HANSER

Leseprobe

zu

Wirtschaftsmathematik

von Matthias Maßmann

Print-ISBN: 978-3-446-46401-8
E-Book-ISBN: 978-3-446-46545-9

Weitere Informationen und Bestellungen unter
http://www.hanser-fachbuch.de/978-3-446-46401-8
sowie im Buchhandel

Vorwort der Herausgeber

Wirtschaftswissenschaften, Wirtschaftsinformatik, Wirtschaftsingenieurwesen – der Weg bis zum erfolgreichen Studienabschluss ist gepflastert mit einer Vielzahl von Vorlesungen und den unvermeidlichen Klausuren.

Als Dozent wird man in der Phase der Prüfungsvorbereitung im Wesentlichen mit einer Frage konfrontiert: Haben Sie noch mehr Übungsaufgaben? Gefolgt von der Frage: Haben Sie Lösungen?

Diese Buchreihe soll den Studierenden die Möglichkeit geben, sich im Selbststudium auf die Prüfungen vorzubereiten, weil nicht nur Endergebnisse als Lösungen angegeben werden, sondern auch ausführliche Erläuterungen zum Lösungsweg.

Dabei greifen die Autoren auf ihre jahrelange Erfahrung als Dozenten verschiedenster Module an Berufsakademien, Fachhochschulen oder anderen Bildungseinrichtungen zurück. Insgesamt ergibt sich so eine kleine Bibliothek der Übungsaufgaben, die den gesamten Studienverlauf abdeckt.

Rödermark, im September 2020

Volker Drosse

Matthias Maßmann

Vorwort des Autors

Manche Studierende sind überrascht, wie früh im Verlauf eines wirtschaftswissenschaftlichen Studiums sie mit Mathematik konfrontiert sind, meist schon ganz am Anfang. Das liegt daran, dass die Mathematik als Werkzeug in praktisch jeder ökonomischen Teildisziplin benötigt wird – sei es, dass Gewinne maximiert, Transportwege minimiert oder Kundenzufriedenheiten gemessen werden müssen. Von den Fragestellungen im Finanzbereich ganz zu schweigen.

An dieser Stelle macht sich dann oft ein „Das habe ich schon in der Schule nicht verstanden"-Trauma breit. Und so bekommen die entsprechenden Prüfungen das Image eines Aussiebe-Vorgangs, der im besten Falle gerade eben so bestanden werden kann. Und wenn man später im Fernsehen sagt, dass man Mathematik nicht versteht, bekommt man vom Publikum noch Beifall.

Das ist falsch und unnötig. Man muss sich als Lehrer und Dozent nur die Zeit nehmen, die Zusammenhänge einfach zu erklären. Und man muss als Studierender üben. Hierbei soll das vorliegende Werk helfen.

Bei meinen Mathematik-Veranstaltungen habe ich beobachtet, dass man die Studierenden erst einmal bei den grundlegenden Regeln und Zusammenhängen abholen muss. Danach können weiterführende theoretische Grundlagen entwickelt werden, die man schließlich auf ökonomische Fragestellungen anwendet. Ich habe mich bemüht, diesen Dreiklang in entsprechende Übungsaufgaben zu übersetzen. Die Lösungen sind so gestaltet, dass sich das Buch zum Selbststudium eignet.

Ich bedanke mich bei den Studierenden der Berufsakademie Rhein-Main in Rödermark, die mir – wissentlich und unwissentlich – wertvolle Hinweise zur Gestaltung von Lehrveranstaltungen im Allgemeinen und von Übungsaufgaben im Besonderen gegeben haben. Ich bedanke mich bei den Kolleginnen und Kollegen der BA, die im Hintergrund dafür sorgen, dass ich den Studierenden Freude an der Mathematik vermitteln kann (oder das

zumindest versuchen kann). Ich danke Frau Christina Kubiak und Herrn Frank Katzenmayer für die reibungslose und gute Zusammenarbeit mit dem Hanser Verlag. Und ich danke den vielen kleinen und großen guten Geistern, die mir Rat, Tat und Ansporn gegeben haben.

Kritik und Anregungen sind herzlich willkommen. Denn uns alle, die wir uns mit Mathematik auseinandersetzen, eint eine Erkenntnis: Mathe macht Spaß!

