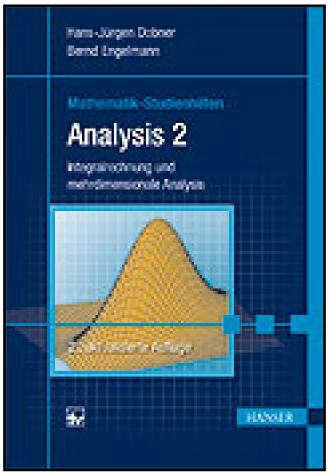
HANSER



Leseprobe

Hans-Jürgen Dobner, Bernd Engelmann

Analysis 2

Integralrechnung und mehrdimensionale Analysis

ISBN (Buch): 978-3-446-43835-4

ISBN (E-Book): 978-3-446-43837-8

von einer lokalen Extremalstelle. Gilt die Ungleichungsbeziehung für alle $\boldsymbol{x} \in \mathrm{R}^n$, so spricht man von einer **globalen Extremalstelle** in $\boldsymbol{x}_0$.

Beispiel 14.6

Für die Funktion $f(x_1, x_2) = 12(x_1 - 2)^2 + 8(x_2 - 4)^2 + 1$ liegt an der Stelle $\boldsymbol{x}_0 = (2,4)^T$ offenbar ein lokales und auch globales Minimum mit dem Funktionswert $f(\boldsymbol{x}_0) = 1$ vor, denn die Quadrate $(x_1 - 2)^2$ und $(x_2 - 4)^2$ sind für alle $\boldsymbol{x} \in \mathrm{R}^2, \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{x}_0$ positiv, d. h. $f(\boldsymbol{x}) > f(\boldsymbol{x}_0)$ für diese $\boldsymbol{x}$. Abbildung 14.4 zeigt den Funktionsgraphen von f. ■

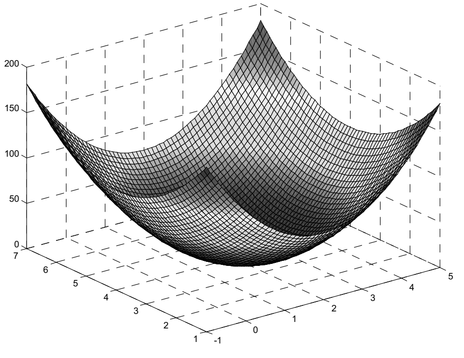


Bild 14.4 Lokales und globales Minimum der Funktion aus Beispiel 14.6

Notwendige Bedingung für ein Extremum

Wir setzen voraus, dass die Funktion $y = f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ in $\boldsymbol{x_0}$ ein lokales Extremum besitzt und stetig partiell nach allen Variablen differenzierbar ist. Entlang jeder Geraden $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{v}$ durch $\boldsymbol{x_0}$ in beliebiger Richtung $\boldsymbol{v} \in \mathbf{R}^n$ muss dann die Funktion das Extremum (Minimum oder Maximum) besitzen (vergleiche für die Funktion aus Beispiel 14.6 das Bild 14.4). Damit muss die Richtungsableitung verschwinden, d. h. es gilt

$$\frac{\partial f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial \boldsymbol{v}} = \frac{\boldsymbol{v}^{\mathbf{T}}}{|\boldsymbol{v}|} \nabla f(\boldsymbol{x}_0) = 0 \quad \forall \boldsymbol{v} \in \mathbf{R}^n (\boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}) \tag{14.15}$$

und der Vektor $\nabla f(\boldsymbol{x}_0)$ ist somit orthogonal zu jedem Vektor $\boldsymbol{v} \in \mathrm{R}^n$. Diese Eigenschaft besitzt nur der Nullvektor.

Satz 14.5 (Notwendige Bedingung für Extremum)

Ist die Funktion $y = f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ in $\boldsymbol{x}_0$ stetig partiell differenzierbar nach allen x_i, so ist die Bedingung

$$\nabla f(\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{0} \tag{14.16}$$

notwendig dafür, dass $\boldsymbol{x}_0$ ein lokales Extremum der Funktion ist.

