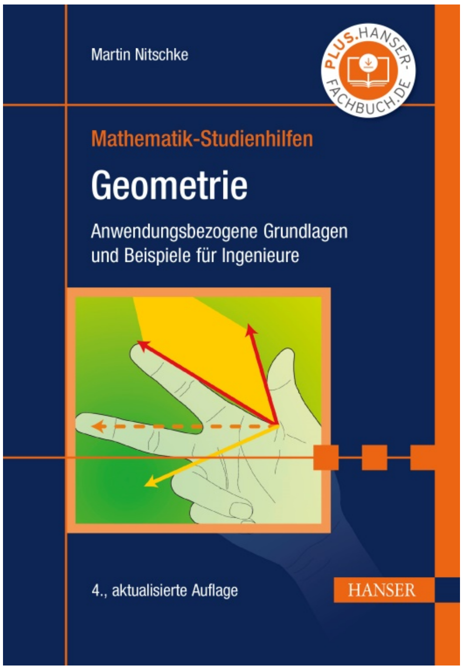
HANSER




# Leseprobe

zu

# „Geometrie“

von Martin Nitschke

Print-ISBN: 978-3-446-46748-4
E-Book-ISBN: 978-3-446-46778-1

# Vorwort

In so gut wie allen technischen Studiengängen hat die Geometrie ihren Platz; sei es als eigenes Fach, als Teil des Mathematikkurses oder versteckt in anderen Lehrveranstaltungen. Daran ändert auch die zunehmende Leistungsfähigkeit und Verfügbarkeit ausgefeilter CAD-Systeme nichts; CAD ist kein Ersatz, sondern häufig ein Werkzeug und manchmal eine Weiterentwicklung der klassischen Geometrie. Ähnlich wie in den Grundschulen weiterhin das Schreiben mit der Hand unterrichtet wird (obwohl es Textverarbeitungsprogramme gibt), ist die Geometrie Bestandteil jeder Ingenieurausbildung. Der souveräne Umgang mit CAD setzt ein umfangreiches geometrisches Grundwissen voraus. Da dieses nur bei wenigen Studienanfängern vorhanden ist, beginnt die vorliegende Studienhilfe mit einer Auffrischung (bzw. Einführung) einiger Zusammenhänge aus der Schulgeometrie. Danach werden als wesentliches Hilfsmittel zur analytischen Beschreibung Vektoren und Matrizen eingeführt. Damit und mit etwas Analysis lassen sich Kurven, Flächen und Körper darstellen sowie Bogenlängen, Flächeninhalte, Volumina, Abstände und Schnitte berechnen. Abschließend werden einige Grundaufgaben und Projektionen der darstellenden Geometrie behandelt.

Das Buch kann in der vorgegebenen Reihenfolge durchgearbeitet werden. In vielen Fällen wird zum Verständnis ein Zurückblättern erforderlich sein; auf die entsprechende Stelle wird dann durch eine Formel-, Satz-, Bild- oder Aufgabennummer verwiesen. Literatur- und Internethinweise auf tiefer gehende und/oder weiterführende Betrachtungen sind in eckige Klammern [ ] gesetzt und im Literatur- und Internetverzeichnis spezifiziert. Alle zitierten Webseiten wurden mit dem Dienst WebCite® archiviert, so dass diese zeitlich unbegrenzt auch bei nachträglichen Änderungen und Löschungen in der zitierten Fassung abgerufen werden können.

Bei der Erstellung des Buches wurden das Schriftsatzsystem LaTeX[1] und das mathematische Softwaresystem MATLAB[2] eingesetzt. Sämtliche Bilder wurden mit MATLAB erstellt; die Quelltexte sind im Internet verfügbar. Für Beispiele mit geographischem Bezug wurde zur Darstellung der Kontinentkonturen das frei verfügbare, weltumspannende digitale Höhenmodell [tbase.bin WWW] benutzt.

