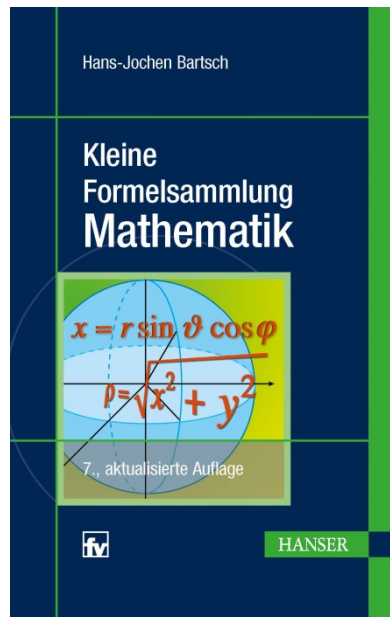


HANSER



Leseprobe

ZU

„Kleine Formelsammlung Mathematik“

von Dr.-Ing. Hans-Jochen Bartsch

Bearbeiter: Michael Sachs

ISBN (Buch): 978-3-446-45164-3

ISBN (E-Book): 978-3-446-45706-5

Weitere Informationen und Bestellungen unter
<http://www.hanser-fachbuch.de/978-3-446-45164-3>
sowie im Buchhandel

© Carl Hanser Verlag, München

Vorwort

■ Vorwort zur 7. Auflage

Gegenüber der 6. Auflage habe ich Druckfehler berichtigt und einige wenige Formulierungen und Zeichnungen geändert bzw. ergänzt. Ich danke allen aufmerksamen Leserinnen und Lesern für die entsprechenden Hinweise.

München, im Mai 2018

Michael Sachs

■ Vorwort zur 6. Auflage

Mit Wissen des im Frühjahr 2008 verstorbenen Verfassers der ersten vier Auflagen dieser Formelsammlung, Dr.-Ing. Hans-Jochen Bartsch, wurde mir vom Verlag die Fortführung des Werkes anvertraut. Nachdem ich in der fünften Auflage im Wesentlichen nur bekannte Druckfehler verbessert hatte, lege ich nun eine völlige Neubearbeitung der Formelsammlung vor. Dabei sind die Auswahl und Grobgliederung des Stoffes weitgehend gleich geblieben, ebenso habe ich die meisten Bilder und Tabellen aus den Vorgängerauflagen übernommen. Bei der Gestaltung der einzelnen Kapitel war mir ein Hauptanliegen, dass diese in sich logisch aufgebaut und weitgehend unabhängig von anderen Kapiteln lesbar sind. Erforderliche Querverweise habe ich ergänzt.

Das Buch enthält keine Beweise und auch keine Beispiele, sondern nur mathematische Definitionen, Sätze und Verfahren. Dadurch konnten Umfang und Preis niedrig gehalten werden, außerdem wird die Zulassung als Hilfsmittel in Prüfungen erleichtert, wenn keine durchgerechneten Aufgaben enthalten sind. Das Buch kann daher als Kompaktskript zur Mathematik eingesetzt werden, welches die Studierenden vom lästigen Mitschreiben von Definitionen und Sätzen befreit. Aufgaben können und sollen der ein-

schlägigen und reichhaltigen Fachliteratur entnommen und hinzugezogen werden.

Der Stoff umfasst etwa die Gebiete der Mathematik, die an einer technischen Fakultät einer Hochschule für angewandte Wissenschaften (früher Fachhochschule) in den ersten drei bis vier Semestern gelehrt werden. Aber auch Studierende der Wirtschaftswissenschaften werden das Buch mit Gewinn als Nachschlagewerk und zur Begleitung des Unterrichts einsetzen können. Der Inhalt reicht von der Elementarmathematik der Gebiete Arithmetik, Algebra und Geometrie bis zu der Analysis mehrerer Veränderlicher, gewöhnlichen Differenzialgleichungen, den wichtigsten Integraltransformationen und der Wahrscheinlichkeitsrechnung/Statistik.

Um den Umfang nicht zu sprengen, habe ich nur einige wenige numerische Verfahren (z. B. Newton-Verfahren, Trapezregel, Runge-Kutta-Verfahren) aufgenommen, die im Grundstudium eine Rolle spielen. Hier sei auf die numerische Fachliteratur hingewiesen.

Mein Dank gebührt den Mitarbeiterinnen des Fachbuchverlages Leipzig, allen voran Frau Christine Fritsch, die durch Korrekturlesen und viele Vorschläge zur Neuauflage des Buches beigetragen haben, sowie Herrn Dr. Steffen Naake für die mühevollen Arbeit des Umbruchs.

Eine Formelsammlung darf nie als abgeschlossen oder fehlerfrei gelten. Für konstruktive Hinweise aufmerksamer Leser sind Verlag und Bearbeiter daher stets aufgeschlossen und dankbar.

München, im März 2015

Michael Sachs

Inhalt

1	Logik, Arithmetik, Algebra	13
1.1	Mathematische Logik	13
1.1.1	Ein- und zweistellige BOOLEsche Funktionen	13
1.1.2	Rechengesetze (BOOLEsche Algebra)	15
1.2	Mengen	15
1.2.1	Grundlagen	15
1.2.2	Mengenoperationen	16
1.2.3	Rechenregeln für Mengen	17
1.2.4	Relationen	18
1.2.5	Zahlensysteme	18
1.3	Menge der reellen Zahlen	19
1.3.1	Standard-Zahlenmengen	19
1.3.2	Grundoperationen für reelle Zahlen	21
1.3.3	Potenzen, Wurzeln	24
1.3.4	Logarithmen	25
1.3.5	Binomischer Satz	26
1.4	Menge der komplexen Zahlen	28
1.4.1	Grundlagen	28
1.4.2	Darstellungsformen komplexer Zahlen	29
1.4.3	Grundrechenarten mit komplexen Zahlen	30
1.4.4	Potenzen und Wurzeln komplexer Zahlen	31
1.5	Kombinatorik	31
1.6	Folgen	33
1.6.1	Grundlagen	33
1.6.2	Schranken, Grenzwert und Monotonie einer Folge	33
1.6.3	Arithmetische und geometrische Folgen	34
1.6.4	Zins-, Zinseszins-, Renten- und Tilgungsrechnung	36

1.7	Gleichungen und Ungleichungen, Algebra	38
1.7.1	Grundlagen.....	38
1.7.2	Lineare Gleichungen.....	39
1.7.3	Nichtlineare Gleichungen, Polynome	40
1.7.4	Wurzelgleichungen, transzendente Gleichungen .	43
1.7.5	Numerische Verfahren für Gleichungen	43

2 Lineare Algebra

2.1	Vektoren	46
2.1.1	Grundbegriffe.....	46
2.1.2	Skalarprodukt im \mathbb{R}^n	50
2.1.3	Vektoren im \mathbb{R}^3	52
2.2	Matrizen	55
2.2.1	Grundlagen.....	55
2.2.2	Matrizengesetze	56
2.2.3	n -reihige quadratische Matrizen.....	57
2.2.4	Rang, Normen	60
2.2.5	Determinanten	61
2.2.6	Eigenwerte und Eigenvektoren.....	63
2.3	Lineare Gleichungssysteme	65
2.3.1	Bezeichnungen	65
2.3.2	Lösbarkeitsbedingungen	66
2.3.3	Lösungsverfahren	67
2.4	Lineare Abbildungen.....	69
2.4.1	Grundlagen.....	69
2.4.2	Spezielle lineare Abbildungen in der Ebene	70
2.5	Koordinatensysteme	71
2.5.1	Kartesische Koordinaten	71
2.5.2	Zylinderkoordinaten	72
2.5.3	Kugelkoordinaten	72
2.6	Koordinatentransformationen.....	73
2.6.1	Koordinatentransformationen in der Ebene	74
2.6.2	Koordinatentransformationen im Raum	75

3	Elementare und analytische Geometrie	77
3.1	Planimetrie, ebene Trigonometrie	77
3.1.1	Winkel	77
3.1.2	Teilungen, Ähnlichkeit, Kongruenz	79
3.1.3	Dreiecke	80
3.1.4	Vierecke	82
3.1.5	Vielecke	84
3.1.6	Kreis	85
3.2	Geometrische Körper (Stereometrie)	87
3.2.1	Ebenflächig begrenzte Körper (Polyeder, Vielflä- che)	88
3.2.2	Krummflächig begrenzte Körper	89
3.3	Punkt, Gerade, Ebene	92
3.3.1	Punkt, Strecke	92
3.3.2	Gerade in der Ebene	93
3.3.3	Gerade im Raum	95
3.3.4	Mehrere Geraden	97
3.3.5	Ebene	99
3.3.6	Flächeninhalt, Volumen	102
3.4	Kurven 2. Ordnung (Kegelschnitte)	102
3.4.1	Gemeinsame Charakterisierungen aller Kegel- schnitte	102
3.4.2	Kreis	104
3.4.3	Ellipse	105
3.4.4	Parabel	109
3.4.5	Hyperbel	111
3.5	Flächen 2. Ordnung	114
3.6	Hauptachsentransformation	119
4	Funktionen	121
4.1	Grundlagen	121
4.2	Grenzwerte, unbestimmte Ausdrücke	124
4.2.1	Grenzwerte einer Funktion	124
4.2.2	Unbestimmte Ausdrücke	125
4.3	Eigenschaften reeller Funktionen	126

4.4	Rationale Funktionen	127
4.4.1	Ganzrationale Funktionen (Polynome)	127
4.4.2	Interpolation	129
4.4.3	Gebrochenrationale Funktionen	130
4.5	Nichtrationale Funktionen	131
4.5.1	Elementare Funktionen	131
4.5.2	Wurzelfunktionen	132
4.5.3	Exponentialfunktionen	133
4.5.4	Logarithmusfunktionen	133
4.5.5	Winkelfunktionen, trigonometrische Funktionen	134
4.5.6	Zyklometrische Funktionen (Arkusfunktionen) ...	140
4.5.7	Hyperbelfunktionen	141
4.5.8	Areafunktionen	144
4.6	Ausgewählte ebene Kurven.....	146
4.7	Kurvendiskussion.....	148

5 Analysis 149

5.1	Differenzialrechnung	149
5.1.1	Funktionen mit einer unabhängigen Variablen....	149
5.1.2	Funktionen mit mehreren unabhängigen Variablen.....	154
5.1.3	Extrema und Wendepunkte.....	156
5.1.4	Differenzialgeometrie ebener Kurven	159
5.1.5	Differenzialgeometrie von Raumkurven und Raumflächen	163
5.2	Integralrechnung	167
5.2.1	Unbestimmtes und bestimmtes Integral	167
5.2.2	Grundintegrale und Integrationsregeln.....	170
5.2.3	Integrationstechniken	172
5.2.4	Numerische Integration.....	175
5.2.5	Gebietsintegrale, Mehrfachintegrale	177
5.2.6	Anwendungen der Integralrechnung	180
5.3	Vektoranalysis.....	187
5.3.1	Vektorwertige Funktionen, Felder	187
5.3.2	Gradient eines skalaren Feldes	190
5.3.3	Divergenz eines Vektorfeldes	190
5.3.4	LAPLACE-Operator eines skalaren Feldes	191

5.3.5	Rotation eines Vektorfeldes	192
5.3.6	Kurvenintegrale	193
5.3.7	Oberflächenintegrale	196
5.3.8	Integralsätze von GREEN, GAUSS und STOKES	199

