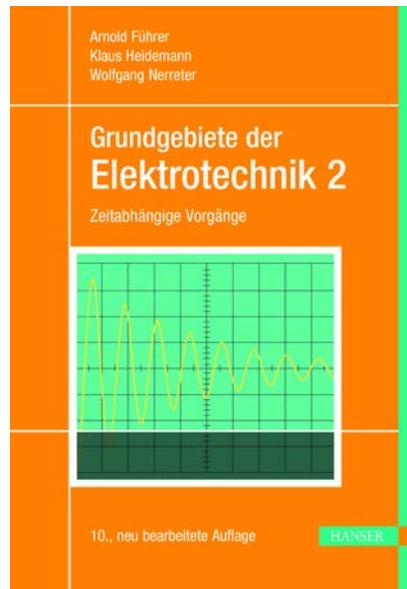


HANSER



Leseprobe

zu

„Grundgebiete der Elektrotechnik Band 2: Zeitabhängige Vorgänge“

von Arnold Führer, Klaus Heidemann,
Wolfgang Nerreter

ISBN (Buch): 978-3-446-45954-0

ISBN (E-Book): 978-3-446-46093-5

Weitere Informationen und Bestellungen unter
<http://www.hanser-fachbuch.de/9783446459540>

sowie im Buchhandel

© Carl Hanser Verlag, München

*Das Wenige verschwindet leicht dem Blick,
der vorwärts sieht, wie viel noch übrig bleibt.*

J. W. V. GOETHE: „Iphigenie auf Tauris“

Vorwort zur 10. Auflage

Die Mahnung der klugen Iphigenie zu beherrzigen, hatten wir Grund: Auch im Band 2 *sehen* wir immer wieder *vorwärts* und bearbeiteten den Stoff vorbereitend auch für Gebiete, die nach dem Grundstudium des *Wenigen* noch *übrig bleiben*. Deswegen heißt unser Buch auch *Grundgebiete* und nicht *Grundlagen* der Elektrotechnik. Hierzu einige Beispiele:

Bei der Behandlung der *Filternetze* (Abschnitt 5.3) könnte man die grundlegenden Begriffe am Hochpass und am Tiefpass 1. Ordnung erläutern und es damit genug sein lassen. Wir blicken aber *vorwärts* und zeigen, wie man die heute wichtigen Filter 2. Ordnung als passive und als aktive Filter realisiert.

Im 6. Kapitel über *Drehstrom* beschreiben wir die *symmetrischen Komponenten* nichtsymmetrischer Systeme. Ingenieure, die mit Versorgungsnetzen oder mit Einphasenmaschinen zu tun haben, brauchen diese Methode.

Auch im 7. Kapitel, in dem wir uns mit *nichtsinusförmigen Größen* befassen, sehen wir weiter und zeigen, wie mithilfe der FOURIER-Transformation das *kontinuierliche Spektrum* nicht periodischer Größen berechnet wird. Darüber hinaus wenden wir die *diskrete* FOURIER-Transformation auf zeitbeschränkte und -unbeschränkte Funktionen an; dies führt uns ins Gebiet der *digitalen Signalverarbeitung* (s. Praxisbezug 7.6).

Völlig neu ist das Kap. 9, in dem wir uns mit der Stabilität linearer Übertragungssysteme befassen und Tief- und Hochpässe 2. Ordnung beschreiben.

Bei all diesen Ausflügen in die technische Wirklichkeit lässt der begrenzte Umfang des Buches die Erklärung aller Einzelheiten nicht zu. Fragen des Lesers könnte man nur mit den berühmten drei Worten beantworten: „Das ist so!“ Würde ein Ingenieur, den man fragt, warum sich Elektronen um den Atomkern bewegen, nicht ge-

nauso antworten? Wenn die Neugier damit nicht zu stillen ist, dann hilft sicher ein Hinweis auf das Verzeichnis der *Literatur* im Anhang.

Bei unseren Vorwärtsblicken ins weite Feld der Elektrotechnik, auch bei den aktualisierten *Praxisbezügen*, haben wir stets an Iphigenies Warnung gedacht, das *Wenige* dabei nicht aus dem Blick zu verlieren: Die grundlegenden Abschnitte besitzen deshalb nicht etwa „wenig“ an Umfang, sondern sie wurden ausführlich und sorgfältig behandelt und mit vielen Beispielen und Aufgaben abgesichert.

In den Text sind *Beispiele* und *Praxisbezüge* eingefügt. Zu den Problemstellungen in den Beispielen wird ein ausführlicher Lösungsweg gezeigt.

Die Lösungen der *Aufgaben*, deren Schwierigkeitsgrad mit 1 ... 3 gekennzeichnet ist, findet man im *Anhang*. Dieser enthält außerdem:

- Additionstheoreme,
- Beziehungen zwischen Winkelfunktionen,
- wichtige Konstanten,
- Einführung in die komplexe Rechnung,
- Magnetisierungskurven,
- Tabellen für die LAPLACE-Transformation,
- FOURIER-Koeffizienten wichtiger Funktionen,
- Sachwortverzeichnis,
- Namenverzeichnis.

Das Lehrbuch wendet sich in erster Linie an Studierende der Elektrotechnik an Technischen Hochschulen aller Art als Begleitlektüre zur Vorlesung oder zum Selbststudium. Außerdem hoffen wir, Berufstätigen in der Elektrotechnik beim Auffrischen oder Erweitern ihrer Kenntnisse zu helfen. Wir würden uns auch freuen, wenn wir Lehrenden Anregungen für die Gestaltung ihrer Lehrveranstaltungen geben könnten.

Wir hoffen weiterhin, dass unser Buch gut aufgenommen wird, und wären dankbar für Nachrichten an den Verlag mit Verbesserungsvorschlägen, Kritik oder Fehlermeldungen.

Dem Carl Hanser Verlag danken wir für die vertrauensvolle Zusammenarbeit.