Diese Studienhilfe basiert auf meinen Lehrveranstaltungen an der Hochschule Neubrandenburg. Nicht zuletzt durch die konstruktive Kritik der Studierenden konnte so manche Ungereimtheit beseitigt werden; herzlichen Dank

[1] Näheres zu LaTeX unter [DANTE WWW].
[2] MATLAB® ist eingetragenes Warenzeichen von The MathWorks Inc.

dafür! Weitere Hinweise und Verbesserungsvorschläge aus dem Leserkreis sind selbstverständlich willkommen; meine E-Mail-Adresse und zusätzliche Informationen zum Buch finden Sie auf der Internetseite https://plus.hanser-fachbuch.de. Ich danke Kati Blaudzun und Andreas Wehrenpfennig für die mühevolle Arbeit des Korrekturlesens, Frau Fritzsch, Frau Werner und Herrn Katzenmayer für die angenehme und aufmerksame Zusammenarbeit. Ebenso danke ich Herrn Engelmann für die Aufnahme in diese Reihe und viele fachliche Hinweise.

Neubrandenburg, im August 2020 Martin Nitschke

## Symbole und Schriftarten

✍ **An diesen Stellen** *ist der Leser eingeladen, zum Stift zu greifen und eine Aufgabe zu lösen. Aufgaben sind grundsätzlich in unmittelbarer Nähe zur Behandlung des jeweiligen Stoffes eingefügt. Dies ermöglicht eine sofortige Verständnisüberprüfung. Am Ende des Buches sind die Lösungen der Aufgaben in Kurzform zusammengestellt; eine ausführlichere Fassung steht auf https://plus.hanser-fachbuch.de.*

≫ Französische Anführungszeichen markieren mit MATLAB programmierte Beispiele. MATLAB-Schlüsselwörter wie **function** sind fett gedruckt, die Namen vordefinierter Funktionen, wie zum Beispiel **sin**, zusätzlich unterstrichen. Funktionen aus der Symbolic Math Toolbox wie **syms** sind doppelt unterstrichen. Kommentare werden durch ein %-Zeichen eingeleitet und sind hier in Grau gesetzt. `Antworten des MATLAB-Systems sind durch Schreibmaschinenschrift hervorgehoben.` Die vollständige MATLAB-Dokumentation, also insbesondere die Beschreibung der vordefinierten Funktionen, ist sowohl in das MATLAB-System integriert als auch über [MATLAB helpdesk WWW] zugänglich. Eine gute Einführung in MATLAB und eine Übersicht über frei verfügbare Software zur Linearen Algebra sind auf [Gramlich WWW] zu finden. In den Programm-Beispielen dieser Studienhilfe werden MATLAB-Kenntnisse etwa im Umfang der [Gramlich WWW]-Einführung vorausgesetzt. Die MATLAB-Beispiele sollen die Umsetzung des Gelernten in Computerprogramme unterstützen; MATLAB- oder andere EDV-Kenntnisse sind jedoch keine Voraussetzung für das Verständnis dieses Buches. Weiteres zu MATLAB und ähnlichen Produkten ist in Abschnitt 2.1 zu finden.

Das MATLAB-Logo und eine kleinere Schrift verweisen auf die MATLAB-Datei, die zum jeweiligen Bild oder Programm-Listing gehört. Der unter https://plus.hanser-fachbuch.de abrufbare Quelltext ermöglicht Lesern mit MATLAB-Zugang, das Bild bzw. Programm zu reproduzieren und/oder für den jeweiligen Zweck (Konstruktionsvorlage, Vortragsfolie usw.) zu modifizieren.