6 Gewöhnliche Differenzialgleichungen 201

6.1	Grundlagen	201
6.2	Ausgewählte Differenzialgleichungen 1. Ordnung.....	203
6.3	Ausgewählte Differenzialgleichungen 2. Ordnung.....	207
6.3.1	Homogene lineare Differenzialgleichung 2. Ordnung	207
6.3.2	Inhomogene lineare Differenzialgleichung 2. Ordnung	210
6.4	Lineare Differenzialgleichungen höherer Ordnung	212
6.5	Numerische Verfahren für Differenzialgleichungen 1. Ordnung	214
6.5.1	Polygonzugverfahren von EULER-CAUCHY	214
6.5.2	Verfahren 4. Ordnung von RUNGE-KUTTA.....	215
6.6	Lineare Differenzialgleichungssysteme	216

7 Reihen, Integral-Transformationen 218

7.1	Unendliche Reihen	218
7.1.1	Zahlenreihen.....	218
7.1.2	Konvergenzkriterien für Reihen.....	220
7.1.3	Potenzreihen.....	222
7.1.4	TAYLOR-Formel und TAYLOR-Reihen.....	223
7.1.5	Zusammenstellung fertig entwickelter TAYLOR- Reihen	225
7.1.6	FOURIER-Reihen.....	228
7.2	FOURIER-Transformation	231
7.3	LAPLACE-Transformation.....	234
7.3.1	Rechenregeln der LAPLACE-Transformation	235
7.3.2	Lösung von gewöhnlichen linearen Differenzial- gleichungen	237
7.3.3	Korrespondenztabelle der LAPLACE-Transforma- tion	238

8	Statistik, Wahrscheinlichkeitsrechnung	241
8.1	Beschreibende (deskriptive) Statistik	241
8.1.1	Grundbegriffe, Darstellungsarten	241
8.1.2	Lagemaße (Mittelwerte)	243
8.1.3	Streuungsmaße	245
8.1.4	Korrelationsmaße	246
8.1.5	Regressionsrechnung	247
8.1.6	Fehlerrechnung	249
8.2	Wahrscheinlichkeitsrechnung	250
8.2.1	Grundbegriffe	250
8.2.2	Sätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung	252
8.2.3	Zufällige Variable	254
8.2.4	Diskrete zufällige Variable	258
8.2.5	Stetige zufällige Variable	260
8.3	Schließende (induktive) Statistik	264
8.3.1	Schätzfunktionen	264
8.3.2	Intervallschätzung	265
8.3.3	Signifikanztests	266
8.4	Tabellen	269
8.4.1	Verteilungsfunktion $\Phi(x)$ der Standard-Normal- verteilung	269
8.4.2	Quantile der t -Verteilung (STUDENT-Verteilung)	270
8.4.3	Quantile der χ^2 -Verteilung	271
9	Integraltafel	272
	Sachwortverzeichnis	277

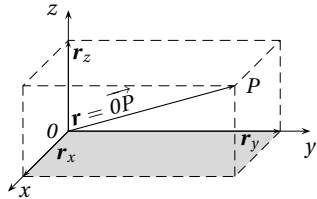
2.1.3 Vektoren im \mathbb{R}^3

Standardbasisvektoren: $\mathbf{e}_x = \mathbf{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\mathbf{e}_y = \mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\mathbf{e}_z = \mathbf{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Ortsvektor

$$\mathbf{r} = \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (x, y, z)^T$$

$$\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z = \mathbf{r}_x + \mathbf{r}_y + \mathbf{r}_z$$



$\mathbf{r}_x, \mathbf{r}_y, \mathbf{r}_z$ Vektorkomponenten

x, y, z Vektorkoordinaten, auch r_x, r_y, r_z oder r_1, r_2, r_3

Betrag, Norm eines Vektors

$$r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (\text{Räumlicher Satz des PYTHAGORAS})$$

Richtungswinkel und Richtungskosinus eines Ortsvektors

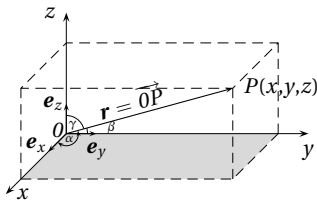
$$\alpha := \angle(\mathbf{e}_x, \mathbf{r}), \quad \beta := \angle(\mathbf{e}_y, \mathbf{r}), \quad \gamma := \angle(\mathbf{e}_z, \mathbf{r})$$

Für die Richtungswinkel α, β, γ gilt

$$\cos \alpha = \frac{x}{r}, \quad \cos \beta = \frac{y}{r}, \quad \cos \gamma = \frac{z}{r}$$

und

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 \quad (\text{Winkelpythagoras})$$

**Vektor $\overrightarrow{P_1P_2}$ in Koordinatendarstellung**

$$\mathbf{a} = \overrightarrow{P_1P_2} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix} \quad \text{„Spitze minus Fuß“}$$

Koordinaten eines Einheitsvektors

$$\mathbf{e}_r = \mathbf{r}^0 = \mathbf{e}_x \cos \alpha + \mathbf{e}_y \cos \beta + \mathbf{e}_z \cos \gamma$$

Ortsvektor, Darstellung mit Richtungskosinus

$$\mathbf{r} = |\mathbf{r}|(\mathbf{e}_x \cos \alpha + \mathbf{e}_y \cos \beta + \mathbf{e}_z \cos \gamma)$$

Skalarprodukt im \mathbb{R}^3

$$\begin{array}{lll} \mathbf{e}_x^2 = \mathbf{i}^2 = 1 & \mathbf{e}_y^2 = \mathbf{j}^2 = 1 & \mathbf{e}_z^2 = \mathbf{k}^2 = 1 \\ \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_y = \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = 0 & \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_z = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = 0 & \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_x = \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = 0 \end{array}$$

Vektorprodukt (äußeres Produkt, Kreuzprodukt) im \mathbb{R}^3

Je zwei beliebigen Vektoren \mathbf{a} und \mathbf{b} des \mathbb{R}^3 wird ein dritter Vektor $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$ zugeordnet, der durch folgende drei Eigenschaften eindeutig charakterisiert ist:

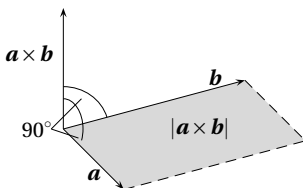
- (1) $\mathbf{c} \perp \mathbf{a}$ und $\mathbf{c} \perp \mathbf{b}$
- (2) $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ bilden ein *rechtshändiges* System
- (3) $|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$

Dieses durch \mathbf{a} und \mathbf{b} eindeutig bestimmte \mathbf{c} heißt *Vektorprodukt* oder *Kreuzprodukt* von \mathbf{a} und \mathbf{b} , kurz

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} \quad \text{sprich: „a kreuz b“}$$

Speziell $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{o}$ (kollineare Vektoren, $\sin \angle(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = 0$)

$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$ ist gleich der Fläche des von \mathbf{a} und \mathbf{b} aufgespannten Parallelogramms:



Rechenformel bei Kenntnis der Koordinaten von \mathbf{a} und \mathbf{b} :

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

Regeln: $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -(\mathbf{b} \times \mathbf{a})$ (Anti-Kommutativgesetz)

$$\lambda \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\lambda \cdot \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (\lambda \cdot \mathbf{b}), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c} \quad (\text{Distributivgesetz})$$

Auf den Standardbasisvektoren wirkt das Kreuzprodukt wie folgt:

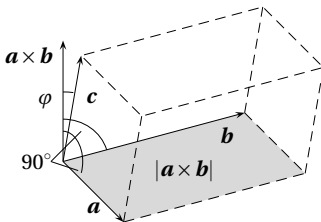
$$\begin{array}{lll} \mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_x = \mathbf{0} & \mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_y = \mathbf{0} & \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_z = \mathbf{0} \\ \mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_z & \mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_x = \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_x = -\mathbf{e}_z & \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_y = -\mathbf{e}_x & \mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_z = -\mathbf{e}_y \end{array}$$

Auch das Kreuzprodukt ist *nicht umkehrbar*, d. h. aus $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times \mathbf{c}$ kann *nicht* gefolgert werden, dass dann $\mathbf{b} = \mathbf{c}$ ist.

Spatprodukt (*gemischtes Produkt*)

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) =: [\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] \quad (\text{s. 2.2.5})$$

Spatvolumen: $V = |(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}| = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| \cdot |\mathbf{c}| \cdot |\cos \varphi|$



$[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = 0$ bei komplanaren Vektoren oder wenn ein Vektor der Nullvektor ist.

Vektorprodukt mit drei und vier Vektoren

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} \neq (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{a}$$

$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$ Vektor in der Ebene von \mathbf{a} und \mathbf{b}

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = \begin{vmatrix} \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} & \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \\ \mathbf{a} \cdot \mathbf{d} & \mathbf{b} \cdot \mathbf{d} \end{vmatrix} \quad \text{speziell } (\mathbf{a} \times \mathbf{b})^2 = \mathbf{a}^2 \mathbf{b}^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2$$

2.2 Matrizen

2.2.1 Grundlagen

Eine *Matrix* vom Typ $(m \times n)$, kurz $(m \times n)$ -Matrix, ist ein rechteckiges Zahlenschema (Tabelle) mit m Zeilen und n Spalten.

Elementezahl $m \cdot n$

Zeilenindex $i = 1, 2, \dots, m$, Spaltenindex $k = 1, 2, \dots, n$

Elemente der Matrix A : a_{ik} an Zeile i , Spalte k .

Merke: 1. Index immer Zeile, 2. Index immer Spalte.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ik})_{m \times n} \in \mathbb{C}^{m \times n} \quad \text{meist } \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

Hauptdiagonale: $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{ii}, \dots \quad i = 1, 2, \dots, \min(m, n)$

Nebendiagonale: Bei quadratischen Matrizen Diagonale von oben rechts nach unten links

Vektor a : $(m \times 1)$ -Matrix, *Spaltenvektor* oder a^T : $(1 \times n)$ -Matrix, *Zeilenvektor*

Nullmatrix O : Alle Elemente sind null, $O = (0)_{m \times n}$

Transponierte (gestürzte) Matrix A^T : Vertauschen der Zeilen mit den gleichstelligen Spalten

$$A = (a_{ik})_{m \times n} \Leftrightarrow A^T = (a_{ki})_{n \times m}$$

$$(A^T)^T = A$$

$$(A + B)^T = A^T + B^T$$

$$(s \cdot A)^T = s \cdot A^T \quad s \text{ Skalar}$$

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$$

2.2.2 Matrizengesetze

$$A, B, C \in \mathbb{C}^{m \times n}$$

Gleichheit und Summe zweier Matrizen gleichen Typs

$$A = B \Leftrightarrow a_{ik} = b_{ik} \quad \text{für alle } i, k \qquad A - B = \mathbf{O} \Leftrightarrow A = B$$

$$C = A \pm B = (a_{ik} \pm b_{ik})_{m \times n} \quad \text{für alle } i, k$$

$$A + B = B + A \quad (\text{Kommutativgesetz})$$

$$(A + B) + C = A + (B + C) = A + B + C \quad (\text{Assoziativgesetz})$$

$$A = B \Rightarrow A + C = B + C$$

$$A \pm \mathbf{O} = A \quad \mathbf{O} - A = -A$$

Multiplikation einer Matrix mit einem Skalar ($s, t \in \mathbb{R}$)

$$s \cdot A := (s \cdot a_{ik})_{m \times n}$$

Jedes Element von A wird mit dem Skalar multipliziert.

$$s \cdot A = A \cdot s \quad (\text{Kommutativgesetz})$$

$$s \cdot (t \cdot A) = (s \cdot t) \cdot A = s \cdot t \cdot A \quad (\text{Assoziativgesetz})$$

$$s \cdot (A \pm B) = s \cdot A \pm s \cdot B \quad (s \pm t) \cdot A = s \cdot A \pm t \cdot A \quad (\text{Distributivgesetze})$$

Produkt von Matrizen

$$A \cdot B = C$$

Das Element c_{ik} der Ergebnismatrix ist das Skalarprodukt der Zeile i von A mit der Spalte k von B .