Bemerkungen: (1) Die vektorielle Bedingung $\nabla f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ zur Bestimmung der „extemwertverdächtigen“ Stellen entspricht den n skalaren Gleichungen

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f(x_1, x_2, ..., x_n) = f_{x_i}(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \quad (i = 1, 2, ..., n) \tag{14.17}$$

zur Bestimmung von n Unbekannten $x_1, x_2, ..., x_n$.

(2) Bedingung (14.16) bzw. das System (14.17) sind auch wie im Fall einer unabhängigen Veränderlichen nicht hinreichend, d.h. eine Stelle $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0$, welche die Bedingungen erfüllt, muss keine Extremalstelle sein. Dies zeigt das Beispiel der Funktion $f(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$, deren Gradient $\nabla f = (x_2, x_1)^{\mathrm{T}}$ in $\boldsymbol{x}_0 = (0,0)^{\mathrm{T}}$ verschwindet, $\boldsymbol{x}_0$ ist jedoch keine Extremalstelle wie die Abbildung 14.5 belegt.

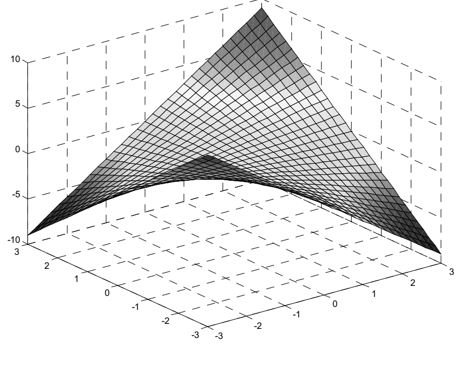


Bild 14.5 Sattelpunkt der Funktion $f(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$ in $\boldsymbol{x}_0 = (0,0)^{\mathrm{T}}$

Dies wird auch durch die folgende Überlegung deutlich: Auf der Geraden g_1 durch $\boldsymbol{x}_0$ mit der Gleichung $x_2 = x_1$ gilt $f(x_1, x_1) = x_1^2$, d. h. $\boldsymbol{x}_0 = (0,0)^{\mathrm{T}}$ entspricht einem Minimum. Auf der Geraden g_2 durch $\boldsymbol{x}_0$ mit der Gleichung $x_2 = -x_1$ gilt jedoch $f(x_1, x_1) = -x_1^2$ und $\boldsymbol{x}_0$ entspricht einem Maximum. Damit liegt nicht bezüglich jeder Richtung durch $\boldsymbol{x}_0$ der gleiche Typ des Extremums vor. Der Punkt $\boldsymbol{x}_0 = (0,0)^{\mathrm{T}}$ wird als Sattelpunkt der Funktion bezeichnet.

Hinreichende Bedingung für Extremum

Zur genaueren Untersuchung des Verhaltens einer Funktion an einer „extremwertverdächtigen" Stelle $\boldsymbol{x}_0$ setzen wir vereinfachend voraus, dass die Funktion dreimal stetig partiell differenzierbar nach allen Variablen ist. Dann gilt in einer Umgebung von $\boldsymbol{x}_0$ die Taylorentwicklung (13.18)

$$f(\boldsymbol{x_0}+\boldsymbol{h}) = f(\boldsymbol{x_0}) + \boldsymbol{h}^{\mathrm{T}} \nabla f(\boldsymbol{x_0}) + \frac{1}{2}\boldsymbol{h}^{\mathrm{T}} \nabla^2 f(\boldsymbol{x_0})\,\boldsymbol{h} + R_2. \tag{14.18}$$