# Inhaltsverzeichnis

# 0 Einleitung

Nach [Brockhaus DVD 2004] ist die **Geometrie** (griechisch **Erd-** oder **Landmessung**) das Teilgebiet der Mathematik, das aus der Beschäftigung mit den Eigenschaften und Formen des Raumes, wie der Gestalt ebener und räumlicher Figuren, Berechnung von Längen, Flächen, Inhalten u.a. entstand. Der heute als **klassisch** bezeichnete Teil der Geometrie geht auf EUKLID (um 300 v.Chr.) zurück ([Elemente]). RENÉ DESCARTES (1596–1650) ordnete den Punkten der Ebene und des Raumes (kartesische) Koordinaten zu ([DESCARTES 1637]). Dadurch wurde die Lage eines Punktes vollständig durch Zahlen beschrieben, was wiederum gestattete, geometrische Fragestellungen in algebraische umzuwandeln: Die Grundlagen für die **analytische Geometrie** waren gelegt. Die Behandlung geometrischer Aufgaben mit Methoden der Analysis führte schließlich auf **Differenzial-** und **Integralgeometrie**. Richtungsweisend dafür war der völlig ohne Formeln auskommende, im Beisein von CARL-FRIEDRICH GAUSS (1777–1855) gehaltene Habilitationsvortrag von GEORG FRIEDRICH BERNHARD RIEMANN (1826–1866) ([RIEMANN 1868]). In der **Elementargeometrie** unterscheidet man zwischen **Planimetrie** (ebene Geometrie) und **Stereometrie** (räumliche Geometrie). Ein Großteil der heute benutzten Techniken, insbesondere die **Vektorrechnung**, lässt sich jedoch weitgehend analog zur Behandlung sowohl ebener als auch räumlicher Probleme, sogar in der $n$-dimensionalen Geometrie, einsetzen. Trotzdem spielen der anschauliche dreidimensionale Raum und die zweidimensionale Ebene eine besondere Rolle. Die grundlegende Verknüpfung zwischen einer (mindestens) dreidimensionalen Realität und ihrem zweidimensionalen Abbild auf einem Zeichenblatt oder einem PC-Monitor bilden die (in ihren Ursprüngen zeichnerischen) Abbildungsverfahren der in ihren Vorstufen auf ALBRECHT DÜRER (1471–1528) zurückgehenden und von GASPARD MONGE (1746–1818) erstmalig formulierten **darstellenden Geometrie** (siehe auch Kapitel 4 dieses Buches für einen ersten Überblick, die umfassenden Darstellungen [KLIX, NICKEL 1991, KLIX 2001, FUCKE et al. 2007] sowie die historischen Werke [DÜRER 1525, MONGE 1795]). Die Erweiterung um analytisch-rechnerische Methoden führt schließlich auf die **konstruktive Geometrie** ([KRUPPA 1957, KLIX 2001]). **Angewandte Geometrie** wird in so verschiedenen Disziplinen wie dem Ingenieurwesen, den Geowissenschaften, der Biologie, Physik, Astronomie, Fotografie, Kunstgeschichte und Musik eingesetzt; vielfältige, weit über das vorliegende Taschenbuch hinausgehende Beispiele und analytische Konzepte dazu findet man bei [GLAESER 2007].

# 1 Anknüpfung an die Schulgeometrie

Dieses Kapitel will und kann nicht den mehrjährigen Schulunterricht auf wenigen Seiten zusammenfassen oder gar ersetzen. Sein Ziel ist es vielmehr, am Beispiel einiger bekannter (falls nötig auch aufgefrischter) Zusammenhänge in die *Vorgehensweise* der Geometrieausbildung für Ingenieure einzuführen und an ausgewählten Stellen einen Ausblick auf *Inhalte* „jenseits des Schulwissens" zu geben. Umfassende, aber kompakte Übersichten über die Schulgeometrie enthalten die Geometrieteile von Werken wie [Frank et al. 1998, Gottwald et al. 1995, Reinhardt 2003, Scharlau 2001].

## 1.1 Dreiecke, Vierecke, Vielecke

Seit Generationen werden Schüler im Mathematik-Unterricht mit Dreieckskonstruktionen und -berechnungen gequält. Warum ist das so?

Zum einen sind Dreiecke in Konstruktionen, die eine hohe Stabilität erfordern, unentbehrlich. Als Beispiel seien hier der Fachwerkbau, die Profile von Bogenbrücken (Bild 1.1) und der durch das Gewicht des Fahrers besonders belastete hintere Teil des Fahrradrahmens (Bild 1.2) genannt. Die Stabilität ist gewährleistet, da die Gestalt eines Dreiecks durch seine Seitenlängen eindeutig bestimmt ist (Kongruenzsatz SSS, Bild 1.16). Eine Verformung ist also nur durch Änderung der Seitenlängen möglich. Diese Eigenschaft ist typisch für Dreiecke; bei Vier- und Vielecken ist eine Verformung ohne Änderung der Seitenlängen möglich. (Bild 1.3).