Inhaltsverzeichnis

1	Zeitabhängige elektrische und magnetische Felder	11
1.1	Quasistationäre Vorgänge	11
1.1.1	Konzentrierte Bauelemente	11
1.1.2	Grundeintore	12
1.2	Erweiterung des Strombegriffs	14
1.2.1	Ideales kapazitives Eintor	14
1.2.2	Verschiebungsstrom	15
1.2.3	Knotensatz bei zeitabhängigen Strömen	17
1.2.4	Durchflutungsgesetz bei zeitabhängigen Strömen	18
1.3	Bewegungsinduktion	20
1.3.1	Bewegter Leiter im Magnetfeld	20
1.3.2	Zeitliche Änderung des magnetischen Flusses in der Schleifenfläche	23
1.3.3	Rotation einer Leiterschleife im homogenen Magnetfeld	26
1.4	Ruheinduktion	28
1.4.1	Induktive Spannung bei zeitabhängigem Magnetfeld	28
1.4.2	Spannungsstoß	30
1.5	Elektromagnetisches Feld	32
1.5.1	Induktionsgesetz	32
1.5.2	Das LENZsche Gesetz	33
1.5.3	Elektrisches Wirbelfeld	34
1.5.4	Die 2. MAXWELLSche Gleichung	36
1.6	Selbstinduktion	38
1.6.1	Selbstinduktive Spannung	38
1.6.2	Selbstinduktivität	40
1.6.3	Induktivität von Leiteranordnungen	43
1.6.4	Ideales induktives Eintor	46
1.7	Gegenseitige Induktion	49
1.7.1	Induktive Kopplung	49
1.7.2	Gegenseitige Induktivität	50
1.7.3	Gleichsinnige und gegensinnige Kopplung	51
1.7.4	Kopplungsfaktor	53
1.7.5	Reihenschaltung gekoppelter Spulen	54
1.7.6	Wirbelströme	55
2	Kraft und Energie in elektromagnetischen Feldern	57
2.1	Energie im elektrostatischen Feld	57
2.1.1	Energie eines Kondensators	57
2.1.2	Elektrische Energiedichte	58
2.2	Kräfte im elektrostatischen Feld	59
2.2.1	Kräfte auf Punktladungen	59
2.2.2	Kräfte auf einen Dipol	60
2.2.3	Kräfte auf die Platten eines Plattenkondensators	60
2.3	Energie im magnetischen Feld	62
2.3.1	Energie einer Leiteranordnung	62
2.3.2	Energiedichte im Magnetfeld	63
2.3.3	Innere Induktivität	64

2.3.4	Hysteresearbeit	65
2.3.5	Magnetischer Kreis mit Dauermagnet	66
2.4	Kräfte auf Magnetpole	67
2.5	Energietransport im elektromagnetischen Feld	70
3	Periodisch zeitabhängige Größen	73
3.1	Periodische Schwingungen	73
3.2	Mittelwerte periodischer Größen	75
3.2.1	Gleichwert	75
3.2.2	Wirkleistung	77
3.2.3	Effektivwert	78
3.2.4	Gleichrichtwert	79
3.2.5	Verhältniszahlen	81
3.3	Sinusförmige Schwingungen	82
3.3.1	Kenngrößen	82
3.3.2	Mittelwerte	84
3.3.3	Überlagerung von Sinusgrößen	86
3.3.4	Zeigerdarstellung	89
3.3.5	Komplexe Symbole	92
4	Netze mit Sinusquellen konstanter Frequenz	94
4.1	Komplexer Widerstand und Leitwert	94
4.2	Leistung	96
4.2.1	Leistungsschwingung	96
4.2.2	Komplexe Leistung	99
4.3	Grundeintore an Sinusspannung	100
4.3.1	Grundeintor R	100
4.3.2	Grundeintor L	102
4.3.3	Grundeintor C	104
4.4	Verbindung von Grundeintoren	107
4.4.1	Reihenschaltung von Grundeintoren	107
4.4.2	Parallelschaltung von Grundeintoren	109
4.5	Ersatzeintore	110
4.5.1	Netze ohne unabhängige Quellen	110
4.5.2	Netze mit unabhängigen Quellen	116
4.6	Resonanz	118
4.6.1	Reihenresonanz	118
4.6.2	Parallelresonanz	121
4.6.3	Resonanz linearer Netze	122
4.6.4	Widerstandstransformation	123
4.7	Leistungsanpassung und Blindleistungskompensation	125
4.7.1	Leistungsanpassung	125
4.7.2	Blindleistungskompensation	127
4.8	Übertrager	129
4.8.1	Verlustloser Übertrager	130
4.8.2	Idealer Übertrager	130
4.8.3	Netzwerktransformation	131
4.9	Transformator	133
4.9.1	Idealisierter Transformator	133

4.9.2	Realer Transformator	133
4.9.3	Leerlauf und Kurzschluss	135
4.9.4	Spannungsänderung	137
4.9.5	Kleintransformator	138
5	Netze mit Sinusquellen veränderlicher Frequenz	139
5.1	Frequenzabhängigkeit der Netzeigenschaften	139
5.1.1	Wirkung von L und C	139
5.1.2	Komponentendarstellung	141
5.1.3	Ortskurvendarstellung	143
5.1.4	Ortskurven zueinander inverser Funktionen	144
5.1.5	Sinusanalyse	146
5.2	Frequenzgang	148
5.2.1	Betragsgang und Phasengang	148
5.2.2	Übertragungsfaktor und Dämpfungsfaktor	149
5.2.3	Symmetrieeigenschaften von Zweitoren	152
5.2.4	Logarithmierte Größenverhältnisse	152
5.2.5	BODE-Diagramm	155
5.2.6	Äquivalente Netze	157
5.2.7	Duale Netze	157
5.3	Passive Filter	160
5.3.1	Grenzfrequenz	160
5.3.2	Filterarten	161
5.3.3	Hochpass 1. Ordnung	161
5.3.4	Tiefpass 1. Ordnung	163
5.3.5	Bandpass	164
5.3.6	Bandsperre	167
5.4	Operationsverstärker an Sinusspannung	169
5.5	Aktive Filter	170
5.5.1	Filter 1. Ordnung	170
5.5.2	Bandpass 2. Ordnung	172
5.5.3	Bandsperre 2. Ordnung	173
6	Drehstrom	174
6.1	Symmetrische Spannungen	174
6.1.1	Das symmetrische Dreiphasensystem	174
6.1.2	Prinzip des Synchrongenerators	175
6.1.3	Sternschaltung	177
6.1.4	Dreieckschaltung	178
6.2	Symmetrische Belastung	179
6.2.1	Sternschaltung	179
6.2.2	Dreieckschaltung	181
6.2.3	Drehfeld	184
6.3	Unsymmetrische Belastung	186
6.3.1	Sternschaltung am Vierleiternetz	187
6.3.2	Sternschaltung am Dreileiternetz	188
6.3.3	Dreieckschaltung	190
6.4	Symmetrische Komponenten	192
6.4.1	Geschlossenes Zeigerdreieck	192
6.4.2	Beliebige Lage der Zeiger	193

