punkt von 5 µm Durchmesser zusammenschrumpft. Damit können wir den Kraft- und den Geschwindigkeitspfeil getrost im Koordinatenursprung angreifen lassen – wir kommen später bei der Besprechung von Vektorfeldern auf das „Problem" zurück.

Ein Problem, das eigentlich keines ist!

„Angriffspunkt": Koordinatenursprung

Das gemeinsame Koordinatensystem ist (optional) so gerichtet, dass der Geschwindigkeitsvektor in Richtung des Basisvektors $\imath$ zeigt. Die Kraft wurde als Linearkombination der beiden Basisvektoren dargestellt und deren Komponenten als Pfeile eingetragen. Beachten Sie: Die Vektorsumme der Komponenten ist gleich der Kraft! Das Boot würde sich genauso verhalten, wenn die Komponenten eigenständige Kräfte wären – also z. B. ein Außenborder für die x-Richtung und starker Seitenwind (ohne Segel) für die y-Richtung. Die Kraftkomponente in x-Richtung bewirkt den Vortrieb – die Kraftkomponente in y-Richtung (fast) nichts, denn ein Schwert (oder ein Kiel) hält mit der Widerstandskraft seiner Breitseite dagegen. Das Boot bewegt sich in erster Näherung wie auf einer Schiene in x-Richtung.

Jolle: Schwert/Jacht: Kiel

Wir sollen jetzt erfassen, wie viel Joule pro Sekunde Petrus dem Jollensegler gratis liefert. Gemäß (*6.8.5*) gilt für den Energiestrom (Leistung) die Gleichungskette (*8.6.1*). Dabei ist dW das Produkt aus der Kraft (in Richtung des Weges dx) und dem Weg (in der Zeit dt) dx. Da man mit Differenzialen ganz normal rechnen kann, ergibt sich für den momentanen Energiestrom das Produkt aus Kraft (in Richtung des Weges) und der (Momentan-)Geschwindigkeit.

Gratisenergie von Petrus

(8.6.1)

$$P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \frac{F_x \cdot \mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = F_x \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \underline{\underline{F_x \cdot v_x}}$$

Da sich Kraftvektoren wie Translationsvektoren verhalten, können wir die ganz gewöhnliche Trigonometrie einsetzen. Betrachten wir das rechtwinklige Dreieck mit dem Betrag der Kraft als Hypotenuse und der x-Koordinate der Kraft als Ankathete zum Winkel φ.

Dreieck aus Größenvektoren

(8.6.2)

$$\cos(\varphi) = \frac{F_x}{|\vec{F}|} \Rightarrow F_x = |\vec{F}| \cdot \cos(\varphi), \quad v_x = |\vec{v}|$$

Die x-Koordinate der Kraft ergibt sich aus dem Kosinus des Winkels und dem Betrag des Kraftvektors. Da die x-Koordinate der Geschwindigkeit gleich deren Betrag ist, lässt sich (*8.6.2*) umschreiben:

(8.6.3)

$$P = |\vec{F}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\varphi)$$

Der Vorteil von Formel (*8.6.3*) gegenüber ihrer Vorgängerin (*8.6.2*) ist, dass nicht mehr Gebrauch von dem speziellen Koordinatensystem gemacht wird. Die beiden Vektoren müssen auch nicht in der *xy*-Ebene liegen. Sie dürfen durchaus dem dreidimensionalen Anschauungsraum angehören. Mit (*8.6.3*) ist eine zweistellige Verknüpfung definiert, die je zwei Translationsvektoren des Anschauungsraumes eindeutig einen Skalar zuordnet. Die Verknüpfung heißt *skalares Produkt* und bekommt einen **dicken** Punkt als Operatorzeichen.

Eine äußere Verknüpfung! Das Produkt ist aus einer anderen Menge als die Faktoren.

$$\text{"}\bullet\text{"}: \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{R},\ \vec{a}, \vec{b} \mapsto \vec{a} \bullet \vec{b} := |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\left(\sphericalangle\left(\vec{a}, \vec{b}\right)\right) \qquad \textbf{(8.6.4)}$$

Das Symbol im Argument des Kosinus kennzeichnet den eingeschlossenen Winkel zwischen den vektoriellen Faktoren. Mithilfe des so definierten Operators erhält unsere Formel (*8.6.3*) die endgültige Fassung:

Hier ist jetzt der bereits angekündigte „dicke Punkt"!

$$P = \vec{F} \bullet \vec{v} \qquad \textbf{(8.6.5)}$$

Jetzt dürfte auch klar sein, weshalb die beiden „Faktoren" gern in ihrem Koordinatenursprung angetragen werden: Der eingeschlossene Winkel ist so ohne Hilfslinien erkennbar.

Lies „F punkt ***v*** *"!*

Da wir ein konkretes Beispiel vorliegen haben, besteht die Möglichkeit zu prüfen, ob das oben erklärte skalare Produkt (*8.6.3*)/(*8.6.5*) alle Sonderfälle korrekt erfasst.