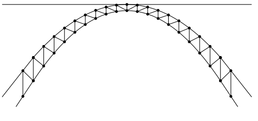


Bild 1.1: Aus Dreiecken zusammengesetztes Brückenprofil

Bogenbruecke.m

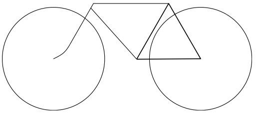


Bild 1.2: Fahrradrahmen

Fahrrad.m

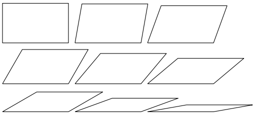


Bild 1.3: Verformung eines Rechtecks

RechteckParall.m

Alle abgebildeten Vierecke haben identische Seitenlängen.

Zum anderen können komplizierte Flächen durch eine Menge von Dreiecken approximiert, d.h. angenähert werden. Bild 1.4 zeigt am Beispiel der gekrümmten Oberfläche einer Glühlampe, wie durch eine steigende Anzahl von (ebenen) Dreiecken eine immer besser werdende Anpassung an eine gegebene

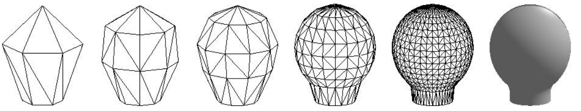


Bild 1.4: Approximation gekrümmter Oberflächen durch Dreiecke

Gluehlampe.m

(gekrümmte) Oberfläche erzielt werden kann. Die dadurch eröffnete Möglichkeit, komplexe geometrische Strukturen näherungsweise durch elementare zu ersetzen, ist die Grundlage der **Finite-Elemente-Methode**. Diese ist ein Verfahren zur Lösung mathematisch formulierbarer Probleme zur Ermittlung von Spannungen und Dehnungen an komplizierten, analytisch nicht oder nur aufwändig berechenbaren, belasteten Bauteilen. Das Bauteil wird dabei durch eine Anzahl von Teilstücken (Elementen) endlicher (finiter) Größe idealisiert. Als Elemente werden dabei häufig Dreiecke benutzt. Die Finite-Elemente-Methode sprengt den Rahmen dieser Geometrie-Einführung, eine Grundlage für deren Verständnis ist jedoch das Verstehen der Geometrie von Dreiecken.

✍ **Aufgabe 1.1** *Dreiecke sind also durch ihre Seitenlängen eindeutig bestimmt, bei Vierecken ist das offensichtlich nicht der Fall. Ist die Gestalt eines Vierecks eindeutig, wenn neben den Seitenlängen zusätzlich einer der vier Innenwinkel vorgegeben ist? Falls ja, beschreiben Sie die entsprechende Konstruktion. Begründen Sie Ihre Antwort!*

Bekanntlich können Dreiecke nach ihrem größten Innenwinkel in **spitz-**, **recht-** und **stumpfwinklig**e eingeteilt werden. Sind zwei der drei Seiten gleich lang, so spricht man von einem **gleichschenklig**en Dreieck; sind sogar alle drei Seitenlängen identisch, so nennt man das Dreieck **gleichseitig**. Die aus dem Schulunterricht (hoffentlich) ebenfalls bekannten Begriffe **Höhen, Mittelsenkrechte, Seiten-** und **Winkelhalbierende** und darauf basierende Zusammenhänge sind in Bild 1.5 zusammengefasst. Unter Winkelhalbierenden versteht man dabei die Halbierenden der *Innen*winkel. Die Halbierenden der *Außen*winkel führen auf die **Ankreise** (Bild 1.6); die Seitenmittelpunkte, die Höhenfußpunkte und die Mittelpunkte zwischen Höhenschnittpunkt und Seitenecken auf den **Feuerbachkreis** (Bild 1.7). Dieser durch neun Punkte verlaufende Kreis wurde von Karl Wilhelm Feuerbach (1800–1834) zunächst als Sechspunktekreis entdeckt.

Für die wichtigsten speziellen **Vierecke** wird auf Bild 1.8 verwiesen, für **Vielecke** auf Bild 1.9. Der für Vielecke häufig synonym benutzte Begriff **Polygon** wird hier weitgehend vermieden, um Verwechslungen mit **Polygonzügen** auszuschließen: Während ein Vieleck (= Polygon) stets ein geschlossener Streckenzug ist, kann ein Polygonzug offen oder geschlossen sein.

Aus der Definition von Sternförmigkeit und Konvexität (Bild 1.9) ergibt sich der Satz 1.1.