7 Nichtsinusförmige Größen	195
7.1 Harmonische Synthese	195
7.1.1 Teilschwingungen	195
7.1.2 Reelle FOURIER-Reihen	197
7.1.3 Sonderfälle der Synthese	198
7.1.4 Komplexe FOURIER-Reihen	200
7.1.5 Spektrum periodischer Größen	202
7.2 Eigenschaften periodischer Größen	204
7.2.1 Leistung und Effektivwert	204
7.2.2 Leistung bei Sinusspannung und nichtsinusförmigem Strom	205
7.2.3 Kennwerte für die Verzerrung von Wechselgrößen gegenüber der Sinusform	207
7.3 Harmonische Analyse	209
7.3.1 Berechnung der FOURIER-Koeffizienten	209
7.3.2 Verschiebungssatz	210
7.4 Nichtperiodische Größen	213
7.4.1 FOURIER-Transformation	213
7.4.2 Diskrete FOURIER-Transformation eines zeitbeschränkten Signals	215
7.4.3 Diskrete FOURIER-Transformation eines zeitlich unbeschränkten Signals	217
7.5 Nichtsinusförmige Schwingungen in linearen Netzen	219
7.5.1 Überlagerungsprinzip	219
7.5.2 Verzerrungsfreie Übertragung	221
7.5.3 Lineare Verzerrungen	222
7.6 Nichtlineare Verzerrungen	224
7.6.1 Spulenstrom bei verlustfreiem Eisenkern	224
7.6.2 Spulenstrom beim Kern mit Eisenverlusten	225
8 Schaltvorgänge	226
8.1 Netz an Gleichspannung	226
8.1.1 Netz mit einem Grundeintor C	226
8.1.2 Netz mit einem Grundeintor L	231
8.1.3 LAPLACE-Transformation	234
8.1.4 Schwingkreis	238
8.1.5 Netz mit zwei gleichartigen Energiespeichern	242
8.2 Netz an Sinusspannung	244
8.2.1 Netz mit einem Grundeintor C	244
8.2.2 Netz mit einem Grundeintor L	247
8.2.3 Schwingkreis	248
8.3 Transientanalyse	250
8.3.1 BDF-Verfahren	250
8.3.2 Netz an Gleichspannung	251
8.3.3 Netz an Sinusspannung	253
9 Lineare Übertragungssysteme	254
9.1 Stabilität	254
9.1.1 Grundlegendes Stabilitätskriterium	254
9.1.2 System mit konjugiert komplexen Polen	255
9.2 Hoch- und Tiefpass 2. Ordnung	256
9.2.1 Tiefpass 2. Ordnung	256
9.2.2 Hochpass 2. Ordnung	259
9.2.3 Realisierung von Hoch- und Tiefpass	260

10 Reale Bauelemente	264
10.1 Bauformen	264
10.2 Widerstand	264
10.2.1 Nenndaten	264
10.2.2 Temperatureinfluss	265
10.2.3 Widerstandsformen	266
10.2.4 Wechselstrom-Ersatzschaltung	267
10.3 Kondensator	270
10.3.1 Bauformen	270
10.3.2 Verluste bei Gleichspannungsbetrieb	273
10.3.3 Verluste bei Wechselspannungsbetrieb	275
10.3.4 Wechselstrom-Ersatzschaltungen	276
10.3.5 Temperatureinfluss	277
10.3.6 Eigenschaften von Elektrolytkondensatoren	278
10.4 Spule	280
10.4.1 Berechnung der Induktivität	281
10.4.2 Verlustwinkel und Gütefaktor	282
10.4.3 Kupferverluste	284
10.4.4 Kernverluste	285
Anhang	290
A1 Beziehungen zwischen Winkelfunktionen	290
A2 Komplexe Rechnung	291
A3 Wichtige Konstanten	293
A4 Verwendete Formelzeichen	293
A5 FOURIER-Koeffizienten	295
A6 LAPLACE-Transformation	296
A7 Magnetisierungskurven	300
Lösungen der Aufgaben	301
Literatur	314
Sachwortverzeichnis	316
Namenverzeichnis	320

1 Zeitabhängige elektrische und magnetische Felder

1.1 Quasistationäre Vorgänge

Ziele: Sie können

- erklären, was man unter einem quasistationären Vorgang versteht.
- die Einschränkungen nennen, welche für solche Vorgänge gelten.
- den Begriff konzentriertes Bauelement erklären.
- die drei Grundeintore nennen.
- die Definition für das ideale OHMSche Eintor angeben.

1.1.1 Konzentrierte Bauelemente

Im Band 1 haben wir im Wesentlichen *stationäre Vorgänge* behandelt. Bei ihnen bleiben die den Vorgang beschreibenden Parameter zeitlich konstant. Nun wollen wir die Gesetzmäßigkeiten untersuchen, die für *zeitabhängige* Größen gelten.

Zur Unterscheidung von den stationären Größen werden *zeitabhängige* Ströme und Spannungen mit *Kleinbuchstaben* i bzw. u bezeichnet. Bei anderen Größen wird die Zeitabhängigkeit durch den Zusatz „ (t) “ zum Ausdruck gebracht; man schreibt also z. B. $P(t)$, $\Phi(t)$ oder $Q(t)$.

Zur Veranschaulichung stellt man *zeitabhängige* Größen in einem **Liniendiagramm** grafisch dar (Bild 1.1). Dabei wird die Zeit auf der Abszisse und die *zeitabhängige* Größe auf der Ordinate abgetragen.