Bedingung: A, B verkettet, d. h. Spaltenzahl von A = Zeilenzahl von B

Typen-Schema:

$$(m \times n)\text{-Matrix mal } (n \times p)\text{-Matrix ergibt } (m \times p)\text{-Matrix}$$

Speziell für $p = 1$ ergibt sich:

$$(m \times n)\text{-Matrix mal } (n \times 1)\text{-Spaltenvektor ergibt } (m \times 1)\text{-Spaltenvektor}$$

7.3 LAPLACE-Transformation

Die LAPLACE-Transformation ist wie die FOURIER-Transformation eine *Integraltransformation*. Unterschiede zur FOURIER-Transformation:

- $f(t)$ ist reellwertig und definiert auf $[0, \infty)$.
- $j\omega$ wird verallgemeinert zu $s = \sigma + j\omega$ (auch p statt s üblich).

LAPLACE-Transformierte von f

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} := \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

$F(s)$ heißt LAPLACE-Transformierte von $f(t)$.

Durch die Einführung eines Realteiles σ entsteht für $\sigma > 0$ ein starker Dämpfungsterm, der die Existenz des obigen Integrals für viele Funktionen $f(t)$ sicherstellt, auch solche, die nicht FOURIER-transformierbar sind, z. B. $f(t) = 1$ für $t \geq 0$.

$f(t)$ Originalfunktion, Zeitfunktion

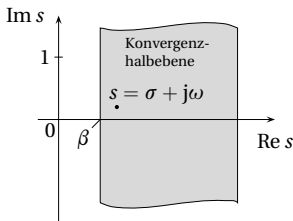
$F(s)$ Bildfunktion

Die Menge aller Originalfunktionen heißt *Originalraum*, die Menge aller Bildfunktionen *Bildraum*.

Hauptsatz der LAPLACE-Transformation

Ist $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ stückweise stetig und gilt $|f(t)| < Me^{\beta t}$ für irgendwelche Konstanten $M, \beta > 0$, dann ist $f(t)$ LAPLACE-transformierbar, d. h., $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ existiert für alle s mit $\operatorname{Re} s > \beta$. Aus der Kenntnis von $F(s)$ lässt sich $f(t)$ eindeutig zurückgewinnen in allen Stetigkeitspunkten von $f(t)$.

Die Menge $\{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} s > \beta\}$ bildet eine Halbebene in der GAUSSschen Zahlenebene, die *Konvergenzhalbebene* von $F(s)$.



Schreibweisen für Korrespondenzen

$f(t)$ ist *Original* von $F(s)$: $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$

$F(s)$ ist *Bild* von $f(t)$: $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$

$f(t)$ korrespondiert mit $F(s)$: $f \circ \bullet F$

Es gilt $\mathcal{L}\{\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}\} = F(s)$ und $\mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{L}\{f(t)\}\} = f(t)$ in allen Stetigkeitspunkten von $f(t)$.

Für die *inverse* LAPLACE-Transformation \mathcal{L}^{-1} existiert ebenfalls eine Integralformel, in der Praxis kommt man aber ohne diese und allein mit Korrespondenztabelle aus.

7.3.1 Rechenregeln der LAPLACE-Transformation**Linearitätssatz**

$$\mathcal{L}\{c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\} = c_1 \mathcal{L}\{f_1(t)\} + c_2 \mathcal{L}\{f_2(t)\} = c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s)$$

Die LAPLACE-Transformierte einer Summe ist die Summe der LAPLACE-Transformierten.

Ähnlichkeitssatz

$$\mathcal{L}\{f(at)\} = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right) \quad a > 0$$

Dämpfungssatz (Verschiebung im *Bildbereich*, s -Shift)

$$\mathcal{L}\{e^{-at} f(t)\} = F(s+a)$$

Verschiebungssatz (Verschiebung im *Zeitbereich*, t -Shift)

$$\mathcal{L}\{f(t-a)\varepsilon(t-a)\} = e^{-as} F(s) \quad a \geq 0$$

$\varepsilon(t)$: HEAVISIDE-Funktion, s. 4.5.1 $\varepsilon(t-a) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < a \\ 1 & \text{für } t > a \end{cases}$

Differenziationssatz ($f, f', \dots, f^{(n)}$ LAPLACE-transformierbar und stetig)

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n F(s) - \sum_{k=1}^n s^{n-k} f^{(k-1)}(0+)$$

$f(0+) := \lim_{t \rightarrow 0+} f(t)$ (rechtsseitiger Grenzwert), analog $f'(0+)$ etc.

Speziell für $n = 1$ und $n = 2$ ergeben sich die wichtigen Formeln

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0+) \quad \text{und}$$

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2F(s) - sf'(0+) - f'(0+)$$

Ist überdies $f(0+) = f'(0+) = 0$ („energieloses System“), so vereinfachen sich die Formeln zu

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) \quad \text{und}$$

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2F(s)$$

In Worten: Ableiten im Zeitbereich entspricht Multiplikation mit s im Bildbereich.

Integrationsatz

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau) d\tau\right\} = \frac{1}{s}F(s)$$

In Worten: Integration im Zeitbereich entspricht Division durch s im Bildbereich.

Ableitung der Bildfunktion

$$\frac{d^n}{ds^n} F(s) = (-1)^n \mathcal{L}\{t^n f(t)\}$$

speziell: $F'(s) = -\mathcal{L}\{t f(t)\}$ $F''(s) = \mathcal{L}\{t^2 f(t)\}$

Integration der Bildfunktion

$$\int_s^\infty F(v) dv = \mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}$$

Faltung zweier Zeitfunktionen, Faltungsintegral

$$(f_1 * f_2)(t) := \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau$$

Faltungssatz

$$\mathcal{L}\{(f_1 * f_2)(t)\} = F_1(s) \cdot F_2(s)$$

In Worten: Faltung im Zeitbereich entspricht Multiplikation im Bildbereich.

Rechenregeln für die Faltung

$$f_1 * f_2 = f_2 * f_1 \quad (\text{Kommutativgesetz})$$

$$(f_1 * f_2) * f_3 = f_1 * (f_2 * f_3) \quad (\text{Assoziativgesetz})$$

$$f_1 * (f_2 + f_3) = f_1 * f_2 + f_1 * f_3 \quad (\text{Distributivgesetz})$$

$$f * \delta = f \quad (\text{neutrales Element})$$

$\delta(t)$ DIRAC-Funktion, s. 4.5.1

Anfangswertsatz

$$f(0+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$$

Endwertsatz

$$f(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) \quad \text{falls } f(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) \text{ existiert}$$

7.3.2 Lösung von gewöhnlichen linearen Differenzialgleichungen

Linearitätssatz und Differenziationssatz der LAPLACE-Transformation bewirken, dass eine lineare Dgl. für $y(t)$ im Zeitbereich in eine lineare *algebraische* Gleichung für $Y(s)$ transformiert wird, die mit elementaren Mitteln nach Y aufgelöst werden kann.

Schematischer Rechengang

Dgl. mit Anfangswertbedingungen	Lösung $y(t)$	Originalraum
↓	↑	
LAPLACE-Transformation \mathcal{L} (Rechenregeln, Tabellen)	inverse LAPLACE-Transformation \mathcal{L}^{-1} (Rechenregeln, Tabellen)	
↓	↑	
Lineare <i>algebraische</i> Gleichung	\Rightarrow Lösung $Y(s)$	Bildraum

Hat die Störfunktion eine LAPLACE-Transformierte, wird die inhomogene Dgl. genauso gelöst wie die homogene. Besonders geeignet ist die Methode der LAPLACE-Transformation für stückweise definierte Störfunktionen (z. B. Sprungfunktion).

Ihre wahre Stärke zeigt die LAPLACE-Transformation jedoch erst bei der Lösung von linearen Differenzialgleichungssystemen. Ein solches wird durch die LAPLACE-Transformation in ein *lineares Gleichungssystem* überführt, welches mit den bekannten Methoden gelöst werden kann (s. 2.3).

7.3.3 Korrespondenztabelle der LAPLACE-Transformation

$$n \in \mathbb{N}^*, a, b \in \mathbb{R}$$

Tabelle geordnet nach Potenzen von s im Nenner

Gebrochenrationale Bildfunktionen

Vorkommende besondere Funktionen:

$\delta(t)$: DIRAC-Funktion, s. 4.5.1

$\varepsilon(t)$: HEAVISIDE-Funktion, Sprungfunktion, s. 4.5.1

$F(s) \bullet \circ f(t)$		$F(s) \bullet \circ f(t)$	
(1) 1	$\delta(t)$	(2) $\frac{1}{s}$	$\varepsilon(t)$
(3) $\frac{1}{s-a}$	e^{at}	(4) $\frac{1}{s-\ln a}$	$a^t, a > 0$
(5) $\frac{1}{s^2}$	t	(6) $\frac{1}{s(s-a)}$	$\frac{1}{a}(e^{at} - 1)$
(7) $\frac{1}{(s-a)(s-b)}$	$\frac{e^{at} - e^{bt}}{a-b}, a \neq b$	(8) $\frac{1}{s^2 - a^2}$	$\frac{1}{a} \sinh at$
(9) $\frac{1}{s^2 + a^2}$	$\frac{1}{a} \sin at$	(10) $\frac{1}{(s-a)^2}$	te^{at}
(11) $\frac{1}{s(as+1)}$	$1 - e^{-t/a}$	(12) $\frac{s}{(s-a)(s-b)}$	$\frac{ae^{at} - be^{bt}}{a-b}, a \neq b$
(13) $\frac{a}{(s-b)^2 + a^2}$	$e^{bt} \sin at$	(14) $\frac{a}{(s-b)^2 - a^2}$	$e^{bt} \sinh at$
(15) $\frac{s}{s^2 + a^2}$	$\cos at$	(16) $\frac{s}{s^2 - a^2}$	$\cosh at$

Sachwortverzeichnis

A

- Abbildung, eindeutige 121
- , eineindeutige 70, 122
- , lineare 69
- , umkehrbare 122
- Abbildungsmatrix 69
- abgeschlossenes Intervall 21
- abhängige Variable 121
- Ableitung der Bildfunktion 236
- der elementaren Funktionen 151
- der Umkehrfunktion 153
- einer Funktion 149
- , höhere 153
- , partielle 154
- Ableitungsfunktion 150
- Abrunden 23
- absolut integrierbar 232
- absolut konvergente Reihe 219
- absolute Besetzungszahl 242
- absolute Häufigkeit 241
- absolute Konvergenz 220
- absoluter Fehler 249
- Absorptionsgesetze 17
- Abspalten eines Linearfaktors 42, 128
- Abstand eines Punktes von einer Ebene 100
- eines Punktes von einer Geraden 95, 97
- von zwei nichtparallelen Geraden 98
- Abweichung vom Zentralwert 245
- Abwicklung 162
- abzählbar unendlich 18
- Abzinsungsfaktor 37
- Achsenabschnitt 94
- Achsenabschnittsgleichung 94, 100
- Addition 30
- von Brüchen 21
- von Vektoren 48
- Additionsmethode 40
- Additionssatz 27, 252
- der Normalverteilung 262
- Additionstheoreme 138, 143
- Additivität des Integrals 171
- Adjunkte 61
- Ähnlichkeit 79
- Ähnlichkeitssatz 235
- algebraische Gleichung 40
- algebraische Gleichung n -ten Grades 41
- algebraisches Komplement 61
- allgemeine Hyperbelgleichung 112
- allgemeine Kreisgleichung 104
- allgemeine Lösung 201
- allgemeine Parabelgleichung 109
- alternierend 35
- alternierende harmonische Reihe 219
- alternierende Reihe 221
- Altgrad 77
- Amplitude 139
- Amplitudenspektrum 233
- AND 14
- Anfangskapital 36
- Anfangswertbedingungen 201, 208
- Anfangswertproblem 214
- Anfangswertsatz 237
- Ankathete 82
- Ankreis 80
- Annuität 38
- Anordnungsaxiom 20