Die Differenz der Funktionswerte $f(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x}_0)$ muss wegen Definition 14.1 für ein Minimum in $\boldsymbol{x}_0$ stets ≥ 0 sein und für ein Maximum stets ≤ 0. Im Fall eines Vorzeichenwechsels liegt in $\boldsymbol{x}_0$ kein Extremum vor. Mit $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h}$ und $\nabla f(\boldsymbol{x}_0) = 0$ gilt

$$f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x_0}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{h}^{\mathrm{T}} \nabla^2 f(\boldsymbol{x_0})\,\boldsymbol{h} + R_2 \overset{!}{=} \begin{cases} \geq 0 & \forall \boldsymbol{h} \neq \boldsymbol{0}\,(\text{Min. in } \boldsymbol{x_0}) \\ \leq 0 & \forall \boldsymbol{h} \neq \boldsymbol{0}\,(\text{Max. in } \boldsymbol{x_0}) \end{cases} \tag{14.19}$$

Da das Restglied R_2 für $\boldsymbol{h} \to \boldsymbol{0}$ von höherer Ordnung verschwindet als der quadratische Term in $\boldsymbol{h}$, hängt das Vorzeichen der rechten Seite in (14.19) wesentlich von Eigenschaften der Hesse-Matrix $H(\boldsymbol{x}_0)$ der zweiten Ableitungen ab.

Definition 14.2

Eine symmetrische (n,n)-Matrix $\boldsymbol{A}$ wird **positiv definit, negativ definit bzw. indefinit genannt**, wenn gilt

$$\boldsymbol{h}^T \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{h} = \begin{cases} > 0 \quad \forall \boldsymbol{h} \in \boldsymbol{R}^n\,(\boldsymbol{h} \neq \boldsymbol{0}) \quad \text{(positiv definit)} \\ < 0 \quad \forall \boldsymbol{h} \in \boldsymbol{R}^n\,(\boldsymbol{h} \neq \boldsymbol{0}) \quad \text{(negativ definit)} \\ > 0 \text{ und } < 0, \text{ d.h. Vorzeichenwechsel} \quad \text{(indefinit)} \end{cases}$$

Mit (14.19) und der Bedingung der Definitheit der Hesse-Matrix erhält man hinreichende Bedingungen für ein Extremum, die wegen der Verwendung zweiter Ableitungen als **hinreichende Bedingungen 2. Ordnung** bezeichnet werden.

Satz 14.6 (Hinreichende Bedingung für Extremum)

Die Funktion $y = f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ sei in $\boldsymbol{x}_0$ zweimal stetig partiell differenzierbar nach allen x_i. Hinreichend dafür, dass in $\boldsymbol{x}_0$ eine lokale Extremalstelle vorliegt, sind die Bedingungen $\nabla f(\boldsymbol{x}_0) = 0$ und $H(\boldsymbol{x}_0) = \nabla^2 f(\boldsymbol{x}_0)$ ist entweder positiv definit (lokales Minimum in $\boldsymbol{x}_0$) oder negativ definit (lokales Maximum). Im Fall der Indefinitheit von $H(\boldsymbol{x}_0)$ liegt in $\boldsymbol{x}_0$ kein Extremum, sondern ein Sattelpunkt der Funktion vor.

Zur Überprüfung der Definitheit der Hesse-Matrix können verschiedene Kriterien angewendet werden, die im Rahmen der linearen Algebra begründet werden. Wir geben das Eigenwertkriterium bzw. das leichter anwendbare Kriterium mit Hilfe der Hauptabschnittsdeterminanten an. Bezeichnet $\boldsymbol{A}$ die (n,n) -Matrix, so werden

$$\Delta_1 = a_{11},\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, ..., \Delta_n = |\boldsymbol{A}| \tag{14.20}$$

als Hauptabschnittsdeterminanten von $\boldsymbol{A}$ bezeichnet.