Jedem Zeitwert ist ein **Augenblickswert** (*instantaneous value*) der *zeitabhängigen* Größe zuge-

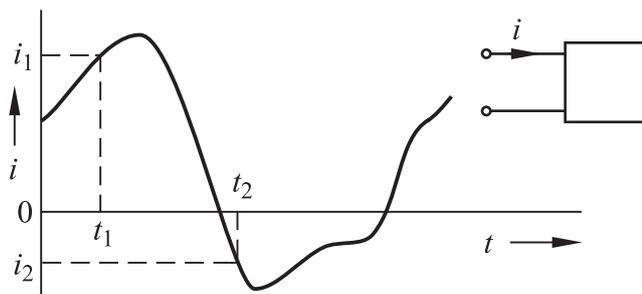


Bild 1.1 Darstellung eines zeitabhängigen Stromes im Liniendiagramm

ordnet. Hat diese zu einem bestimmten Zeitwert ein *positives Vorzeichen* (z. B. $t_1; i_1$), so stimmt der Richtungssinn mit dem gewählten Bezugssinn überein. Hat sie zu einem anderen Zeitwert ein *negatives Vorzeichen* (z. B. $t_2; i_2$), so sind Richtungssinn und Bezugssinn einander entgegengesetzt.

Um die Wirkung von *zeitabhängigen* Größen zu verdeutlichen, betrachten wir in der Schaltung 1.2 die Leitung zwischen den Klemmen 1 und 2, durch die ein Verbraucher mit einer Quelle verbunden ist.

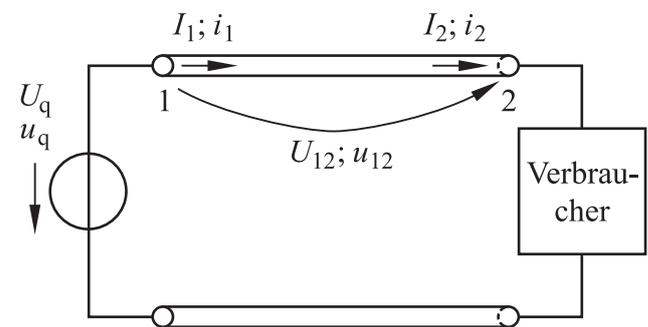


Bild 1.2 Zum Begriff Eintor bei zeitabhängigen Größen

Bei einer idealen Gleichspannungsquelle mit $U_q = \text{const.}$ ist auch $U_{12} = \text{const.}$ Wir können die Leitung mit dem OHMSchen Widerstand R_{12} als *Eintor* betrachten, denn der Gleichstrom I_1 , der in die Klemme 1 hineinfließt, fließt zum gleichen Zeitpunkt aus der Klemme 2 heraus; es gilt also $I_1 = I_2 = I$.

Nun nehmen wir an, dass die Spannung der idealen Quelle *zeitabhängig* ist. An ihren Klemmen liegt dabei eine Spannung mit der Zeitfunktion $u_q(t)$. In diesem Fall können wir das Leitungsstück zwischen den Klemmen 1 und 2 nicht mehr ohne Einschränkung als *Eintor* ansehen. Dies liegt daran, dass sich alle Änderungen in elektrischen und magnetischen Feldern nur mit der endlichen Geschwindigkeit $v \leq c_0$ im Raum ausbreiten, wobei c_0 die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum ist.

Das Gleiche gilt für alle Änderungen von elektrischen Strömen und Spannungen in Schaltungen. So folgt der Strom i_2 in der Schaltung 1.2 einer Änderung des Stromes i_1 um die Zeitspanne Δt verzögert, deren Dauer von den geometrischen

Abmessungen und den Werkstoffen der Leitung abhängt.

Die Leitung zwischen den Klemmen 1 und 2 ist deswegen für zeitabhängige Größen *kein* Eintor, weil i. Allg. für jeden Augenblick $i_1 \neq i_2$ gilt.

In der Praxis kann dieser Effekt bei einer Eintorschaltung vernachlässigt werden, wenn ihre Abmessungen und der Abstand zwischen den Klemmen hinreichend klein sind. In diesem Fall kann die Schaltung auch für zeitabhängige Größen als Eintor und ihr Klemmenpaar als *Tor* angesehen werden.

Bauelemente, bei denen die Verzögerungszeit Δt vernachlässigbar klein ist, bezeichnet man als **konzentrierte Bauelemente** (*lumped element*).

Ändern sich die physikalischen Größen eines Systems so *langsam*, dass demgegenüber alle Ausbreitungserscheinungen im Beobachtungsraum vernachlässigt werden können, so sagt man, dass sich das System in einem **quasistationären Zustand** (*virtual steady state*) befindet.

Im Folgenden setzen wir voraus, dass ein quasistationärer Zustand besteht und dass die Schaltungen nur konzentrierte Bauelemente enthalten.

Praxisbezug 1.1

Bei sehr großen Abmessungen des Feldmediums, etwa bei der Ausbreitung elektromagnetischer Wellen (z.B. Rundfunk, Fernsehen), und bei der Signalübertragung über Leitungen werden die Voraussetzungen für konzentrierte Bauelemente und quasistationäre Zustände von Schaltungen in der Regel *nicht* erfüllt.

Dies gilt auch für kleine bedrahtete Bauelemente bei den sehr schnellen Änderungen im Bereich der Höchstfrequenztechnik mit Frequenzen im GHz-Bereich.

Bei Computern wird die Rechengeschwindigkeit u. a. durch die Länge der Signalleitungen zwischen den Schaltkreisen begrenzt. Um die Laufzeit der Signale möglichst kurz zu halten, integriert man immer mehr Schaltkreise auf einem Chip und konzentriert möglichst viele Chips auf engem Raum. \square

1.1.2 Grundeintore

Verwenden wir in der Schaltung 1.2 eine Gleichspannungsquelle, so ist das Leitungsstück zwischen den Klemmen 1 und 2 ein Eintor mit dem OHMSchen Widerstand R_{12} und der Spannung $U_{12} = R_{12}I$ zwischen den Klemmen.