Anti-Kommutativgesetz 54
 Antivalenz 14
 Approximation 2. Ordnung 225
 äquivalente Umformung 38
 Äquivalenz 14
 Äquivalenzumformung 67
 Arbeitsintegral 194
 arccos 140
 arccot 140
 ARCHIMEDISCHE Spirale 146
 arcosh 144
 arcoth 144
 arcsin 140
 arctan 140
 Areafunktion 144
 area-kosinus-hyperbolicus 144
 area-sinus-hyperbolicus 144
 Argument 121
 Argument einer komplexen Zahl 29
 arithmetische Folge 34
 arithmetische Summe 35
 arithmetisches Mittel 22, 181, 243
 Arkusfunktion 140
 arsinh 144
 artanh 144
 assoziativ 15
 Assoziativgesetze 17, 47, 56 f., 237
 Astroide 108
 Asymptote 130, 133 f.
 – einer Hyperbel 113
 –, schräge 130, 148
 –, senkrechte 125, 130
 –, waagrechte 125, 130, 148
 Asymptotenkegel 117
 aufgespannter Raum 47
 Aufpunkt 99
 Aufrunden 23
 Aufzinsungsfaktor 36 f.
 Ausdruck 38
 ausgeartete Fläche 115
 ausgeartete Kegelschnitte 103
 ausgleichende Kurve 247

Ausklammern 21
 Aussage 13
 Außenwinkel 80, 82, 84
 Außenwinkelsumme 84
 äußerer Teilpunkt 92
 äußeres Produkt 53
 axialsymmetrisch 126, 189
 axialsymmetrisches Vektorfeld 195
 Axiome von KOLMOGOROW 252

B

Balkendiagramm 258
 Bandmatrix 58
 Barwert 36 f.
 Basis 24 f., 48, 134
 Basisvektor 69
 Basiswechsel 26
 BCD-Code 19
 bedingte Wahrscheinlichkeit 253
 Bedingung, hinreichende 14
 –, notwendige 14
 begleitendes Dreibein 164
 BERNOULLISCHE Differenzialgleichung 206
 BERNOULLISCHE Ungleichung 38
 BERNOULLISCHE Zahlen 225
 Beschleunigungsvektor 188
 beschränkte Funktion 126
 beschreibende Statistik 241
 Besetzungsdichte 243
 Besetzungszahl, absolute 242
 –, relative 242
 BESSEL-Funktion erster Art 208
 – zweiter Art 209
 BESSELSCHE Differenzialgleichung 208
 bestimmt divergente Reihe 219
 bestimmte Divergenz 34
 bestimmtes Integral 168
 Bestimmtheitsmaß 247
 Betrag einer komplexen Zahl 29
 – einer reellen Zahl 23
 – eines Vektors 60

Betrag eines Vektors 49, 52
 Betragsfunktion 131
 Bijektion 122
 Bildfunktion 233 f.
 Bildmenge 121
 Bildraum 234, 237
 binärer Logarithmus 26
 Binomialkoeffizient 26, 32
 Binomialverteilung 259
 binomische Formeln 27
 binomische Reihe 225
 binomischer Satz 26
 Binormale 163
 Binormalenvektor 164
 Bogen 86
 Bogenelement 159
 Bogenlänge 163, 182
 Bogenmaß 77, 135
 Breitenkreise 72
 Brennpunkt 103, 105, 109, 111
 Brennstrahl 105, 107, 109
 Brennweite 105, 109, 111
 BRIGGSscher Logarithmus 25
 Bruch, echter 21
 –, gemeiner 21
 Bruchgleichung 39
 Bruchrechnung 21
 Bruchungleichung 39

C

CAUCHY-Produkt von Reihen 219
 CAUCHY-SCHWARZsche Ungleichung 51
 charakteristische Gleichung 63, 207, 213
 charakteristisches Polynom 64, 213
 CLAIRAUTSche Differenzialgleichung 206
 cos 134
 cosh 141
 cot 134

coth 141
 CRAMERSche Regel 59, 68
 curl 192

D

Dämpfungssatz 235
 DE MORGANSche Gesetze 251
 DE MORGANSche Regeln 17
 Definitionsbereich 121, 148
 Definitionslücken 130, 148
 DEG 77
 dekadischer Logarithmus 25
 dekadisches System 18
 Deltafunktion 132
 Determinante 61
 –, dreireihige 62
 –, Rechenregeln 62
 –, zweireihige 61
 Dezimalbruch, endlicher 18
 –, periodischer 18
 Dezimalsystem 18
 Diagonalisierung 64
 Diagonalmatrix 58
 dichotome Grundgesamtheit 259
 Dichtefunktion 255
 Differenz 16
 Differenz von Mengen 251
 Differenzen von trigonometrischen Termen 139
 Differenzenfolge 33
 Differenzenquotient 149
 Differenzial 150
 – der Bogenlänge 159
 –, totales 155
 Differenzialgeometrie 159
 Differenzialgleichung, BERNOULLISCHE 206
 –, BESSELSche 208
 –, CLAIRAUTSche 206
 –, gewöhnliche 201, 237
 –, Grad 201

- , homogene 203
 - , homogene lineare 204
 - , inhomogene lineare 204
 - , lineare 204
 - , RICCATISCHE 206
 - , Struktursatz für lineare 204
 - , totale (exakte, vollständige) 205
 - , trennbare 203
 - Differenzialgleichungen, numerische Verfahren 214
 - Differenzialgleichungssystem, homogenes 216
 - , inhomogenes 216
 - , lineares 216, 238
 - Differenzialoperator 150
 - Differenzialquotient 149
 - Differenziation, implizite 155
 - Differenziationsregeln 152, 188
 - Differenziationssatz 235
 - differenzierbar 149
 - Differenzierbarkeit 149, 151
 - Dimension 48
 - Dimension der Lösungsmenge 67
 - Dimensionsformel 67
 - DIRAC-Funktion 132, 237 f.
 - direkte Proportionalität 22
 - Direktrix 109
 - DIRICHLET-Bedingungen 229
 - disjunkt 16
 - disjunkte Ereignisse 251 f.
 - Disjunktion 14, 16
 - Diskontierungsfaktor 37
 - Diskontierwert 37
 - diskrete Gleichverteilung 258
 - diskrete zufällige Variable 255
 - Diskriminante 40
 - Dispersion 256
 - distributiv 15
 - Distributivgesetze 17, 47, 51, 54, 56 f., 237
 - div 190
 - divergent 34, 218
 - Divergenz 190
 - Divergenzsatz 199
 - dividierte Differenz 129
 - Division 30
 - von Brüchen 22
 - Doppelintegral 177
 - Doppelintegral in Polarkoordinaten 178
 - doppelte Verneinung 15
 - doppelter Winkel 138
 - Drachenviereck 84
 - Drehkörper 185, 187
 - Drehung 74
 - Dreieck, Ankathete 82
 - , Gegenkathete 82
 - , gleichschenkliges 81
 - , gleichseitiges 81
 - , Hypotenuse 81
 - , Kathete 81
 - , Kongruenz 80
 - , rechtwinkliges 81
 - Dreieckimpulsfunktion 131
 - Dreiecksmatrix 58
 - Dreiecksungleichung 23, 49, 60
 - dreifacher Winkel 138
 - Dreifachintegral 178
 - Dreipunktgleichungen 99
 - dreireihige Determinante 62
 - Dualsystem 18
 - Durchmesser 86 f.
 - Durchschnitt 16, 251
 - durchschnittliches Wachstumstempo 244
 - Durchstoßpunkt 101
 - dyadisches System 18
- E**

 - Ebene 99
 - , Abstand eines Punktes von einer 100
 - ebene Kurve 146

- Ebenengleichung, Achsenabschnitts-
gleichung 100
- , Dreipunktgleichungen 99
- , HESSESche Normalform 100
- , implizite 99
- , Normalenform 100
- , Punkt-Richtungs-Form 99
- ebenes skalares Feld 188
- ebenes Vektorfeld 188
- echt gebrochenen rationale Funkti-
on 173
- echter Bruch 21
- e-Funktion 133
- Eigenschaften von Kurvenintegra-
len 194
- eigentliche Kegelschnitte 103
- Eigenvektor 64, 119, 216
- Eigenwert 119, 216
- eindeutige Abbildung 121
- eineindeutige Abbildung 18, 70, 122
- einfach zusammenhängend 196
- Einheitskreis 134
- Einheitsmatrix 58
- Einheitssprungfunktion 132
- Einhüllende 163
- einparametrische Kurvenschar 163
- Einschrittverfahren 214
- einseitiger Grenzwert 124
- einseitiger Test 267
- Einsetzungsmethode 40
- Element 15
- elementare Zeilenoperation 67
- Elementarereignis 250
- Elementarereignisraum 250
- elementefremd 16
- Eliminationsverfahren 216
- Ellipse 103, 105
- , Evolute 108
- , Flächeninhalt 108
- , Umfang 108
- Ellipsengleichung, allgemeine 106
- , Hauptform 106
- , Mittelpunktsleichung 106
- , Polargleichung 106
- , Scheitelform 106
- Ellipsensegment 108
- Ellipsensektor 108
- Ellipsoid 115
- empirische Kovarianz 247
- empirische Standardabweichung 246
- empirische Varianz 246
- empirische Verteilungsfunktion 243
- endliche Menge 16
- endlicher Dezimalbruch 18
- Endwertsatz 237
- energieloses System 236
- Entfernung zweier Punkte 92
- Envelope 163
- ε -Umgebung 124
- Ereignis 251 f.
- , disjunktes 252
- , sicheres 252
- , unabhängiges 253
- , unmögliches 252
- erf 263
- Ergänzungswinkel 78
- Erniedrigung der Ordnung 201
- error function 239, 263
- Ersatzfunktion 130
- Erwartungstreue 264
- Erwartungswert 256
- des arithmetischen Mittels 257
- einer Summe 256
- erweiterte Koeffizientenmatrix 65
- EUKLIDISCHE Norm 60
- EULER-CAUCHYSche Differenzialglei-
chung 213
- EULER-FOURIER-Formel 229
- EULERSche Formel 29, 139
- EULERSche Konstante 175
- EULERSche Zahl 26, 133, 219
- EULERSche Zahlen 227
- EULERScher Multiplikator 205
- EULERScher Polyedersatz 88

Evolute 148, 162
 – einer Ellipse 108
 – einer Hyperbel 114
 – einer Parabel 111
 Evolvente 162
 Existenz einer Stammfunktion 195
 EXOR 14
 explizite Form einer Funktionsgleichung 121
 Exponent 24 f.
 –, gebrochener 24
 –, natürlicher 24
 –, negativer 24
 Exponentialfunktion 133
 Exponentialgleichung 43
 Exponentialintegral 175
 Exponentialverteilung 263
 exponentieller Zerfall 133
 Extrema mit zwei Variablen 158
 – unter Nebenbedingung 158
 Extremum 156
 Extremwertsatz 127
 Extremwerttest, 1. 157
 –, 2. 157
 Exzentrizität, lineare 105, 111
 –, numerische 105, 111