φ	P	$\vec{F}$? $\vec{v}$		Bemerkungen
0	$\lvert\vec{F}\rvert \cdot \lvert\vec{v}\rvert$	$\vec{F} \parallel \vec{v}$	parallel	Optimaler Vorwindkurs
90°	0	$\vec{F} \perp \vec{v}$	senkrecht	Kraft bewirkt keinen Vortrieb, $P = 0$
180°	$-\lvert\vec{F}\rvert \cdot \lvert\vec{v}\rvert$	$\vec{F} \uparrow\downarrow \vec{v}$	antiparallel	Kraft bremst, Umkehr des Energiestromes

Tabelle 8.6.1
Sonderfälle des skalaren Produktes $F \bullet \boldsymbol{v}$

Tabelle 8.6.1 zeigt, dass das skalare Produkt alle Sonderfälle korrekt einschließt. Auch das negative Vorzeichen im antiparallelen Fall macht Sinn. In diesem Fall wird aufgrund der Kraft nicht Energie zugeführt, sondern entzogen. Die Bezeichnung „eingeschlossener Winkel" schließt an und für sich die Verwendung überstumpfer Winkel aus. Wegen $\cos(2\pi - \alpha) = \cos(\alpha)$ bleibt eine irrtümliche Verwendung überstumpfer Winkel ohne Bedeutung.

Überstumpfer Winkel ohne Bedeutung

Wir verlassen jetzt den Jollensegler und kümmern uns um Rechenregeln für das in (*8.6.5*) definierte skalare Produkt. Dabei verwenden wir die in Formelsammlungen üblichen Benennungen. Da Beträge und eingeschlossene Winkel nicht von der Reihenfolge der Vektoren abhängen, ist das skalare Produkt kommutativ.

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = \vec{b} \bullet \vec{a} \qquad \textbf{(8.6.6)}$$

Um zu zeigen, wie sich eine Vektorsumme bei einer skalaren Multiplikation mit einem Vektor verhält, müssen wir die beteiligten Vektoren in ein Koordinatensystem eintragen (s. *Bild 8.6.3*). Es wird dabei leider etwas unübersichtlich.

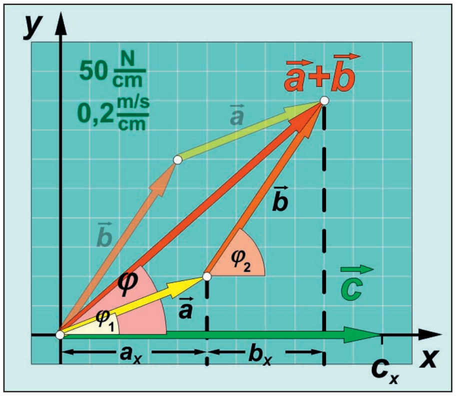


Bild 8.6.3
Skalares Produkt aus Vektorsumme und Vektor

Das Koordinatensystem wurde so gelegt, dass der Vektor ***c*** in x-Richtung weist. Beachten Sie, dass der Vektor ***b*** wegen der Addition an den Vektor ***a*** angereiht wurde. Damit verschiebt sich die x-Koordinate b_x vom Koordinatenursprung fort. Zunächst wird in (*8.6.7*) der Summenvektor skalar multipliziert. Nach dem reellen Ausmultiplizieren erhält man die Summanden $a_x c_x$ und $b_x c_x$. Diese Summanden wiederum ergeben sich ebenfalls aus den skalaren Produkten der Einzelvektoren. Anfang und Ende von (*8.6.7*) ergeben ein Distributivgesetz.

(8.6.7)

$$\underline{\underline{\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\bullet\vec{c}}} = (a_x + b_x)\cdot c_x = a_x c_x + b_x c_x$$

$$= |\vec{a}|\cdot|\vec{c}|\cdot\cos(\varphi_1) + \left|\vec{b}\right|\cdot|\vec{c}|\cdot\cos(\varphi_2) = \underline{\underline{\vec{a}\bullet\vec{c}+\vec{b}\bullet\vec{c}}}$$

Da das skalare Produkt kommutativ ist, kann die Vektorsumme oben in (*8.6.7*) genauso gut rechts stehen. Es fragt sich, wie man mit der Kombination S-Multiplikation – skalares Produkt umzugehen hat. Der Fall eines positiven skalaren Faktors ist, wie man in der ersten Zeile von (*8.6.8*) sieht, einfach. Im negativen Falle klappt der Vektor in die Gegenrichtung und der eingeschlossene Winkel beträgt jetzt $\pi - \varphi$. $\cos(\pi - \varphi)$ wird mithilfe eines Additionstheorems umgeformt und ergibt $-\cos(\varphi)$. Fügt man das negative Vorzeichen und den Betrag zusammen, erhält man wieder den Originalfaktor s.

Kein Problem mit skalaren Faktoren!

(8.6.8)

$$s\in\mathbb{R}^+: \ \underline{\underline{(s\vec{a})\bullet\vec{b}}} = |s\cdot\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos(\varphi) = |s|\cdot|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos(\varphi) = \underline{\underline{s\cdot\left(\vec{a}\bullet\vec{b}\right)}}$$

$$s\in\mathbb{R}^-: \ \underline{\underline{(s\vec{a})\bullet\vec{b}}} = |s\cdot\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos(\varphi) = |s|\cdot|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos(\pi-\varphi)$$

$$= -|s|\cdot|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos(\varphi) = \underline{\underline{s\cdot\left(\vec{a}\bullet\vec{b}\right)}}$$

Aufgrund von (*8.6.8*) sind die Klammern überflüssig. Beachten Sie: Auf den kleinen Malpunkt der S-Multiplikation kann man verzichten – nicht aber auf den dicken Punkt des Skalarproduktes!

Überflüssige Klammern!