Nun nehmen wir eine *zeitabhängige* Quellenspannung u_q an, deren zeitliche Änderung so langsam ist, dass wir das Drahtstück als konzentriertes Bauelement ansehen und in der Schaltung quasistationäre Verhältnisse voraussetzen können.

Obwohl das Leitungsstück zwischen den Klemmen 1 und 2 nun als Eintor angesehen werden kann und $i_1 = i_2 = i$ gilt, ist die Beziehung $U_{12} = R_{12}I$ *nicht* ohne weitere Einschränkungen auf zeitabhängige Größen zu übertragen. Dies liegt daran, dass im umgebenden Raum jeder Strom ein Magnetfeld und jede Klemmenspannung ein elektrisches Feld erzeugt.

Beide Felder sind Energiespeicher, die ihren Inhalt grundsätzlich nicht sprunghaft ändern können; hierzu wäre eine unendlich große Leistung erforderlich.

Aus diesem Grund kann der Strom i einer schnellen Änderung der Spannung u_{12} nicht gleich schnell folgen, denn hierbei muss sich auch das umgebende Magnetfeld ändern.

Umgekehrt kann die Spannung u_{12} einer schnellen Änderung des Stromes i nicht gleich schnell folgen, denn hierbei muss sich auch das umgebende elektrische Feld ändern.

Der Strom i und die Spannung u an den Klemmen eines Eintors können also nur dann gleiche Zeitabhängigkeit haben, wenn das Eintor keine elektrischen und magnetischen Energiespeicher besitzt. Da dies eine *Idealisierung* ist, nennt man ein solches Eintor ein **ideales OHMSches Eintor** R ; an ihm gilt:

$$u = R i \quad (1.1)$$

Das ideale OHMSche Eintor wird durch seinen Widerstand $R = \text{const.}$ oder durch seinen Leitwert

$G = 1/R$ beschrieben. Die Gl. (1.1) gilt für $R > 0$ bei Anwendung des Verbraucher-Pfeilsystems.

Die Leistung $P(t) = u \cdot i$ am idealen OHMSchen Eintor ist stets *positiv*. Dies bedeutet, dass es elektrische Energie lediglich *aufnehmen* und in eine andere Energieform, z.B. in Wärme, umwandeln kann; die Speicherung von Energie ist nicht möglich.

Das ideale OHMSche Eintor erhält in Schaltungen das gleiche Schaltzeichen wie der OHMSche Widerstand.

Mit technischen Bauelementen ist das ideale OHMSche Eintor nur näherungsweise zu realisieren (s. Abschn. 10.2).

Außer dem OHMSchen Eintor gibt es noch zwei weitere ideale Eintore: Das **ideale kapazitive Eintor** C ist ein Speicher *elektrischer* Feldenergie und das **ideale induktive Eintor** L ist ein Speicher *magnetischer* Feldenergie.

Eine Umwandlung der Energie, die diesen Eintoren zufließt, in eine andere Energieform, z.B. in Wärme, ist nicht möglich. Auch die idealen Eintore C und L lassen sich mit realen Bauelementen nur näherungsweise realisieren, stellen also *Idealisierungen* dar.

Wir werden die Eigenschaften der beiden Speichereintore C und L später beschreiben; das Bild 1.3 zeigt zunächst nur ihre Schaltzeichen.

Als Oberbegriff für die drei idealen Eintore R , C und L verwenden wir die Bezeichnung **Grundeintor**.

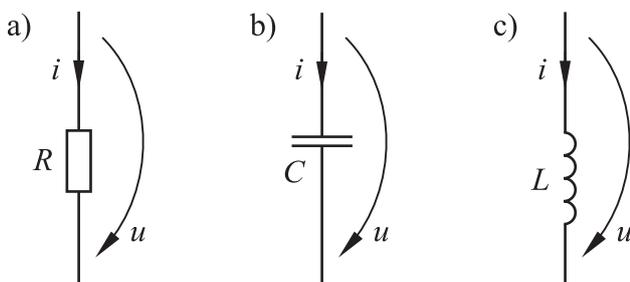


Bild 1.3 Schaltzeichen der Grundeintore: a) ideales OHMSches Eintor, b) ideales kapazitives Eintor, c) ideales induktives Eintor

Für *reale* passive Eintore lassen sich aus den Grundeintoren *Ersatzschaltungen* aufbauen. Mit ihrer Hilfe kann man den Zusammenhang zwischen einem zeitabhängigen Strom i und einer zeitabhängigen Spannung u an den Klemmen des realen Eintors auf übersichtliche Weise beschreiben.

In der Ersatzschaltung 1.4b berücksichtigt jedes Grundeintor nur *einen* physikalischen Effekt:

- Das Grundeintor R stellt die bleibende Umwandlung elektrischer Energie in eine andere Energieform dar.
- Das Grundeintor C stellt den Einfluss des veränderlichen elektrischen Feldes auf den Strom i des realen Eintors dar.
- Das Grundeintor L stellt den Einfluss des veränderlichen magnetischen Feldes auf die Spannung u des realen Eintors dar.

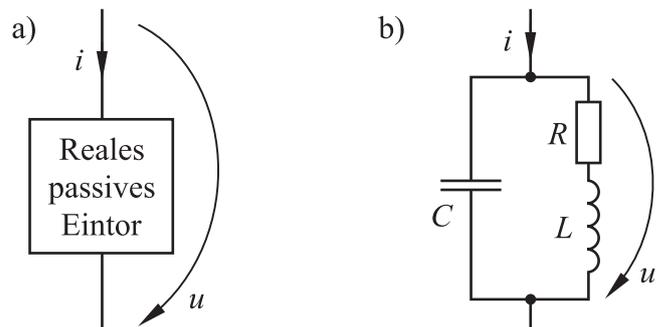


Bild 1.4 Reales passives Eintor (a) und seine Ersatzschaltung mit Grundeintoren (b)

Fragen

- Welches Formelzeichen erhält ein zeitabhängiger Strom?
- Was ist ein quasistationärer Vorgang?
- Unter welchen Bedingungen kann man ein Bauelement zwischen zwei Klemmen als Eintor ansehen?
- Was ist ein konzentriertes Bauelement?
- Wie ist das Grundeintor R definiert?
- Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Größen i und u an einem Grundeintor R ?
- Welche Grundeintore sind Ihnen bekannt? Welche physikalischen Effekte stellen sie dar?