F

Faktorisation eines Polynoms 41
 Faktorregel 152, 171, 188
 Fakultät 26, 31
 Faltung 236
 –, Rechenregeln 237
 Faltungsintegral 236
 Faltungssatz 237
 Fehler 1. Art 266
 – 2. Art 266
 –, absoluter 249
 –, prozentualer 249
 –, relativer 249
 –, wahrer 249
 Fehlerfortpflanzung 249
 Fehlerfortpflanzungsgesetz, GAUSSSches 250
 Fehlerfunktion 239, 263
 Feld 187
 –, ebenes skalares 188
 –, räumliches skalares 188
 Fixpunktgleichung 43
 Fixpunktiteration 43
 Fläche 2. Ordnung 114
 –, ausgearbeitete 115
 –, eigentliche 115
 – im Raum 166
 Flächenelement 177
 Flächenelement in Polarkoordinaten 178
 Flächeninhalt 102, 180, 197
 – einer Ellipse 108
 – eines Dreiecks 102
 Flächenmomente 1. Grades 185
 Flächennormalenvektor 167
 Fluss des Vektorfeldes 191
 Flusssdichte 200
 Folge 33
 –, arithmetische 34
 –, geometrische 35
 –, Monotonie 34
 formaler Vektor 189
 Formel von MOIVRE 144
 FOURIER-Amplitude 230
 FOURIER-Analyse 228
 –, Hauptsatz 229
 FOURIER-Integral 231
 FOURIER-Koeffizient, komplexer 230
 FOURIER-Kosinus-Transformierte 233
 FOURIER-Reihe 228
 –, komplexe Form 230
 –, Spektraldarstellung 230
 FOURIER-Sinus-Transformierte 233
 FOURIER-Transformation 231
 frac 131
 Fraktile 244

freier Vektor 46
 FRENETSche Ableitungsformeln 164
 Frequenzbereich 233
 Frequenzspektrum, stetiges 231
 FROBENIUS-Norm 61
 Fundamentalmatrix 217
 Fundamentalsatz der Algebra 41
 Funktion 121
 –, 1. Ableitung 149
 –, Area- 144
 –, Arkus- 140
 –, beschränkte 126
 –, Delta- 132
 –, DIRAC-Impuls- 132
 –, e- 133
 –, Einheitssprung- 132
 –, Exponential- 133
 –, Gamma- 239
 –, ganzrationale 127
 –, gebrochenenrationale 173
 –, gebrochenrationale 130
 –, gerade 126, 132, 231, 233
 –, Grenzwerte 124
 –, HEAVISIDE- 132, 235, 238
 –, Hintereinanderschaltung 123
 –, Hyperbel- 141
 –, logarithmische 226
 – mit mehreren unabhängigen Variablen 123
 –, Mittelwert 169, 181
 –, nichtrationale 131
 –, periodische 126, 228
 –, Stetigkeit 127
 –, symmetrische 233
 –, symmetrische periodische 231
 –, Theta- 132
 –, trigonometrische 134, 226
 –, unecht gebrochene 130
 –, ungerade 126, 231, 233
 –, vektorwertige 187
 – von zwei reellen Veränderlichen 123
 –, Winkel- 134

–, Wurzel- 132
 –, zyklometrische 140, 226
 Funktional-Determinante 178
 Funktionsgleichung 121
 Funktionswert 121
 Fußpunkt 97

G

Gammafunktion 209, 239
 ganze Zahl 20
 ganzrationale Funktion 127
 GAUSS-Elimination 67
 GAUSS-JORDANScher Algorithmus 59
 GAUSSSche Fundamentalgröße 197
 GAUSSSche Glockenkurve 261
 GAUSSSche Normalgleichungen 248
 GAUSSSche Zahlenebene 28
 GAUSSSches Fehlerfortpflanzungsgesetz 250
 GAUSSSches Fehlerintegral 175
 GAUSS-Verteilung 261
 Gebietsintegral 177
 gebrochener Exponent 24
 gebrochenrationale Funktion 130
 gebundener Vektor 46
 gefenstertes Signal 232
 Gegenereignis 251 f.
 Gegenkathete 82
 gemeiner Bruch 21
 gemeiner Logarithmus 25
 gemischtes Glied 103
 gemischtes Produkt 54
 geometrische Folge 35
 geometrische Reihe 221
 geometrische Summe 35
 geometrisches Mittel 22, 244
 geordnetes n -Tupel 16
 geordnetes Tripel 16
 Gerade 93
 –, Abstand eines Punktes von einer 95, 97

- , Abstand von zwei nichtparallelen 98
- , Achsenabschnitt 94
- durch den Ursprung 96
- in der Ebene 93
- , Richtungsvektor 95
- , Schnittpunkt mit Ellipse 107
- , Schnittpunkt mit Hyperbel 113
- , Schnittpunkt mit Kreis 105
- , Schnittpunkt mit Parabel 110
- , Schnittpunkt zweier 97
- , Schnittwinkel zweier 98
- , Steigung 94
- , windschief 97
- gerade Funktion 126, 132, 231, 233
- Geradengleichung 39
- , Achsenabschnittsgleichung 94
- , explizite Form 94
- , HESSESche Normalform 94 f.
- , implizite Form 94
- in Polarkoordinaten 94
- , Punkt-Richtungs-Form 95
- , Punkt-Steigungs-Form 93
- , Zweipunkt-Form 93, 96
- Geradenschar 206
- gerader Hohlzylinder 89
- gerader Kreiskegel 90
- gerader Kreiszylinder 89
- Geschwindigkeitsvektor 187
- Gesetz der großen Zahlen 257
- gewöhnliche Differenzialgleichung 201
- gewöhnliche lineare Differenzialgleichung 237
- gewöhnliche Zykloide 146
- Gleichanteil 229
- Gleichheit 16
- gleichmächtig 18
- gleichschenkliges Dreieck 81
- gleichseitiges Dreieck 81
- Gleichsetzungsmethode 40
- Gleichung 38
- , algebraische 40
- , algebraische, n -ten Grades 41
- , Exponential- 43
- , goniometrische 43
- , lineare 39
- , logarithmische 43
- , quadratische 40
- , transzendente 40
- , Wurzel- 43
- Gleichungssystem 39
- , homogenes lineares 65
- , inhomogenes lineares 65
- , inkonsistentes 68
- , lineares 51, 65
- , LR-Zerlegung 68
- , quadratisches lineares 66
- , triviale Lösung 66
- , überbestimmtes 65
- , unterbestimmtes 65
- Gleitkommadarstellung 19, 26
- globales Maximum 156
- globales Minimum 156
- Glockenkurve 261
- Goldener Schnitt 79
- goniometrische Beziehungen 138
- goniometrische Gleichung 43
- grad 190
- Grad des Polynoms 127
- Grad einer Differenzialgleichung 201
- Gradient 167, 190
- Gradientenfeld 195
- Gradmaß 77, 135
- grafische Integration 202
- Graph 121
- Grenze, obere 16
- , untere 16
- Grenzwert einer Funktion 124
- , einseitiger 124
- , linksseitiger 124
- , rechtsseitiger 124
- , uneigentlicher 125

Grenzwert einer Folge 33
 Grenzwertsatz 124
 – von DE MOIVRE und LAPLACE 262
 –, zentraler 262
 große Halbachse 105
 größter gemeinsamer Teiler (ggT) 22
 Grundintegral 170
 GULDINSche Regeln 87

H

Hakenintegral 196
 Halbachse, imaginäre 111
 –, kleine 105
 –, reelle 111
 halber Winkel 138
 halboffenes Intervall 21
 Halbparameter, einer Ellipse 105
 – einer Hyperbel 111
 – einer Parabel 109
 harmonische Reihe 219 f.
 harmonisches Mittel 23, 244
 Häufigkeit, absolute 241
 –, relative 242
 Häufigkeitspolygon 243
 Häufigkeitstabelle, klassierte 242
 –, unklassierte 241
 Hauptabschnittsmatrix 57
 Hauptachse 105
 –, große 105
 Hauptachsentransformation 119
 Hauptdiagonale 55
 Hauptform der Ellipse 106
 – der Hyperbel 112
 – der Parabel 109
 Hauptnenner 21
 Hauptnormalenvektor 164
 Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung 168
 Hauptsatz der FOURIER-Analysis 229
 Hauptsatz der LAPLACE-Transformation 234
 Hauptscheitel 105
 HEAVISIDE-Funktion 132, 235, 238
 HERMITESche Matrix 59
 HESSEsche Normalform 94 f., 100
 hexadezimal 19
 hinreichende Bedingung 14
 Hintereinanderschaltung von Funktionen 123
 Histogramm 243
 hochsignifikant 267
 Höhenlinie 123, 188
 Höhensatz 82
 höhere Ableitung 153
 Hohlzylinder, gerader 89
 homogene Differenzialgleichung 203
 homogene Koordinaten 75
 homogene lineare Differenzialgleichung 204
 homogenes Differenzialgleichungssystem 216
 homogenes lineares Gleichungssystem 65
 HORNERSches Schema 42
 Hyperbel 103, 111, 130
 –, Evolute 114
 Hyperbelfunktion 141, 227
 Hyperbelgleichung, allgemeine 112
 –, Hauptform 112
 –, Mittelpunktsgleichung 112
 –, Polargleichung 112
 –, Scheitelgleichung 112
 Hyperbelkosinus 141
 Hyperbelsinus 141
 hyperbolische Spirale 147
 hyperbolischer PYTHAGORAS 142
 Hyperboloid 116
 –, einschaliges 115 f.
 –, zweischaliges 115 f.
 Hyperfläche 2. Ordnung 119
 hypergeometrische Verteilung 259
 Hypotenuse 81

I

- Idempotenz 15
- imaginäre Einheit 28
- imaginäre Halbachse 111
- Imaginärteil 28
- Implikation 14
- implizite Differenziation 155
- implizite Form einer Funktionsgleichung 121
- implizite Gleichung der Ebene 99
- implizite Kurvengleichung 2. Grades 103
- indirekte Proportionalität 22
- Indizes 33
- Infimum 16, 33
- Infix-Schreibweise 18
- inhomogene lineare Differenzialgleichung 204
- inhomogenes Differenzialgleichungssystem 216
- inhomogenes lineares Gleichungssystem 65
- Injektion 122
- Inklusion 16
- inkonsistentes Gleichungssystem 68
- Inkreis 82, 84
- Inkreismittelpunkt 80
- Inkreisradius 80
- Inkugel 87
- Innenwinkel 80, 82, 84
- Innenwinkelsumme 84
- innerer Teilpunkt 92
- inneres Produkt 50
- int 131
- Integerfunktion 131
- Integritätsbedingung 205
- Integral, Additivität 171
 - , bestimmtes 168
 - , Faktorregel 171
 - , Monotonie 171
 - , Summenregel 171
 - , unbestimmtes 167
 - , uneigentliches 171
- Integralfunktion 168
- Integalkosinus 175
- Integrallogarithmus 175
- Integralsinus 175
- Integraltransformation 234
- Integrand 167
- Integration 167
 - , grafische 202
 - , numerische 175
 - , partielle 173
 - rationaler Ausdrücke 172
- Integrationsdifferenzial 167
- Integrationsgrenze 168
- Integrationskonstante 167
- Integrationsregel 170 f.
- Integrationsatz 236
- Integrationstechniken 172
- Integrationsvariable 167
- integrierender Faktor 205
- Interpolation 129
- Interpolationsformel von LAGRANGE 129
- Interpolationsformel von NEWTON 129
- Intervall 21
 - , abgeschlossenes 21
 - , halboffenes 21
 - , offenes 21
- Intervallschätzung 265
- inverse LAPLACE-Transformation 235
- inverse Matrix 59
- Inversionsregel 38
- irrationale Zahl 20
- Irrtumswahrscheinlichkeit 265, 267
- Isokline 202
- isolierter Punkt 162
- Iterationsfolge 43