Satz 14.7

Die symmetrische (n,n) -Matrix $\boldsymbol{A}$ ist positiv definit, wenn entweder alle Eigenwerte $\lambda_i\ (i = 1, 2, .., n)$ positiv sind oder alle Hauptabschnittsdeterminanten $\Delta_i\ (i = 1, 2, .., n)$ sind positiv. Die Matrix ist negativ definit, wenn entweder alle Eigenwerte negativ sind oder die Hauptabschnittsdeterminanten besitzen alternierendes Vorzeichen, beginnend mit $\Delta_1 = a_{11} < 0$. Die Matrix ist indefinit, wenn es mindestens einen positiven und einen negativen Eigenwert gibt.

Bemerkung: Das Eigenwertkriterium sollte nur angewendet werden, wenn Hauptabschnittsdeterminanten Null sind, da das Eigenwertkriterium eine schärfere Aussage erlaubt. Sind ein oder mehrere Eigenwerte der Matrix Null, so müssen höhere Ableitungen verwendet werden. Wir betrachten dies nicht weiter.

Beispiel 14.7

Man bestimme Lage und Art der Extremwerte der Funktion
$f(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + 6x_2^2 + 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_2x_3 - 10x_1 + 8x_2 + 14x_3 - 6$.

Lösung: Das Nullsetzen des Gradienten der Funktion ergibt das System der notwendigen Bedingungen:

$$\begin{aligned} f_{x_1} &= 10x_1 - 4x_2 - 10 = 0 \\ f_{x_2} &= -4x_1 + 12x_2 + 4x_3 + 8 = 0 \quad \text{mit der einzigen Lösung} \quad \boldsymbol{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}. \\ f_{x_3} &= 4x_2 + 14x_3 + 14 = 0 \end{aligned}$$

Zur Überprüfung der hinreichenden Bedingung bestimmen wir die Hesse-Matrix:

$$H(\boldsymbol{x}) = \nabla^2 f(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} 10 & -4 & 0 \\ -4 & 12 & 4 \\ 0 & 4 & 14 \end{pmatrix},$$

die nicht mehr von der Stelle $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^3$ abhängt und somit auch für $\boldsymbol{x}_0$ durch die obige Matrix gegeben ist. Als Hauptabschnittsdeterminanten erhält man

$$\Delta_1 = 10 > 0,\ \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 10 & -4 \\ -4 & 12 \end{vmatrix} = 104 > 0,\ \ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 10 & -4 & 0 \\ -4 & 12 & 4 \\ 0 & 4 & 14 \end{vmatrix} = 1296 > 0\,,$$

d. h. die Matrix ist positiv definit und somit ist $\boldsymbol{x}_0$ lokaler Minimalpunkt mit dem Funktionswert $f_{\min} = f(\boldsymbol{x}_0) = -18$. Da die Funktion quadratisch ist, liegt sogar ein globales Minimum vor. ■

Beispiel 14.8

Bestimmen Sie die Extremstellen der Funktion sowie den Typ der Extrema $\quad z = f(x, y) = 3x^2y + 4y^3 - 3x^2 - 12y^2 + 1$.

Lösung: Das System der notwendigen Bedingungen resultiert aus dem Nullsetzen der partiellen Ableitungen

$$\begin{aligned} f_x &= 6xy - 6x = 6x(y-1) = 0 \\ f_y &= 3x^2 + 12y^2 - 24y = 0 \end{aligned}$$

Wegen der Produktform verschwindet die Ableitung f_x für $x = 0$ oder $y = 1$. Mit diesen Werten betrachten wir die Ableitung f_y :

1. Fall $(x = 0): f_y(0, y) = 12y^2 - 24y = 12y(y-2) = 0$ gilt für $y = 0$ oder $y = 2$. Damit erfüllen die Punkte $P_1(0,0)$ und $P_2(0,2)$ die notwendigen Bedingungen.
2. Fall $(y = 1)$: $f_y(x,1) = 3x^2 + 12 - 24 = 0$ gilt für $x = 2$ oder $x = -2$. Die Punkte $P_3(2,1)$ und $P_4(-2,1)$ erfüllen ebenfalls die notwendigen Bedingungen.