Aufgabe 1.1⁽¹⁾

Durch ein Grundeintor $R = 10 \Omega$ fließt der Strom $i = 2,5 \text{ A} \cdot e^{-t/0,2 \text{ s}}$. Berechnen Sie die Spannung am Eintor für den Zeitpunkt $t_1 = 0,5 \text{ s}$.

1.2 Erweiterung des Strombegriffs

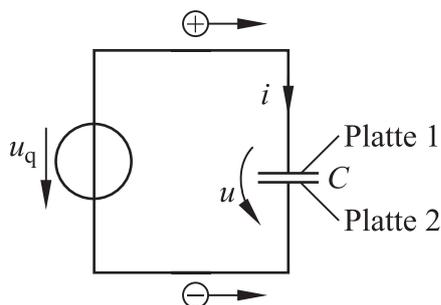
Ziele: Sie können

- für einen zeitabhängigen Strom die Beziehung zwischen Stromstärke und bewegter Ladung angeben.
- die Definition für das ideale kapazitive Eintor nennen.
- die Begriffe Verschiebungsstrom und Verschiebungsstromdichte definieren.
- den Zusammenhang zwischen den Feldvektoren der Stromdichte und der Verschiebungsstromdichte an der Grenzfläche Leiter – Dielektrikum beschreiben.
- den Knotensatz in allgemeiner Form für zeitabhängige Ströme formulieren.
- den Zusammenhang zwischen der Verschiebungsstromdichte und der durch sie verursachten magnetischen Feldstärke nennen.

1.2.1 Ideales kapazitives Eintor

Liegt ein idealer Plattenkondensator mit der Kapazität C an der konstanten Spannung U , so bestehen im Raum zwischen seinen Platten homogene Felder der elektrischen Feldstärke $E = U/l$ und der elektrischen Flussdichte $D = \epsilon E$.

Ist das Dielektrikum ideal, so bewegen sich zwischen den Kondensatorplatten keine Ladungen und in den Leitungen zum Kondensator fließt kein Strom. Auf der einen Platte befinden sich positive Ladungen $Q = C U$ und auf der anderen negative Ladungen vom gleichen Betrag.



Ladungsbewegung für $i > 0$

Bild 1.5 Kondensator an zeitabhängiger Spannung

Nun nehmen wir an, dass an den Kondensator eine Quelle mit *zeitabhängiger Spannung* u_q angeschlossen ist. Die Bezugspfeile für den Strom i und die Spannung u zwischen den Platten wählen wir wie üblich nach dem Verbraucher-Pfeilsystem.

Auch die Ladungen auf den Kondensatorplatten sind nun zeitabhängige Größen $Q(t)$ bzw. $-Q(t)$. Die Platte 1, von welcher der Bezugspfeil für u ausgeht, trägt dabei in jedem Augenblick eine Ladung mit gleichem Vorzeichen wie die Spannung u und es gilt:

$$Q(t) = C u \tag{1.2}$$

Wächst die Spannung u an ($du/dt > 0$), so zieht die Quelle Elektronen von der Platte 1 ab und verschiebt sie auf die Platte 2; dabei fließt ein Strom im Bezugssinn ($i > 0$). Die negative Ladung auf der Platte 2 nimmt dadurch zu; die Platte 1 wird entsprechend positiv geladen.

Bei sinkender Spannung ($du/dt < 0$) werden die Ladungen in umgekehrter Richtung verschoben; dabei ist $i < 0$.

Zu einer kleinen Spannungsänderung du gehört die Ladungsänderung dQ :

$$dQ = C du \tag{1.3}$$

Während dieser Ladungsänderung im Zeitintervall dt fließt in der Leitung der Strom i . Wir haben im Band 1 mit der Gl. (1.7) den Zusammenhang zwischen der Stromstärke I und der Ladungsmenge ΔQ angegeben, die im Zeitintervall Δt *gleichmäßig* durch einen Querschnitt strömt; die dort genannte Beziehung $I = \Delta Q / \Delta t$ gilt jedoch nur für Gleichstrom.

Ändert sich die Ladung zeitlich beliebig, so verwendet man den Differenzialquotienten:

$$i = \frac{dQ}{dt} \tag{1.4}$$

Wir setzen die Gl. (1.3) ein und erhalten die Gleichung des idealen kapazitiven Eintors:

$$i = C \frac{du}{dt} \tag{1.5}$$

Dieses Grundeintor C besitzt eine konstante Kapazität und wird mit dem Schaltzeichen des

Kondensators dargestellt, wie dies bereits im Bild 1.3 gezeigt ist.

Der Strom durch das Grundeintor C ist ausschließlich von der zeitlichen Änderung der Spannung und damit von der Änderung des *elektrischen* Feldes abhängig; das magnetische Feld hat keinen Einfluss.

Das Grundeintor C ist ein *Energiespeicher*; eine bleibende Umwandlung von elektrischer Energie in eine andere Energieform, z. B. in Wärme, ist nicht möglich.

Ist in der Schaltung 1.5 die Leistung $P(t) = u i$ zu einem Zeitpunkt *positiv*, so nimmt das Grundeintor C Energie auf; bei $P(t) < 0$ gibt es dagegen Energie an die Quelle zurück.

Das Grundeintor C wirkt also zeitweise aktiv und zeitweise passiv.

Technische Kondensatoren können die Eigenschaften des Grundeintors C nur annähernd erreichen (s. Kap. 10); es stellt wie die beiden anderen Grundeintore eine *Idealisierung* dar.