Frankfurt, im September 2020

Matthias Maßmann

Inhalt

1 Mathematische Grundlagen

1.1 Aufgaben

Aufgabe 1

Berechnen Sie folgende Summen:

a) $\sum_{i=3}^{6} i$

b) $\sum_{i=12}^{15} 3i$

c) $\sum_{i=-5}^{-3} i(i+1)$

d) $\sum_{i=2}^{5} (-1)^i \times i$

e) $\sum_{i=4}^{6} \frac{a}{i^2}$

Aufgabe 2

Berechnen Sie folgende Produkte:

a) $\prod_{i=1}^{4} i$

b) $\prod_{i=4}^{7} 3i$

c) $\prod_{i=5}^{9} i(i+1)$

d) $\prod_{i=-3}^{-1} (-1)^i \times i$

e) $\prod_{i=12}^{16} a^i$

Aufgabe 3

Berechnen Sie folgende Ausdrücke:

a) $\sum_{i=2}^{5} \sum_{j=6}^{7} ij$

b) $\sum_{i=2}^{5} \prod_{j=6}^{7} ij$

c) $\prod_{i=2}^{5} \sum_{j=6}^{7} ij$

Aufgabe 4

Vereinfachen Sie die Ausdrücke:

a) $(a+b)^2 - (a-b)^2$

b) $(x+y)(y-x)$

c) $u - v - (2u - 2v - (3u - 3v))$

Aufgabe 5

Schreiben Sie als Produkt:

a) $18ab - 9a + 27a^2$

b) $6x^2 + 24x + 24$

c) $64x^2 - 16x + 1$

d) $48u^2 - 75v^2$

Aufgabe 6

Schreiben Sie als Potenz:

a) $\sqrt[3]{x\sqrt[2]{x}}$

b) $\sqrt[5]{x^{-3}\sqrt{x^6}}$

c) $\dfrac{\sqrt[6]{x^3}}{\sqrt{y}}\,\dfrac{\sqrt{y^3}}{\sqrt[3]{x}}$

Aufgabe 7

Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke:

a) $x^n \times x^{2n}$

b) $\dfrac{a^3b^4c}{ab^2c^3}$

c) $\dfrac{x^{2n-1}y^{5n}}{y^{3n-1}x^{n+1}}$

d) $\dfrac{\left(a^4b^{-3}\right)^{-2}}{c^5}$

Aufgabe 8

Berechnen Sie:

a) $\log_5\left(125\right)$

b) $\log_2\left(\dfrac{1}{16}\right)$

c) $\ln\left(e\right)$

d) $\ln(e^x)$

1.2 Lösungen

Lösung zu Aufgabe 1

Nacheinander müssen in den Ausdruck hinter dem Summenzeichen die Werte der Laufvariablen i eingesetzt werden. Die Untergrenze steht unter, die Obergrenze über dem Summenzeichen. Anschließend ist alles zu addieren. Das Summenzeichen ist übrigens der große griechische Buchstabe Sigma, der unserem S entspricht und auf eine Summe hinweist.

a) $$\sum_{i=3}^{6} i = 3+4+5+6=18$$

b) $$\sum_{i=12}^{15} 3i = 3\sum_{i=12}^{15} i = 3\left(12+13+14+15\right)=162$$

c) $$\sum_{i=-5}^{-3} i\left(i+1\right)=\left(-5\right)\left(-4\right)+\left(-4\right)\left(-3\right)+\left(-3\right)\left(-2\right)=38$$

a) $$\sum_{i=2}^{5}\left(-1\right)^{i}\times i=2-3+4-5=-2$$

d) $$\sum_{i=4}^{6}\frac{a}{i^2}=\frac{a}{16}+\frac{a}{25}+\frac{a}{36}=\frac{469a}{3600}$$

Lösung zu Aufgabe 2

Die Vorgehensweise ist dieselbe wie beim Summenzeichen, nur sind diesmal alle Werte zu multiplizieren. Das Produktzeichen ist übrigens der große griechische Buchstabe Pi, der unserem P entspricht und auf ein Produkt hinweist.

a) $$\prod_{i=1}^{4} i = 1\times2\times3\times4=4!=24$$

b) $$\prod_{i=4}^{7} 3i = 3^4\prod_{i=4}^{7} i = 3^4\times4\times5\times6\times7=68040$$

c) $\prod_{i=5}^{9} i(i+1) = 5\times6\times6\times7\times7\times8\times8\times9\times9\times10 = 457228800$

d) $\prod_{i=-3}^{-1} (-1)^i \times i = (-1)^{-3}\times(-3)\times(-1)^{-2}\times(-2)\times(-1)^{-1}\times(-1) = -6$

e) $\prod_{i=12}^{16} a^i = a^{12}\times a^{13}\times a^{14}\times a^{15}\times a^{16} = a^{12+13+14+15+16} = a^{70}$

Lösung zu Aufgabe 3

Bei doppelten Ausdrücken fixiert man zuerst den vorderen Index und durchläuft die hintere Summe (oder Produkt). Danach setzt man die vordere Variable um 1 hoch und durchläuft wieder die hintere Operation. Das macht man solange, bis alle vorderen Indizes durchlaufen wurden.