Für jeden der möglichen Extrempunkte ist die hinreichende Bedingung zu überprüfen. Dazu bestimmen wir die Hesse-Matrix von f und setzen die Punkte ein

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x-6 & 6x \\ 6x & 24y-24 \end{pmatrix}.$$

$P_1(0,0): H(0,0) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -24 \end{pmatrix}$ mit $\Delta_1 = -6 < 0,\ \Delta_2 = 144 > 0$, d. h. negative Definitheit der Matrix und Vorliegen eines lokalen Maximums in P_1 mit $f_{\max} = 1$.
$P_2(0,2)$: $H(0,2) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 24 \end{pmatrix}$ mit $\Delta_1 = 6 > 0,\ \Delta_2 = 144 > 0$, d. h. positive Definitheit der Matrix und Vorliegen eines lokalen Minimums in P_2 mit $f_{\min} = -15$.

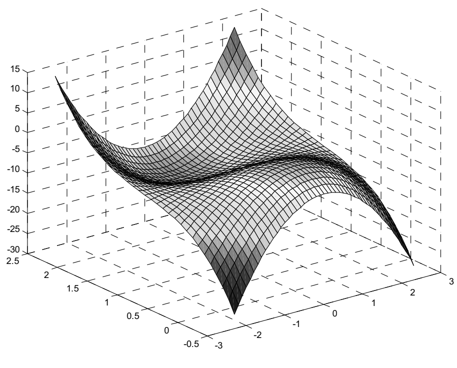


Bild 14.6 Graphische Darstellung der Funktion aus Beispiel 14.8

$P_3(2,1)$: $H(2,1) = \begin{pmatrix} 0 & 12 \\ 12 & 0 \end{pmatrix}$ mit $\Delta_1 = 0,\ \Delta_2 = -144 < 0$. Die Bedingung für die Hauptabschnittsdeterminanten ist wegen $\Delta_2 < 0$ verletzt, so dass Indefinitheit der Matrix vorliegt und somit kein Extremum in P_3. Die unterschiedlichen Vorzeichen der Eigenwerte $\lambda_1 = -12, \lambda_1 = 12$ belegen die Indefinitheit. $P_4(-2,1): H(-2,1) = \begin{pmatrix} 0 & -12 \\ -12 & 0 \end{pmatrix}$ mit $\Delta_1 = 0,\ \Delta_2 = -144$, so dass wie in P_3 kein Extremum vorliegt. P_3 und P_4 sind Sattelpunkte der Funktion. Die Funktion ist im Bild 14.6 dargestellt. ■

14.4 Extremwerte mit Nebenbedingungen

In den Anwendungen treten Extremwertaufgaben häufig in der Form auf, dass neben einer zu minimierenden oder zu maximierenden Zielfunktion noch zusätzliche Bedingungen für die Entscheidungsvariablen x_i zu erfüllen sind. Man spricht dann von einer Extremwertaufgabe mit Nebenbedingungen oder einer restingierten Extremwertaufgabe. Wir wollen uns hier mit dem Fall beschäftigen, dass **Nebenbedingungen in Form von Gleichungen** vorliegen. Die allgemeineren Fälle von Nebenbedingungen in Ungleichungsform bzw. Gleichungs- und Ungleichungsform werden im Rahmen der Optimierung bzw. des Operations Research betrachtet.