Ist die Kapazität spannungsabhängig (s. Band 1, Abschn. 6.6.2), so lässt sich der Strom mithilfe der *differenziellen Kapazität* C_d berechnen:

$$i = C_d \frac{du}{dt} \quad (1.6)$$

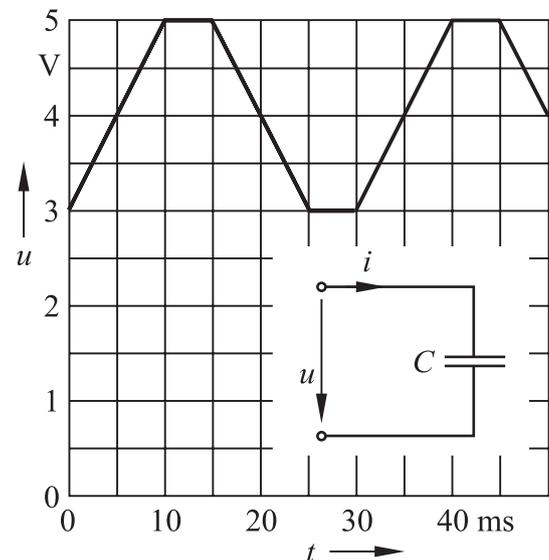
Dabei ist zu beachten, dass auch die differenzielle Kapazität spannungsabhängig ist.

Aus der Gl. (1.5) folgt, dass die Spannung u an einem Grundeintor C sich nicht *sprunghaft ändern* kann, weil dabei der Differenzialquotient du/dt und damit der Strom i unendlich groß werden müssten. Dies gilt auch für die Spannungen an realen Kondensatoren und für *beliebige* Leiteranordnungen, in denen stets Kapazitäten wirksam sind.

Beispiel 1.1

An einem Grundeintor $C = 0,2 \mu\text{F}$ liegt die zeitabhängige Spannung u . Wir wollen die Zeitfunktion des Stromes i für das Intervall

$0 \leq t \leq 30 \text{ ms}$ berechnen und feststellen, in welchen Intervallen das Eintor aktiv und in welchen es passiv wirkt.



Da die Funktion $u(t)$ nicht stetig differenzierbar ist, berechnen wir den zeitabhängigen Strom $i(t)$ mit der Gl. (1.5) intervallweise:

$$0 \leq t < 10 \text{ ms}: i = 0,2 \mu\text{F} \cdot \frac{2 \text{ V}}{10 \text{ ms}} = 40 \mu\text{A}$$

$$10 \text{ ms} \leq t < 15 \text{ ms}: i = 0 \text{ wegen } \frac{du}{dt} = 0$$

$$15 \text{ ms} \leq t < 25 \text{ ms}: i = -40 \mu\text{A}$$

$$25 \text{ ms} \leq t < 30 \text{ ms}: i = 0$$

Im ersten Intervall nimmt das Eintor wegen $P(t) = u i > 0$ elektrische Energie auf; im dritten Intervall gibt es wegen $P(t) = u i < 0$ die gleiche Energie wieder ab. In den übrigen Intervallen bleibt die im Eintor gespeicherte Energie jeweils konstant.

1.2.2 Verschiebungsstrom

Ändert sich zwischen den Platten des Kondensators im Bild 1.5 die Spannung u , so fließt ein Strom i , obwohl der Stromkreis zwischen den Platten *unterbrochen* ist; die Ladungsträgerbewegung endet an den Platten.

Darin liegt ein *Widerspruch* zu der Aussage im Band 1, dass ein elektrischer Strom nur in

einem über Leiter geschlossenen Stromkreis fließen kann. Dies gilt jedoch nur für *stationäre* Verhältnisse; für *zeitabhängige* Ströme müssen wir den Strombegriff *erweitern*.

Jeder Strom in den Zuleitungen des Kondensators ist von einer Ladungsänderung dQ/dt auf den Platten begleitet (s. Gl. 1.4). Mit ihr ändern sich auch der elektrische Fluss Ψ_e und die elektrische Flussdichte \vec{D} des Kondensatorfeldes (s. Band 1, Abschn. 6.4.3).

Wegen $Q = D A$ gilt für ein homogenes Feld:

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{dD}{dt} \cdot A \tag{1.7}$$

Der Ausdruck dD/dt hat die Einheit der Stromdichte:

$$\left[\frac{dD}{dt} \right] = \frac{As}{m^2} \cdot \frac{1}{s} = 1 \frac{A}{m^2} \tag{1.8}$$

Man bezeichnet deshalb die Größe $d\vec{D}/dt$ als **Verschiebungsstromdichte** (*displacement current density*) \vec{J}_v :

$$\vec{J}_v = \frac{d\vec{D}}{dt} \tag{1.9}$$

Die Verschiebungsstromdichte ist ein Vektor, dessen Betrag gleich der augenblicklichen Änderung der elektrischen Flussdichte D ist.

Die Richtung des Vektors \vec{J}_v der Verschiebungsstromdichte stimmt für $dD/dt > 0$ mit der Richtung des Vektors \vec{D} überein; für $dD/dt < 0$ sind die Richtungen der beiden Vektoren einander entgegengesetzt.

Das Feld der Stromdichte \vec{J} in den Zuleitungen und in den Kondensatorplatten setzt sich als Feld der Verschiebungsstromdichte \vec{J}_v im Dielektrikum des Kondensators fort; die Feldlinien gehen an der Oberfläche der Kondensatorplatten ineinander über (Bild 1.6).

Bei der Verschiebungsstromdichte muss man sich von der Vorstellung befreien, dass sich längs der Feldlinien Ladungen bewegen.