**Satz 1.1**

Jedes konvexe Vieleck ist sternförmig, und jeder Punkt innerhalb eines konvexen Vielecks ist ein Sternpunkt.

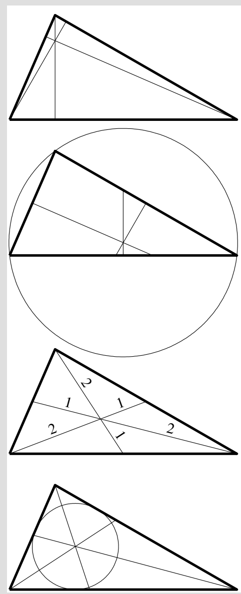
| | |
|---|---|
| **Höhe**<br>Lot auf eine Dreiecksseite durch die gegenüberliegende Ecke<br>*Die drei Höhen schneiden sich in einem Punkt, dem* **Höhenschnittpunkt**. |  |
| **Mittelsenkrechte**<br>Lot auf eine Dreiecksseite durch ihren Mittelpunkt<br>*Die drei Mittelsenkrechten schneiden sich in einem Punkt, dem* **Umkreismittelpunkt**. | |
| **Seitenhalbierende**<br>Strecke zwischen einem Seitenmittelpunkt und der gegenüberliegenden Ecke<br>*Die drei Seitenhalbierenden schneiden sich in einem Punkt, dem* **Schwerpunkt**.<br>Der Schwerpunkt teilt die Seitenhalbierenden im Verhältnis 2:1. | |
| **Winkelhalbierende**<br>Von einem Eckpunkt ausgehende Strecke, die den Innenwinkel halbiert<br>*Die drei Winkelhalbierenden schneiden sich in einem Punkt, dem* **Inkreismittelpunkt**. | |

Bild 1.5: Höhen, Mittelsenkrechte, Seiten- und Winkelhalbierende im Dreieck

DreieckHMSW.m

Allgemein bekannt ist, dass die Summe der Innenwinkel eines Dreiecks 180° ist. Hieraus lässt sich eine Formel für die Winkelsumme im sternförmigen $n$-Eck (Bild 1.9, vierte Figur) herleiten: Die Strecken vom Sternpunkt zu den Ecken zerlegen das $n$-Eck in $n$ Dreiecke. Deren Winkelsumme ist $180° \cdot n$. Die am Sternpunkt anliegenden Winkel summieren sich offensichtlich zu 360°. Da diese keinen Beitrag zur Winkelsumme des $n$-Ecks leisten, sind sie zu subtrahieren; und es ergibt sich eine Summe von $180° \cdot n - 360° = 180° \cdot (n - 2)$.

Damit gilt der Satz 1.2.

**Satz 1.2**

Die Innenwinkelsumme eines sternförmigen $n$-Ecks beträgt $180° \cdot (n-2)$.

Da wegen Satz 1.1 ein konvexes Vieleck stets sternförmig ist, gilt der Satz 1.2 insbesondere für konvexe $n$-Ecke. Man beachte jedoch, dass Satz 1.2 nur für **ebene** $n$-Ecke gilt. Beispielsweise ist auf der Kugeloberfläche die Winkelsumme im Dreieck stets **größer** als 180°; es gibt dort sogar Dreiecke mit drei rechten Winkeln (Bild 1.10). Die Differenz zwischen der Winkelsumme

**Außenwinkelhalbierende**
Durch einen Eckpunkt verlaufende Gerade, die den Außenwinkel halbiert
*Je zwei der drei Außenwinkelhalbierenden schneiden sich in einem der drei* **Ankreismittelpunkt***e.*

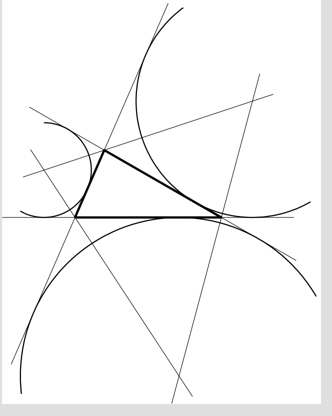


Bild 1.6: Außenwinkelhalbierende im Dreieck und Ankreise DreieckA.m

**Feuerbachkreis**
Durch die drei Seitenmittelpunkte ♦, die drei Höhenfußpunkte • und die Mittelpunkte ■ zwischen dem Höhenschnittpunkt ○ und den drei Seitenecken verlaufender Kreis

Den Mittelpunkt des Feuerbach-Kreises erhält man als Schnitt der Mittelsenkrechten zu den neun definierenden Punkten.