J

JACOBI-Determinante 178
 Jochpunkt 158

K

Kardinalität 18
 Kardinalzahlen 20
 kartesische Form einer komplexen
 Zahl 29
 kartesische Koordinaten 71, 183
 kartesisches Produkt 17
 Kathete 81
 Kathetensatz 82
 Kegel 115, 117
 Kegelschnitt 102
 –, ausgearbeiteter 103
 –, eigentlicher 103
 –, Klassifikation 103
 Kehrmatrix 59
 Kehrwert 21, 24
 Kehrwertregel 152
 KEPLERSche Fassregel 87, 176
 Kettenlinie 141, 147 f.
 Kettenregel 153 f., 172, 188
 Klammern auflösen 21
 Klasse 242
 Klassenanzahl 242
 Klassenbreite 242
 Klassenmitte 242
 klassierte Häufigkeitstabelle 242
 Klassifikation der Kegelschnitte 103
 kleine Halbachse 105
 kleinstes gemeinsames Vielfaches
 (kgV) 22
 Knick 149
 Koeffizientenmatrix 65
 Koeffizientenvergleich 174
 Kofaktor 61
 kollinearer Vektor 47
 KOLMOGOROW 251
 Kombinatorik 31
 kommutativ 15
 Kommutativgesetze 17, 47, 51, 56, 237
 komplanarer Vektor 47
 Komplement 17, 251
 Komplementbeziehungen 137
 Komplementgesetze 17
 Komplementwinkel 78
 komplexe Form der FOURIER-
 Reihe 230
 komplexe Zahl 28, 31
 komplexer FOURIER-Koeffizient 230
 Konditionszahl 249
 Konfidenzintervall 265
 Konfidenzniveau 265
 Kongruenz 79
 Kongruenz von Dreiecken 80
 konjugiert komplexe Zahl 28
 Konjunktion 14, 16
 konkav 160
 konservatives Vektorfeld 195
 Konsistenz 264
 Konstantenregel 151
 Konstantenvektor 65
 Konstruktion einer Stammfunkti-
 on 196
 Kontinuitätsprinzip 30
 Kontradiktion 15
 konvergent 34, 218
 Konvergenzbereich 222
 Konvergenzhalbene 234
 Konvergenzkriterien für Reihen 220
 Konvergenzordnung 45
 Konvergenzradius 222
 Konvergenzverhalten einer Potenzrei-
 he 222
 konvex 160
 Koordinatenfunktion 187
 Koordinatensystem 71
 Koordinatentransformation 73
 Korrelationskoeffizient 247
 Korrelationsmaß 246

- Korrespondenztabelle der LAPLACE-Transformation 238
 kosinus-hyperbolicus 141
 Kosinussatz 81
 Kotangens 135
 Kovarianz, empirische 247
 Kreis 85, 103 f.
 –, Parametrisierung 104
 Kreisabschnitt 86
 Kreisausschnitt 86
 Kreisevolvente 162
 Kreisfläche 86
 Kreisgleichung, allgemeine 104
 – durch drei Punkte 105
 Kreiskegelstumpf 90
 Kreissegment 86
 Kreissektor 86
 Kreisumfang 86
 Kreiszyylinder 118
 –, gerader 89
 Kreuzprodukt 53
 kritischer Bereich 267
 KRONECKER-Symbol 58
 Krümmung 161, 164
 – einer Ellipse 107
 – einer Hyperbel 114
 – einer Parabel 110
 – einer Raumkurve 165
 Krümmungskreis 107
 Krümmungsmittelpunkt 161, 166
 Krümmungsradius 161, 165
 Krümmungsverhalten 148, 160
 $k\sigma$ -Regeln 261
 kubische Parabel 128
 kubisches Polynom 128
 Kugel 90, 115
 Kugelabschnitt 90
 Kugelausschnitt 91
 Kugeldreieck 91
 Kugelkappe 91
 Kugelkoordinaten 72, 163, 180, 183, 190 ff.
 Kugelschicht 91
 Kugelsegment 90
 Kugelsektor 91
 kugelsymmetrisch 189
 Kugelzone 91
 Kugelzweieck 91
 Kurve 2. Ordnung 102
 Kurvendiskussion 148
 Kurvenintegral 193
 –, Eigenschaften 194
 Kurvenmomente 1. Grades 185
 Kurvenschar 201
 Kürzen 21
- L**
- Lagemaß 243
 LAGRANGE-Multiplikatorregel 158
 LAPLACE-Experiment 258
 LAPLACE-Gleichung 191
 LAPLACE-Operator 191
 LAPLACEScher Entwicklungssatz 61
 LAPLACE-Transformation 234
 –, Hauptsatz 234
 –, inverse 235
 –, Korrespondenztabelle 238
 LAPLACE-Transformierte 234
 Laufvariable 23
 leere Menge 16
 leere Summe 24
 leeres Produkt 24
 LEIBNIZSche Sektorformel 181
 LEIBNIZSche Zinseszinsformel 36
 Leitlinie 103, 109
 Leitstrahl 109
 L'HOSPITALSche Regel 125
 Limes 124
 linear abhängig 47
 linear unabhängig 47
 linear unabhängige Basislösungen 208, 212
 lineare Abbildung 69

- lineare Approximation 156
 lineare Differenzialgleichung 204
 lineare Exzentrizität 105, 111
 lineare Fehlerfortpflanzung 249
 lineare Gleichung 39
 lineare Hülle 47
 lineare Minimumeigenschaft 245
 lineare Näherung 152, 156
 lineare Regression 248
 lineare Substitution 203
 lineare Unabhängigkeit 47
 lineare Ungleichung 40
 lineare Verzinsung 36
 linearer Raum 46
 lineares Ausgleichsproblem 248
 lineares Differenzialgleichungssystem 216, 238
 lineares Gleichungssystem 51, 65
 lineares Polynom 128
 Linearisierung 152, 156, 227
 Linearitätsbedingung 69
 Linearitätssatz 235
 Linearkombination 47
 Linienelement 163, 202
 –, vektorielles 194
 linienflüchtiger Vektor 46
 Linkskrümmung 157, 160
 linksseitiger Grenzwert 124
 ln-Reihe 226
 Logarithmand 25
 Logarithmengesetze 25
 logarithmische Differenziation 151, 153
 logarithmische Funktion 226
 logarithmische Gleichung 43
 logarithmische Integration 170
 logarithmische Spirale 146
 Logarithmus 25
 –, binärer 26
 –, BRIGGSScher 25
 –, dekadischer 25
 –, gemeiner 25
 –, natürlicher 26, 134
 –, Zweier- 26
 Logarithmusfunktion 133
 lokales Maximum 156
 lokales Minimum 156
 Lösung, allgemeine 201
 –, partikuläre 201
 –, singuläre 201
 Lösungskurve 201
 Lösungsvektor 65
 Lotgerade durch einen Punkt 101
 LR-Zerlegung 68
- M**
- Mächtigkeit 18
 MACLAURINSche Formel 224
 Mantelfläche eines Rotationskörpers 182
 Mantellinie 87
 Mantissee 19, 26
 Massenträgheitsmoment 187
 Matrix 55
 –, Band- 58
 –, Diagonal- 58
 –, Dreiecks- 58
 –, Einheits- 58
 –, erweiterte Koeffizienten- 65
 –, HERMITESche 59
 –, inverse 59
 –, Keh- 59
 –, Koeffizienten- 65
 –, negativ definite 59
 –, Ordnung 57
 –, orthogonale 59
 –, Permutations- 58
 –, positiv definite 59
 –, quadratische Form 59
 –, Rang 60
 –, reguläre 57
 –, schiefssymmetrische 59
 –, singuläre 57

- , symmetrische 59
 - , System- 65
 - , unitäre 59
 - Matrixnorm 60
 - Matrizenverfahren 216
 - maximaler Fortpflanzungsfehler 249
 - Maximum, globales 156
 - , lokales 156
 - Median 245
 - mehrdeutig 18
 - Mehrfachintegrale 177
 - Mehrschrittverfahren 214
 - Menge aller Stammfunktionen 167
 - , endliche 16
 - , leere 16
 - , unendliche 16
 - Mengenbildungsoperator 15
 - Mengenpotenz 17
 - Meridiankurve 198
 - Merkmalsausprägungen 241
 - Methode der kleinsten Quadrate 248
 - Minimum, globales 156
 - , lokales 156
 - Minor 61
 - Mittel, arithmetisches 22
 - , geometrisches 22, 244
 - , harmonisches 23, 244
 - , quadratisches 244
 - Mittelparallele 83
 - Mittelpunktgleichung der Ellipse 106
 - der Hyperbel 112
 - Mittelpunktstrahl 146
 - Mittelpunktswinkel 86
 - Mittelsenkrechte 80
 - Mittelwert 22, 243
 - einer Funktion 169, 181
 - Mittelwertsatz der Integralrechnung 169
 - mittlerer Wachstumsfaktor 244
 - Modalwert 245
 - Momente 1. Grades 184 f.
 - Momente 2. Grades 186
 - monoton fallend 34
 - monoton wachsend 34
 - Monotonie 122, 171, 252
 - Monotonie der Addition 21
 - Monotonie der Multiplikation 21
 - Monotonie einer Folge 34
 - Monotonieverhalten 148
 - Multinomialkoeffizient 32
 - Multiplikation 30
 - von Brüchen 21
 - von Vektoren mit Skalaren 48
 - Multiplikationssatz für Ereignisse 253
 - Multiplikationstheorem 63
- N**
- Nablaoperator 189
 - Nachdifferenzieren 153
 - nacheindeutig 18
 - nachschüssig 37
 - Näherungsformel 227
 - NAND 14
 - natürliche Zahl 19
 - natürlicher Exponent 24
 - natürlicher Logarithmus 26, 134
 - natürliches Wachstum 133
 - Nebenachse 105
 - Nebendiagonale 55
 - Nebenscheitel 105
 - negativ definite Matrix 59
 - negativ korreliert 247
 - negativer Exponent 24
 - negativer Vektor 50
 - neutrales Element 47
 - NEWTONsches (Tangenten-)Näherungsverfahren 44
 - NEWTON-Schreibweise 150
 - nichtäquivalente Umformung 38
 - nichtrationale Funktion 131
 - nichttriviale Lösung 64
 - NICODSche Funktion 14
 - Niveaulinie 123, 188

NOR 14
 Normale 160, 163
 –, an Ellipse 107
 –, an Hyperbel 113
 –, an Kreis 105
 –, an Parabel 110
 Normalebene 164
 Normaleneinheitsvektor 99, 167, 198
 Normalenform einer Ebene 100
 Normalenvektor 94, 99
 Normalform einer quadratischen Gleichung 40
 Normalverteilung 261
 normierte Kovarianz 247
 normierter Vektor 49
 notwendige Bedingung 14
 notwendiges Konvergenzkriterium 220
 Nullfolge 34
 Nullhypothese 266
 Nullmatrix 55
 Nullphase 139
 Nullstelle 127
 Nullteiler 57
 Nullvektor 47, 49
 numerische Exzentrizität 105, 111
 numerische Integration 175
 numerische Verfahren für Differenzialgleichungen 214
 Numerus 25

O

obere Dreiecksmatrix 58
 obere Grenze 16
 obere Schranke 33, 126
 Oberflächenintegral 196
 Obermenge 16
 Oberschwingung 229
 offenes Intervall 21
 Oktaeder 89
 oktal 19