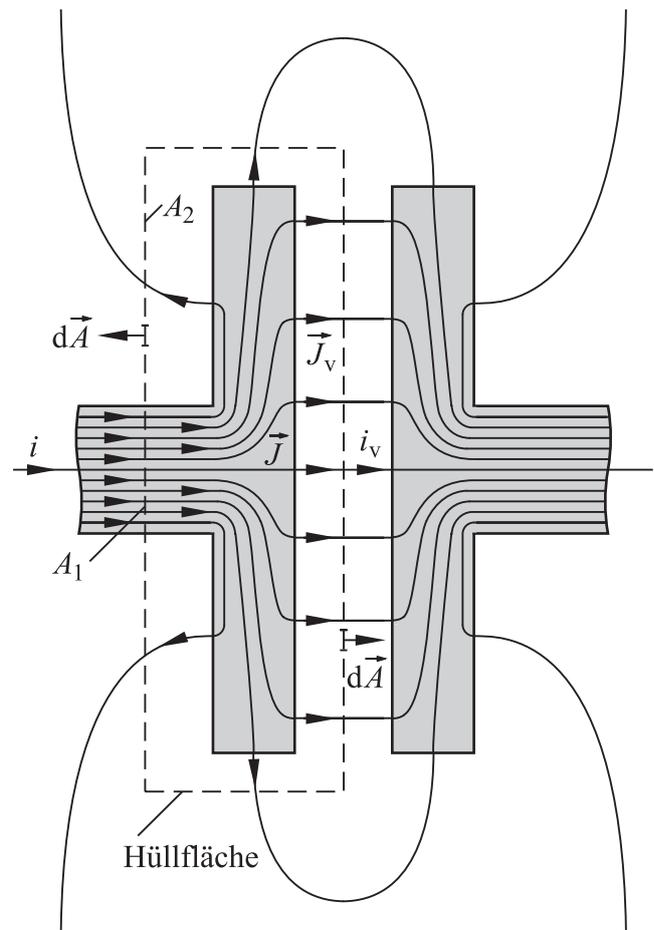


Bild 1.6 Stromdichte und Verschiebungsstromdichte

Der Fluss (d. h. das Flächenintegral) der Verschiebungsstromdichte \vec{J}_v ist der **Verschiebungsstrom** (*displacement current*) i_v :

$$i_v = \int_A \vec{J}_v \cdot d\vec{A} \tag{1.10}$$

Bei der Berechnung des Verschiebungsstromes für das Feldbild 1.6 ist das Integral über die Teilfläche A_2 der Hüllfläche um eine der Kondensatorplatten zu bilden; diese Teilfläche wird ausschließlich vom Feld der Verschiebungsstromdichte \vec{J}_v durchsetzt.

Durch die Teilfläche A_1 der Hüllfläche fließt der Strom i in der Zuleitung des Kondensators. Er setzt sich im Dielektrikum als ein Verschiebungsstrom i_v mit gleicher Stromstärke fort.

Wird ein Teil der Hüllfläche von einem *homogenen* Feld der Verschiebungsstromdichte durchsetzt, so lässt sich hierfür die Gl. (1.10) vereinfachen:

$$i_v = \vec{J}_v \cdot \vec{A} \quad (1.11)$$

Die Vorstellung von einem Verschiebungsstrom, der ohne Ladungsträberbewegung z. B. auch im Vakuum auftreten kann, wurde von MAXWELL¹⁾ begründet. Nach dieser Erweiterung des Strombegriffes gilt auch für zeitabhängige Ströme in Netzwerken mit kapazitiven Eintoren der Satz, dass *jeder* elektrische Strom in sich *geschlossen* ist.

1.2.3 Knotensatz bei zeitabhängigen Strömen

Der Knotensatz sagt aus, dass die Summe aller Ströme, die eine Hüllfläche durchsetzen, stets den Wert null hat (Band 1, Abschn. 3.2). Entsprechend ist auch der Fluss des Stromdichtevektors \vec{J} durch eine Hüllfläche gleich null.

Beide Aussagen gelten nur für den *stationären* Zustand. Bei *zeitabhängigen* Vorgängen müssen auch die *Verschiebungsströme* berücksichtigt werden; wir wollen dies in der Anordnung betrachten, die im Bild 1.6 gezeigt ist.

Um die linke Kondensatorplatte ist im Bild 1.6 eine Hüllfläche gelegt, deren Flächenvektoren $d\vec{A}$ wie üblich nach außen weisen. Sie besteht aus zwei Teilflächen.

Die Fläche A_1 ist die Querschnittsfläche der Zuleitung, hier ist die Verschiebungsstromdichte $\vec{J}_v = 0$. Wir integrieren über die Stromdichte \vec{J} und erhalten:

$$\int_{A_1} \vec{J} \cdot d\vec{A} = -i \quad (1.12)$$

Die Fläche A_2 liegt im Dielektrikum, dort ist $J = 0$. Wir integrieren über die Verschiebungsstromdichte \vec{J}_v und erhalten:

$$\int_{A_2} \vec{J}_v \cdot d\vec{A} = i_v \quad (1.13)$$

Die Feldlinien der beiden Felder gehen ineinander über: Jede in die Hüllfläche eintretende \vec{J} -Feldlinie tritt an anderer Stelle als \vec{J}_v -Feldlinie aus der

Hüllfläche wieder aus. Hieraus folgt, dass der Wert des Integrals über die Hüllfläche gleich Null sein muss:

$$\oint (\vec{J} + \vec{J}_v) \cdot d\vec{A} = 0 \quad (1.14)$$

Dies ist die allgemeine Formulierung des Knotensatzes für zeitabhängige Ströme.

Die Verschiebungsströme müssen bei der Aufstellung einer Gleichung nach dem Knotensatz berücksichtigt werden; er lautet für jeden Knoten:

$$\sum (i + i_v) = 0 \quad (1.15)$$

Verschiebungsströme treten nicht nur im Inneren von Kondensatoren auf. Liegen in einem Netz mehrere Knoten auf unterschiedlichen, zeitabhängigen Potenzialen, so verursacht die Änderung des elektrischen Feldes zwischen ihnen Verschiebungsströme. Diese werden in der Ersatzschaltung eines solchen Netzes durch ideale kapazitive Eintore beschrieben; man nennt sie **Streukapazitäten**.

Liegt zwischen zwei Knoten (1; 2) eines Netzes die Streukapazität C_s , so gilt für den Verschiebungsstrom von 1 nach 2:

$$i_v = C_s \frac{du_{12}}{dt} \quad (1.16)$$

Die Streukapazitäten sind von der Geometrie der Schaltung und von den verwendeten Materialien abhängig; sie sind i. Allg. sehr klein. Ihre Berechnung, die sich auch mit Computer-Programmen durchführen lässt, ist recht aufwendig; daher begnügt man sich oft mit Schätzungen.

Durch die Streukapazitäten können z. B. schnell veränderliche Spannungen in andere Netzteile übertragen werden und dort Störungen hervorrufen; man spricht dabei von einer störenden **kapazitiven Kopplung**.

Bei langsam veränderlichen Spannungen können die Streukapazitäten i. Allg. vernachlässigt werden.

¹⁾ James Clerk Maxwell, 1831 – 1879