a) $\sum_{i=2}^{5}\sum_{j=6}^{7} ij = 2\times6+2\times7+3\times6+3\times7+4\times6+4\times7+5\times6+5\times7 = 182$

b) $\sum_{i=2}^{5}\prod_{j=6}^{7} ij = \sum_{i=2}^{5} i^2 \prod_{j=6}^{7} j = 2^2\times6\times7+3^2\times6\times7+4^2\times6\times7+5^2\times6\times7 = 2268$

c) $$\begin{aligned}\prod_{i=2}^{5}\sum_{j=6}^{7} ij = \prod_{i=2}^{5} i\sum_{j=6}^{7} j \quad &= 2\times(6+7)\times3\times(6+7)\times4\times(6+7)\times5\times(6+7)\\ &= 3427320\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 4

Wir alle haben sie bis zum Abwinken gepaukt: die binomischen Formeln. Wenn sie einem im richtigen Moment einfallen, bringen sie eine erhebliche Rechenvereinfachung. Wenn man Klammern auflöst, arbeitet man sich am besten von innen nach außen vor.

a) $(a+b)^2-(a-b)^2 = a^2+2ab+b^2-\left(a^2-2ab+b^2\right) = 4ab$

b) $(x+y)(y-x) = (y+x)(y-x) = y^2-x^2$

c) $$u - v - \big(2u - 2v - (3u - 3v)\big) = u - v - (2u - 2v - 3u + 3v)$$
$$= u - v - (-u + v) = 2u - 2v$$

Lösung zu Aufgabe 5

Das Distributivgesetz (genau, die Sache mit Ausklammern und Ausmultiplizieren!) ist deswegen so wichtig, weil man mit ihm eine Summe in ein Produkt verwandeln kann (und umgekehrt). Die Binomischen Formeln (ein Binom ist eine Summe aus zwei Summanden) sind ein Spezialfall des Distributivgesetzes.

a) $18ab - 9a + 27a^2 = 9a(2b - 1 + 3a)$

b) $6x^2 + 24x + 24 = 6(x^2 + 4x + 4) = 6(x + 2)^2$

c) $64x^2 - 16x + 1 = (8x - 1)^2$

d) $48u^2 - 75v^2 = 3(16u^2 - 25v^2) = 3(4u - 5v)(4u + 5v)$

Lösung zu Aufgabe 6

Es empfiehlt sich, Wurzeln als Potenzen zu schreiben. Auf diese Weise muss man für Wurzeln keine eigenen Regeln lernen, sondern kann auf die Potenzgesetze zurückgreifen. Auch später beim Ableiten hilft dieser Trick enorm.

a) $$\sqrt[3]{x\sqrt[2]{x}} = \left(x \times x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(x^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{1}{2}}$$

b) $$\sqrt[5]{x^{-3}\sqrt{x^6}} = \left(x^{-3} \times x^{\frac{6}{2}}\right)^{\frac{1}{5}} = \left(x^0\right)^{\frac{1}{5}} = 1$$

c) $$\frac{\sqrt[6]{x^3}}{\sqrt{y}}\,\frac{\sqrt{y^3}}{\sqrt[3]{x}} = x^{\frac{3}{6}}\,y^{-\frac{1}{2}}\,y^{\frac{3}{2}}\,x^{-\frac{1}{3}} = x^{\frac{1}{6}}\,y$$

Lösung zu Aufgabe 7

Wenn man eine Potenz aus dem Nenner in den Zähler holt (oder umgekehrt), ändert sich das Vorzeichen des Exponenten.

a) $x^n \times x^{2n} = x^{3n}$

b) $\dfrac{a^3 b^4 c}{a b^2 c^3} = a^2 b^2 c^{-2}$

c) $\dfrac{x^{2n-1} y^{5n}}{y^{3n-1} x^{n+1}} = x^{2n-1} y^{5n} y^{-3n+1} x^{-n-1} = x^{n-2} y^{2n+1}$

d) $\dfrac{\left(a^4 b^{-3}\right)^{-2}}{c^5} = a^{-8} b^6 c^{-5}$

Lösung zu Aufgabe 8

Mit dem Logarithmus wird der Exponent einer Potenz ausgerechnet. Es wird also die Frage geklärt: Hoch was muss ich die Basis nehmen, damit die Zahl herauskommt, die im Logarithmus steht? Die Abkürzung „ln“ steht für den natürlichen Logarithmus, also den Logarithmus zur Basis e.

a) $\log_5\left(125\right) = 3$

b) $\log_2\left(\dfrac{1}{16}\right) = -4$

c) $\ln\left(\mathrm{e}\right) = 1$

d) $\ln(\mathrm{e}^x) = x$