OR 14
 Ordinalzahlen 20
 Ordnung 201
 – der Matrix 57
 –, Erniedrigung 201
 –, Reduktion 207
 Originalfunktion 233 f.
 Originalraum 234, 237
 orthogonal 50
 orthogonale Matrix 59
 orthogonale Zerlegung 51
 orthogonaler Einheitsvektor 49
 Ortsvektor 52, 92

P

Paar 15
 paarweise konjugiert 41
 Parabel 103, 128
 –, Evolute 111
 –, kubische 128
 – n -ten Grades 128
 Pabelgleichung, allgemeine 109
 –, Hauptform 109
 –, Polargleichung 110
 –, Scheitelgleichung 109
 Parabelscheitel 128
 Parabelsegment 111
 Paraboloid 118
 –, elliptisches 115
 –, hyperbolisches 115
 parallel 97
 Parallelogramm 53, 83
 Parameter 187, 264
 Parameterform einer Funktionsgleichung 121
 Parameterregel 153
 Parametrisierung des Kreises 104
 Parametrisierung eines Flächenstücks 196
 Partialbruchzerlegung 173
 Partialdivision 42

- Partialsomme 35
- partielle Ableitung 154
- partielle Integration 173
- partikuläre Lösung 201
- Periode 29, 126, 228
 - , primitive 228
- periodische Funktion 126, 228
- periodischer Dezimalbruch 18
- Periodizität 137, 148
- Peripheriewinkel 85 f.
- Permutation 31
- Permutationsmatrix 58
- Phase 29
- Phasenspektrum 233
- Pivotelement 68
- Planimetrie 77
- Pol 148
- polares Flächenmoment 2. Grades 186
- Polarform einer komplexen Zahl 29
- Polargleichung der Ellipse 106
 - der Hyperbel 112
 - der Parabel 110
- Polarkoordinaten 72, 92, 94, 154
- Polarwinkel 29
- Polstelle 130
- Polyeder 88
- Polygonzug 215
- Polygonzugverfahren von EULER-CAUCHY 214
- Polynom 41, 127
 - , Grad 127
 - , kubisches 128
 - , lineares 128
 - , quadratisches 128
 - , trigonometrisches 229
 - , Zerlegung in Linearfaktoren 128
- Polynomdivision 22, 42, 130
- Positionssystem 18
- positiv definite Matrix 59
- positiv korreliert 247
- postnumerando 37
- Potenz 24, 31
- Potenzen von j 29
- Potenzfunktion 128, 130
- Potenzgesetze 25
- Potenzial 195
- Potenzialfeld 195
- Potenzmenge 17
- Potenzprodukt 250
- Potenzregel 151
- Potenzreihe 174, 222
- Potenzreihenansatz 206
- pq -Formel 40
- Prädiktor-Korrektor-Verfahren 214
- pränumerando 37
- Primfaktor 22
- primitive Periode 228
- Primzahl 20
- Prisma 88
- Produkt, äußeres 53
 - , gemischtes 54
 - , leeres 24
 - von Matrizen 56
- Produktintegration 173
- Produktmenge 17
- Produktregel 152, 188, 193
- Produktzeichen 23
- Projektion 51, 71
- Proportion 22
- Proportionalität, direkte 22
 - , indirekte 22
- prozentualer Fehler 249
- Punkt vor Strich 21
- Punkt-Richtungs-Form 95, 99
- Punkt-Steigungs-Form 93
- punktsymmetrisch 126
- Punktwolke 246
- Pyramide 88
- Pyramidenstumpf 88

Q

- Quader 88
- Quadrant 135

Quadrat 83
 Quadrate von trigonometrischen Termen 139
 quadratische Ergänzung 120
 quadratische Form 59
 quadratische Gleichung 40
 quadratische Minimumeigenschaft 244
 quadratische Ungleichung 40 f.
 quadratisches lineares Gleichungssystem 66
 quadratisches Mittel 181, 244
 quadratisches Polynom 128
 Quadratur 180
 Quantil 244, 266
 – der χ^2 -Verteilung 271
 – der Standard-Normalverteilung 270
 – der t -Verteilung 270
 Quelldichte 191, 200
 Quelle 191
 Quotientenfolge 33
 Quotientenkriterium 220
 Quotientenregel 152

R

RAD 77
 radialsymmetrisch 189
 radialsymmetrisches Vektorfeld 195
 Radiant 77
 Radikand 24
 Radius 86 f.
 Ränder des Konvergenzbereiches 222
 Randwertbedingungen 201, 208
 Rang einer Matrix 60
 Rate 36
 Raten-Rentenformel 37
 rationale Zahl 20
 Raum, aufgespannter 47
 –, linearer 46
 Raumfläche 163
 Raumintegral 178

Raumkurve 163
 räumlicher Satz des PYTHAGORAS 52
 räumliches skalares Feld 188
 räumliches Vektorfeld 189
 Raute 83
 Realteil 28
 Rechenregeln für die Faltung 237
 Rechteck 83
 Rechteckimpulsfunktion 131
 Rechteckverteilung 260
 Rechtskrümmung 157, 160
 rechtsseitig stetige Treppenfunktion 243
 rechtsseitiger Grenzwert 124
 Rechtssystem 71
 rechtwinkliges Dreieck 81
 rect 131
 Reduktion der Ordnung 207
 Reduktionsformeln 136
 reelle Halbachse 111
 reelle Zahl 19
 –, Betrag 23
 –, Signum 23
 reeller FOURIER-Koeffizient 229
 Regel von GULDIN 198
 Regel von SARRUS 62
 regelmäßiges Sechseck 84
 regelmäßiges Vieleck 84
 Regressionsgerade 248
 Regressionsparameter 248
 Regressionsrechnung 247
 Regula falsi 45
 reguläre Matrix 57
 Reihe 218
 –, absolut konvergente 219
 –, alternierende 221
 –, alternierende harmonische 219
 –, bestimmt divergente 219
 –, binomische 225
 –, CAUCHY-Produkt 219
 –, divergente 218
 –, FOURIER- 230

- für Exponentialfunktionen 225
 - , geometrische 221
 - , harmonische 219 f.
 - , konvergente 218
 - , Konvergenzkriterien 220
 - , Kosinus- 226
 - , ln- 226
 - , Sinus- 226
 - , Tangens- 226
 - , TAYLOR- 224 f.
 - , unendliche 36, 218
 - rein imaginäre Zahl 28
 - rektifizierende Ebene 164
 - rekursive Darstellung 33
 - rekursive Definition 26
 - Relation 18
 - Relationszeichen 41
 - relative Besetzungszahl 242
 - relative Häufigkeit 242
 - relativer Fehler 249
 - relativer Fortpflanzungsfehler 249
 - Rente 36
 - Rentenformel einer Zeitrente 37
 - Rentenrechnung 37
 - Restfunktion 131
 - Restglied 175, 219, 223 f.
 - Restgliedabschätzung 176 f.
 - Rhombus 83
 - RICCATISCHE Differenzialgleichung 206
 - Richtungsableitung 190
 - Richtungsfeld 202
 - Richtungskosinus 52 f., 96
 - Richtungsvektor 77, 95, 99
 - Richtungswinkel 52, 95
 - RIEMANNSche Summe 168
 - rot 192
 - Rotation 74, 192
 - Rotationsfläche 198
 - Rotationsparaboloid 118
 - rotatorische Bewegung 183
 - Rückkehrpunkt 162
 - Rückwärtssubstitution 68
 - Rundungsfehler 214
 - Rundungsregel 23
 - RUNGE-KUTTA-Verfahren 215
- S**
- Sattelpunkt 158
 - Satz des PYTHAGORAS 82
 - Satz des THALES 85
 - Satz von BAYES 254
 - Satz von BOLZANO 127
 - Satz von CAVALIERI 87
 - Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit 253
 - Satz von DIRICHLET 229
 - Satz von FUBINI 178 f.
 - Satz von GAUSS 199
 - Satz von GREEN 199
 - Satz von HURWITZ 59
 - Satz von LAPLACE 252
 - Satz von MOIVRE 31
 - Satz von PAPPUS 198
 - Satz von PTOLEMÄUS 83
 - Satz von SCHWARZ 154
 - Satz von STEINER 187
 - Satz von STOKES 200
 - Satz von WEIERSTRASS 127
 - Säulendiagramm 242
 - Schachbrettregel 61
 - Schätzfunktion 264
 - Schätzprinzip 264
 - Schaubild 121
 - Scheitel 78, 109, 111
 - Scheitelgleichung der Ellipse 106
 - der Hyperbel 112
 - der Parabel 109
 - Scheitelpunktsform 128
 - Schenkel 78
 - schiefsymmetrische Matrix 59
 - Schleppkurve 147
 - schließende Statistik 264

- Schmiegeebene 164
 Schnittgerade zweier Ebenen 101
 Schnittpunkt, Gerade mit Ellipse 107
 –, Gerade mit Hyperbel 113
 –, Gerade mit Kreis 105
 –, Gerade mit Parabel 110
 –, zweier Geraden 97
 Schnittwinkel, spitzer 101
 – zweier Funktionsgraphen 160
 – zweier Geraden 98
 schräge Asymptote 130, 148
 Schranke 16
 –, obere 33
 –, untere 33
 Schrittweite 176
 schwach monoton fallend 122
 schwach monoton wachsend 122
 Schwerpunkt 80, 83, 185, 256
 Sehne 86, 149
 Sehnennäherung 45
 Sehnensatz 85
 Sehnentangentenwinkel 85
 Sehnenviereck 83
 Seitenhalbierende 80
 Sekante 149
 Sekantensatz 85
 Sekantentangentensatz 86
 Sektorfläche 181
 Senke 191
 senkrechte Asymptote 125, 130
 separabel 203
 sgn 131
 SHEFFERSche Funktion 14
 sicheres Ereignis 252
 Sicherheitswahrscheinlichkeit 265
 Signal, gefenstertes 232
 signifikant 267
 Signifikanzniveau 267
 Signifikanztest 266
 Signum einer reellen Zahl 23
 Signumfunktion 131
 SIMPSONSche Regel 87, 176
 sin 134
 singuläre Lösung 201
 singuläre Matrix 57
 singulärer Punkt 162
 sinh 141
 Sinus 135
 sinus-hyperbolicus 141
 Sinus-Reihe 226
 Sinussatz 81
 Skalar 46
 skalares Linienelement 193
 skalares Oberflächenelement 197
 Skalarmatrix 58
 Skalarprodukt 50, 53, 77
 Skaliermatrix 76
 Skalierung 70, 74 f.
 Spaltenindex 55
 Spaltensummennorm 60
 Spaltenvektor 55
 Spannvektor 99
 Spannweite 242, 245
 Sparkassen-Rentenformel 37
 Spat 62
 Spatprodukt 54, 165 f., 198
 Spektraldarstellung der FOURIER-
 Reihe 230
 Spektralfunktion 233
 Spektralnorm 60
 spezielle lineare Abbildung 70
 sphärischer Exzess 91
 Spiegelung 71
 spitzer Schnittwinkel 101
 Sprungfunktion 238
 Spur einer Matrix 64
 Stabdiagramm 242, 258
 Stammbruch 21
 Stammfunktion 167, 195, 205
 –, Existenz 195
 –, Konstruktion 196
 Standardabweichung 257
 – des arithmetischen Mittels 246
 –, empirische 246