Zunächst betrachten wir die Minimierung (Maximierung) einer Funktion f in zwei Variablen unter Berücksichtigung einer Gleichungsrestriktion g:

$$\min_{(x,y)\in R^2} \left(\max_{(x,y)\in R^2} \right) \left\{ z = f(x,y) \mid g(x,y) = 0 \right\} \tag{14.21}$$

Wir setzen voraus, dass in einer Umgebung einer Extremalstelle (x_0, y_0) die Nebenbedingung $g(x,y) = 0$ nach der Variablen y auflösbar ist (dies ist nach Satz 14.3 unter der Bedingung $g_y(x_0, y_0) \neq 0$ erfüllt). Damit gibt es eine Funktion $y = h(x)$ mit $g(x, h(x)) \equiv 0,\ y_0 = h(x_0)$ und durch Einsetzen in die Zielfunktion f entsteht die freie Extremwertaufgabe $z = f(x, h(x)) \to \min\,(\max),$ für die in $x = x_0$ die notwendige Bedingung für ein Extremum erfüllt sein muss

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x, h(x))\,|_{x=x_0} = \left[f_x(x,y) + f_y(x,y)h'(x) \right]\Big|_{(x,y)=(x_0, h(x_0))} = 0\,. \tag{14.22}$$

Wegen $g(x, h(x)) \equiv 0$ gilt außerdem

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} g(x, h(x))\,|_{x=x_0} = \left[g_x(x,y) + g_y(x,y)h'(x) \right]\Big|_{(x,y)=(x_0, h(x_0))} = 0\,. \tag{14.23}$$

Das System der Gleichungen (14.22) und (14.23) besitzt die Matrixdarstellung

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} f_x(x_0, y_0) & f_y(x_0, y_0) \\ g_x(x_0, y_0) & g_y(x_0, y_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ h'(x_0) \end{pmatrix} = \mathbf{0} .$$

Diese Beziehung kann für einen Vektor $\boldsymbol{w} = (1, h'(x_0))^{\mathrm{T}} \neq 0$ nur gelten, wenn die Matrix $\boldsymbol{A}$ singulär ist, d. h. ihre Determinante ist Null bzw. die beiden Zeilen von $\boldsymbol{A}$ sind linear abhängig. Es gibt somit einen Wert $\lambda = \lambda_0$ für den der erste Zeilenvektor das $(-\lambda)$-fache des zweiten ist, so dass gilt $f_x = -\lambda g_x$, $f_y = -\lambda g_y$. Das System der notwendigen Bedingungen für ein Extremum erhält dann die Form

$$f_x(x_0, y_0) + \lambda_0 g_x(x_0, y_0) = 0, \;\; f_y(x_0, y_0) + \lambda_0 g_y(x_0, y_0) = 0, \;\; g(x_0, y_0) = 0 .$$

Dies ist ein System von drei Gleichungen für drei Unbekannte *x, y* und λ. Der Parameter λ wird als **Lagrangescher Multiplikator** der Nebenbedingung *g* bezeichnet. Definiert man

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y) ,$$

als **Lagrange-Funktion** des Problems (14.21), so können die Bedingungen für ein Extremum in der zum freien Problem äquivalenten Form $\nabla L(x_0, y_0, \lambda_0) = \mathbf{0}$ dargestellt werden. Die Bedingungen für den Fall von *n* Entscheidungsvariablen x_i und $m \leq n$ Gleichungsnebenbedingungen sind ganz analog zu formulieren.

Definition 14.3 (Extremwertaufgabe mit Gleichungsbedingungen)

Eine Extremwertaufgabe mit Nebenbedingungen in Gleichungsform liegt dann vor, wenn von allen $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, .., x_n)^{\mathbf{T}} \in \mathbf{R}^n$, die das System der $m \leq n$ Gleichungen $g_1(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, ..., g_m(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$ erfüllen diejenigen gesucht sind, für die eine Zielfunktion $f(x_1, x_2, .., x_n)$ minimal (bzw. maximal) wird

$$\min_{x \in R^n} \left(\max_{x \in R^n} \right) \left\{ f(\boldsymbol{x}) \mid g_k(\boldsymbol{x}) = 0, \, k = 1, 2, ..., m \right\} \tag{14.24}$$

Satz 14.8 (Notwendige Optimalitätsbedingungen)