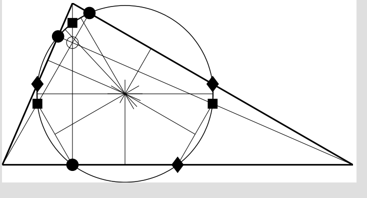


Bild 1.7: Feuerbach- oder Neunpunktekreis Feuerbach.m

| | |
|---|---|
| **Allgemeines Viereck** | |
| **Drachenviereck** | Viereck, bei dem jede Seite eine gleich lange benachbarte Seite hat |
| **Trapez** | Viereck mit zwei zueinander parallelen Seiten |
| **Parallelogramm** | Viereck mit zwei Paaren zueinander paralleler Seiten |
| **Rechteck** | Parallelogramm mit einem rechten Winkel |
| **Raute (Rhombus)** | Viereck mit vier gleich langen Seiten |
| **Quadrat** | Raute mit einem rechten Winkel |

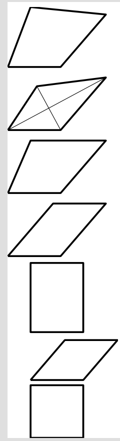


Bild 1.8: Vierecke

Vierecke.m

| |
|---|
| Ein **Polygonzug** besteht aus aneinander anschließenden Strecken. |
| **Allgemeines Vieleck**<br>= **Polygon** = **Geschlossener Polygonzug** |
| Ein Vieleck **mit Selbstüberschneidung** wird auch **verschränkt** oder **überschlagen** genannt. |
| Ein Vieleck heißt **sternförmig**, falls es einen Punkt (den so genannten **Sternpunkt**) gibt, für den die Verbindungsstrecken zu allen Eckpunkten vollständig innerhalb des Vielecks verlaufen. |
| Ein Vieleck heißt **konvex**, falls alle Verbindungsstrecken zwischen den Ecken vollständig innerhalb des Vielecks liegen. |
| Ein Vieleck heißt **regelmäßig** oder **regulär**, falls alle Seiten und alle Winkel gleich groß sind. |

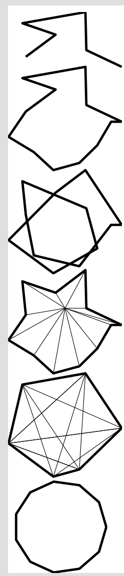


Bild 1.9: Polygonzüge und Vielecke (Polygone)

nEcke.m

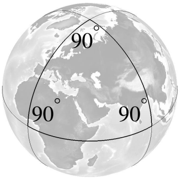



Bild 1.10: Kugeldreieck mit drei rechten Winkeln

Kugeldreieck3R.m

eines Kugeldreiecks und 180° heißt **sphärischer Exzess**. Gauss erkannte, dass der sphärische Exzess ein Maß für die Krümmung des von den Dreiecksseiten begrenzten Flächenstücks ist. Einzelheiten dazu findet man in Büchern über **Differenzialgeometrie**, zum Beispiel [Wünsch 1997]. Gauss erkannte ebenso die fundamentale Bedeutung dieses Zusammenhangs für die Geodäsie: Dreieckswinkel lassen sich mit relativ niedrigem Aufwand *auf der Erdoberfläche* messen. Aus der Abweichung ihrer Summe von 180° (dem sphärischen Exzess) erhält man Informationen über die Krümmung und damit über die Gestalt der Erde, ohne dass es nötig ist, von außen auf unseren Planeten zu schauen. Überlegungen dieser Art sind nicht auf zweidimensionale gekrümmte Flächen wie die Kugeloberfläche beschränkt: Aussagen über Eigenschaften des uns umgebenden vierdimensionalen Raum-Zeit-Kontinuums lassen sich durch Messungen innerhalb des Kontinuums gewinnen. Dies ist eine wesentliche Grundlage für die von Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826–1866), Ernst Mach (1838–1916), Hendrik Antoon Lorentz (1853–1928), Hermann Minkowski (1864–1909), Jules Henri Poincaré (1854–1912) vorbereitete und von Albert Einstein (1879–1955) schließlich aufgestellte **Relativitätstheorie**, vgl. zum Beispiel [Sexl, Schmidt 2000].