- Standardbasis 49
 - Standardbasisvektor 52
 - Standard-Normalverteilung 262
 - , Quantil 270
 - , Tabelle 269
 - Standard-Zahlenmenge 19
 - statistische Masse 241
 - Steigung 94, 128
 - Steigung der Tangente 149
 - Steigungswinkel 128
 - sternförmig 196
 - stetige Gleichverteilung 260
 - stetige Teilung 79
 - stetige zufällige Variable 255
 - stetiges Frequenzspektrum 231
 - Stetigkeit 151
 - Stetigkeit einer Funktion 127
 - Stetigkeitskorrektur 263
 - Stichprobenanteil 265
 - Stichprobenmittel 265
 - Stichprobenstandardabweichung 246
 - Stichprobenvarianz 246, 265
 - Störfunktion 210, 212, 238
 - Störgliedansatz 210
 - Strahlensatz 79
 - Strecke 92
 - streng monoton fallend 34, 122
 - streng monoton wachsend 34, 122
 - Streuungsmaß 245
 - Stromlinie 189
 - Struktursatz 213, 216
 - Struktursatz für lineare Differenzialgleichungen 204
 - STUDENT-Verteilung 270
 - Stufenpunkt 159
 - Stufenwinkel 78
 - Stürzen 62
 - Stützpolynom 129
 - Stützstelle 129, 175
 - Substitution, lineare 203
 - , rückwärts 172
 - Substitutionsregel 172
 - Subtrahieren von Brüchen 21
 - Subtraktion 30
 - Summe, leere 24
 - Summen einiger konvergenter Zahlenreihen 219
 - Summen von trigonometrischen Termen 139
 - Summenhäufigkeitsfunktion 243
 - Summenregel 152, 171, 188
 - Summenzeichen 23
 - Superposition 139
 - Superpositionsprinzip 212
 - Supplementwinkel 78
 - Supremum 16, 33
 - Surjektion 122
 - Symmetrie 148
 - Symmetriesatz 27
 - symmetrische Funktion 233
 - symmetrische Matrix 59
 - symmetrische periodische Funktion 231
 - Systemmatrix 65
- T**
- Tabelle der Standard-Normalverteilung 269
 - tan 134
 - Tangens 135
 - Tangenssatz 81
 - Tangente 160, 163
 - an Ellipse 107
 - an Hyperbel 113
 - an Kreis 105
 - an Parabel 110
 - Tangentenvektor 164, 187, 197
 - Tangentenviereck 84
 - Tangentialebene 155 f.
 - an eine Fläche 167
 - tanh 141
 - Tautologie 15
 - TAYLOR-Formel 223 f.

TAYLOR-Koeffizienten 224
 TAYLOR-Polynom 223
 TAYLOR-Reihe 224
 –, Zusammenstellung 225
 teilerfremde ganze Zahl 20
 Teilfolge 34
 Teilmenge 16, 251
 Teilpunkt 92
 –, äußerer 92
 –, innerer 92
 Teilung 79
 –, stetige 79
 Teilung einer Strecke 92
 Teilverhältnis 93
 Term 38
 Terrassenpunkt 159
 Testgröße 267
 Tetraeder 89, 102
 Theta-Funktion 132
 Tilgungsdauer 38
 Tilgungsformel 38
 Tilgungsrate 38
 Tilgungsrechnung 37
 Torsion 164
 Torsionswinkel 166
 Torus 92
 totale (exakte, vollständige) Differenzialgleichung 205
 totales Differenzial 155
 Traktrix 147
 Transformationsmatrix 119
 Transitivität 21
 Translation 74
 transponierte (gestürzte) Matrix 55
 Transposition 62
 transzendente Gleichung 40
 Trapez 83
 Trapezregel 176
 Trefferwahrscheinlichkeit 259
 trennbare Differenzialgleichung 203
 Trennung der Variablen 203
 Treppenform 60, 67

tri 131
 trigonometrische Form einer komplexen Zahl 29
 trigonometrische Funktion 82, 134, 226
 trigonometrischer PYTHAGORAS 138
 trigonometrisches Polynom 229
 triviale Lösung 66

U

über Kreuz multiplizieren 22
 überabzählbar 20
 überbestimmtes Gleichungssystem 65
 Überlagerung von Sinusfunktionen 139
 Umfang einer Ellipse 108
 Umfangswinkel 86
 Umformung, äquivalente 38
 –, nichtäquivalente 38
 umkehrbare Abbildung 122
 umkehrbare lineare Abbildung 70
 Umkehrfunktion 122
 Umkreis 82 ff.
 Umkreismittelpunkt 80
 Umkreisradius 80
 Umkugel 87
 unabhängige Ereignisse 253
 unabhängige Variable 121
 Unabhängigkeit von zufälligen Variablen 256
 unbestimmtes Integral 167
 unecht gebrochene Funktion 130
 uneigentlicher Grenzwert 125
 uneigentliches Integral 171
 unendliche Menge 16
 unendliche Reihe 36, 218
 Unendlichkeitsstelle 130, 148
 ungerade Funktion 126, 231, 233
 Ungleichung 38
 –, BERNOULLISCHE 38

- , lineare 40
 - , quadratische 40 f.
 - Ungleichung der Mittelwerte 23
 - Ungleichung von TSCHEBYSCHOW 257
 - unitäre Matrix 59
 - unklassierte Häufigkeitstabelle 241
 - unkorreliert 247
 - unmögliches Ereignis 252
 - unterbestimmtes Gleichungssystem 65
 - Unterdeterminante 61
 - untere Dreiecksmatrix 58
 - untere Grenze 16
 - untere Schranke 33, 126
 - Untermatrix 57
 - Untermenge 16
 - Urbild 121
 - Urbildmenge 121
 - Urliste 241
 - Urnenmodell 31
- V**
- Variable, abhängige 121
 - , diskrete zufällige 255
 - , Erwartungswert 256
 - , stetige zufällige 255
 - , unabhängige 121
 - , Unabhängigkeit 256
 - , zufällige 254, 264
 - Variablentransformation für Dreifachintegrale 179
 - Variablentransformation für Gebietsintegrale 178
 - Varianz 256
 - des arithmetischen Mittels 257
 - einer Summe 257
 - , empirische 246
 - Variation 32
 - Variation der Konstanten 204, 210, 217
 - Variationsbreite 245
 - Variationskoeffizient 246, 258
 - Vektor 46
 - , Addition 48
 - , Betrag 49, 52, 60
 - , Diagonalisierung 58
 - , EUKLIDISCHE Norm 60
 - , formaler 189
 - , freier 46
 - , gebundener 46
 - , kollinear 47
 - , komplanar 47
 - , linienflüchtiger 46
 - , Multiplikation 48
 - , negativer 50
 - , normierter 49
 - , Winkel zwischen zwei 93
 - , Zerlegung 51
 - Vektoranalysis 187
 - Vektorfeld, axialsymmetrisches 195
 - , ebenes 188
 - , Fluss 191
 - , konservatives 195
 - , radialsymmetrisches 195
 - , räumliches 189
 - , Zirkulation 195
 - vektorielles Flächenelement 198
 - vektorielles Linienelement 194
 - Vektornorm 60
 - Vektorprodukt 53 f.
 - Vektorraum 46, 213
 - Vektorraumaxiom 47
 - vektorwertige Funktion 187
 - Vereinigung 16, 251
 - Verfahren 4. Ordnung von RUNGE-KUTTA 215
 - Verfahrensfehler 214
 - Verhalten im Unendlichen 148
 - Verhältnisgleichung 22
 - Verkettung 123, 153
 - Verschiebung 74
 - Verschiebungssatz 187, 235, 256
 - Verteilungsfunktion 254, 258

Vertrauensintervall 265
 Vertrauensniveau 265
 Vieleck 84
 –, Außenwinkel 84
 –, Inkreis 84
 –, Innenwinkel 84
 –, regelmäßiges 84
 –, Umkreis 84
 –, Zentriwinkel 84
 Vielfachheit 41
 Vielfache 88
 Viereck 82
 –, Außenwinkel 82
 –, Inkreis 82, 84
 Innenwinkel 82
 –, Umkreis 82 f.
 Volumen 102
 – eines Ellipsoides 116
 – eines Körpers 183
 – eines Rotationskörpers 182
 Volumelement in Kugelkoordinaten 180
 Volumelement in Zylinderkoordinaten 180
 Volumenintegral 178
 Volumenmomente 1. Grades 185
 voreindeutig 18
 vorschüssig 37
 Vorzeichenwechsel 127

W

waagrechte Asymptote 125, 130, 148
 Wachstumsfaktor 244
 –, mittlerer 244
 Wachstumsintensität 133
 Wachstumstempo, durchschnittliches 244
 wahrer Fehler 249
 Wahrheitstafel 14
 Wahrheitswert 13
 Wahrscheinlichkeit 251 f.

–, bedingte 253
 Wahrscheinlichkeitsdichte 255
 Wahrscheinlichkeitsfunktion 258 ff.
 Wahrscheinlichkeitsverteilung 258
 Wechselwinkel 78
 wegunabhängig 195
 Wendepunkt 158
 Wendetangente 158
 Wertebereich 33, 121
 Wertevorrat 121
 windschief 97
 Windung 164
 – einer Raumkurve 166
 Winkel, doppelter 138
 –, dreifacher 138
 –, halber 138
 Winkel zwischen zwei Geraden 77
 Winkel zwischen zwei Vektoren 93
 Winkelbeschleunigung 183
 Winkelfunktion 134
 Winkelgeschwindigkeit 183
 Winkelhalbierende 80
 Winkelmaß 77
 Winkelpythagoras 52
 Wirbeldichte 192, 200
 WRONSKI-Determinante 210, 212
 Würfel 88
 Wurzel 24, 31
 Wurzelfunktion 132
 Wurzelgesetze 24
 Wurzelgleichung 43
 Wurzelkriterium 220
 Wurzelsatz von VIETA 41

X

XOR 14

Z

Zahl, EULERSche 26, 133
 –, ganze 20

- , irrationale 20
- , komplexe 28, 31
- , konjugiert komplexe 28
- , natürliche 19
- , rationale 20
- , reelle 19
- , rein imaginäre 28
- , teilerfremde ganze 20
- Zahlen, EULERSche 227
- Zahlenfolge 33
- Zahlengerade 20
- Zahlenreihe 218
- Zahlensystem 18
- , polyadisches 18
- , Positionssystem 18
- Zangenregel 125
- Zeiger 28
- Zeilenindex 55
- Zeilensummennorm 60
- Zeilenvektor 55
- Zeitbereich 233
- Zeitfunktion 233 f.
- Zeitreihe 244
- zentraler Grenzwertsatz 262
- Zentralfeld 189
- Zentralwert 245
- Zentriwinkel 84 ff.
- Zerfallskonstante 133
- Zerlegung eines Vektors 51
- Zerlegung von Polynomen in Linearfaktoren 128
- Ziehen mit Zurücklegen 31
- Ziehen ohne Zurücklegen 31
- Zinsdivisor 36
- Zinsen 36
- Zinseszinsrechnung 36
- Zinsfaktor 36
- Zinsfuß 36 f.
- Zinsperiode 36
- Zinssatz 36
- Zinszahl 36
- Zirkulation eines Vektorfeldes 195, 200
- Zufall 250
- zufällige Variable 254, 264
- Zufallsexperiment 250
- Zufallsgröße 254
- Zufallsstichprobe 264
- zweidimensionale Urliste 246
- Zweierlogarithmus 26
- Zweiermenge 15
- Zweiersystem 18
- Zweipunkt-Form 93, 96
- zweireihige Determinante 61
- zweiseitiger Test 267
- Z-Winkel 78
- Zwischenstelle 168 f.
- Zwischenwertsatz 127, 152
- zyklische Vertauschungen (zV) 81
- Zykloidenbogen 146
- zyklometrische Funktion 140, 226
- Zylinder 118
- , elliptischer 115
- , hyperbolischer 115
- , parabolischer 115
- Zylinderkoordinaten 72, 163, 180, 183, 190 ff.
- zylindersymmetrisch 189