Die Funktionen $f(\boldsymbol{x}), g_k(\boldsymbol{x})$ $(k = 1,2,..., m \leq n)$ in (14.24) seien in einer Umgebung der Stelle $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbf{R}^n$ stetig partiell differenzierbar nach allen x_i und die Funktionalmatrix $\dfrac{\partial \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_0)}{\partial \boldsymbol{x}}$ habe den vollen Rang *m*. Notwendig dafür, dass $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0$ das Problems (14.24) löst, ist die Existenz eines Vektors von *m* Lagrangemultiplikatoren $\lambda = \lambda_0 = (\lambda_{1,0},...,\lambda_{m,0})^{\mathrm{T}} \in \mathrm{R}^{m}$ derart, dass für die Lagrangefunktion $L(\boldsymbol{x},\lambda) = f(\boldsymbol{x}) + \lambda^{\mathrm{T}}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) + \lambda_1 g_1(\boldsymbol{x}) + ... + \lambda_m g_m(\boldsymbol{x})$ gilt

$$\nabla L(\boldsymbol{x}_0,\lambda_0) = \begin{pmatrix} \nabla_x L(\boldsymbol{x}_0,\lambda_0) \\ \nabla_\lambda L(\boldsymbol{x}_0,\lambda_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla_x L(\boldsymbol{x}_0,\lambda_0) \\ \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_0) \end{pmatrix} = 0 \qquad (14.25)$$

Bemerkungen: Bedingung (14.25) stellt ein System von $(n+m)$ Gleichungen für $(n+m)$ Unbekannte $(x_1,..,x_n,\lambda_1,...,\lambda_m)$ dar. Lösungen dieses Systems liefern Punkte, die als Extremalstellen in Frage kommen. Zum Nachweis hinreichender Optimalitätsbedingungen muss die positive oder negative Definitheit der Hesse-Matrix $\nabla^2_{xx} L(\boldsymbol{x}_0,\lambda_0)$ bezüglich aller tangentialen Richtungen $\boldsymbol{s} \in \mathbf{R}^n (\boldsymbol{s} \neq \mathbf{0})$ an die Restriktionen g_k in $\boldsymbol{x}_0$ überprüft werden. Diese Richtungen $\boldsymbol{s}$ können mit Hilfe der Bedingung $\dfrac{\partial \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_0)}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{s} = 0$ berechnet werden. Wir führen die Überprüfung in den Beispielen nicht genauer durch.

Beispiel 14.9

Man bestimme mögliche Extremalstellen der Funktion $f(x,y) = x^2 + 2y^2$ unter der Nebenbedingung $g(x,y) = y - x^2 + 1 = 0$.

Lösung: Als Lagrangefunktion des Problems erhält man

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y) = x^2 + 2y^2 + \lambda(y - x^2 + 1)$$

und das System (14.25) der notwendigen Bedingungen nimmt die Form an

$$L_x = 2x - 2\lambda x = 2x(1-\lambda) = 0,\ L_y = 4y + \lambda = 0,\ L_\lambda = y - x^2 + 1 = 0.$$

Aus $L_x = 0$ folgt, dass $x = 0$ oder $\lambda = 1$ gelten muss. Im Fall $x = 0$ erhält man aus den beiden anderen Gleichungen $y = -1$ und $\lambda = 4$. Im Fall $\lambda = 1$ erhält man $y = -\dfrac{1}{4}$ und $x = \pm\dfrac{1}{2}\sqrt{3}$. Damit existieren drei mögliche Extremalstellen:

- $(x_1,y_1) = (0,-1)$ mit $\lambda_1 = 4$ und dem Funktionswert $f(x_1,y_1) = 2$;
- $(x_2,y_2) = (\frac{1}{2}\sqrt{3},-\frac{1}{4})$ mit $\lambda_2 = 1$ und $f(x_2,y_2) = \frac{7}{8}$;
- $(x_3,y_3) = (-\frac{1}{2}\sqrt{3},-\frac{1}{4})$ mit $\lambda_3 = 1$ und $f(x_3,y_3) = \frac{7}{8}$.