✍ **Aufgabe 1.2** *Richtig oder falsch?*

1. *Jedes gleichseitige Dreieck ist gleichschenklig.*
2. *Jedes gleichschenklige Dreieck ist gleichseitig.*
3. *Jedes gleichschenklige Dreieck ist spitzwinklig.*
4. *Es gibt rechtwinklige gleichschenklige Dreiecke.*
5. *Es gibt stumpfwinklige gleichschenklige Dreiecke.*
6. *Jedes gleichseitige Dreieck ist spitzwinklig.*
7. *Es gibt rechtwinklige gleichseitige Dreiecke.*
8. *Es gibt stumpfwinklige gleichseitige Dreiecke.*

✍ **Aufgabe 1.3** *In Bild 1.5 liegen Höhenschnittpunkt, Umkreismittelpunkt, Schwerpunkt und Inkreismittelpunkt innerhalb des Dreiecks. Dies ist in* spitzwinkligen *Dreiecken immer der Fall. Wie ist die Situation in recht- bzw. stumpfwinkligen Dreiecken?*

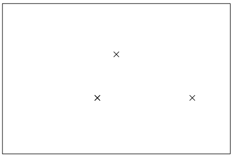


Bild 1.11: zu Aufgabe 1.4,1 ParallDrach.m

## ✍ Aufgabe 1.4

1. *Gegeben sind drei Punkte der Ebene, wie in Bild 1.11 dargestellt. Bestimmen Sie einen vierten Punkt so, dass*

   a) *ein Parallelogramm,* b) *ein Drachenviereck*

   *entsteht. Überlegen Sie jeweils, ob die Lösung eindeutig ist. Falls es mehrere Lösungen gibt, geben Sie alle an!*

2. *Richtig oder falsch?*

   a) *Jedes Trapez ist ein Parallelogramm.*
   b) *Jedes Parallelogramm ist ein Trapez.*
   c) *Jedes Parallelogramm ist ein Drachenviereck.*
   d) *Jede Raute ist ein Trapez.*
   e) *Jede Raute ist ein Drachenviereck.*
   f) *Jedes Rechteck ist ein Trapez.*
   g) *Jedes Rechteck ist ein Drachenviereck.*
   h) *Jedes Quadrat ist ein Trapez.*
   i) *Jedes Quadrat ist ein Drachenviereck.*

## ✍ Aufgabe 1.5 *Richtig oder falsch?*

1. *Es gibt verschränkte Dreiecke.*
2. *Es gibt verschränkte Vierecke.*
3. *Es gibt verschränkte Trapeze.*
4. *Es gibt verschränkte Drachenvierecke.*
5. *Es gibt verschränkte Parallelogramme.*
6. *Jedes Dreieck ist konvex.*
7. *Jedes Viereck ist konvex.*
8. *Jedes Trapez ist konvex.*
9. *Jedes Trapez ohne Selbstüberschneidung ist konvex.*
10. *Jedes Drachenviereck ist konvex.*
11. *Jedes Parallelogramm ist konvex.*
12. *Jedes konvexe Vieleck ist sternförmig.*
13. *Jedes sternförmige Vieleck ist konvex.*

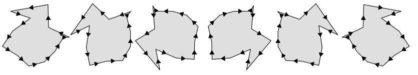


Bild 1.12: Kongruente Vielecke

Kongruenz.m

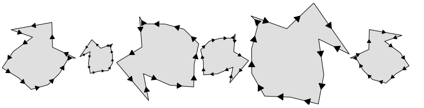


Bild 1.13: Ähnliche Vielecke

Aehnlichkeit.m

## 1.2 Kongruenz, Ähnlichkeit, Strahlensätze

Zwei oder mehr geometrische Objekte heißen **kongruent**, wenn es eine Kombination aus Bewegungen und Spiegelungen gibt, die sie ineinander überführt. Unter Bewegungen werden hier beliebige Kombinationen aus **Verschiebungen** und **Drehungen** verstanden. Lassen sich Objekte durch Bewegungen, Spiegelungen sowie gleichmäßige Vergrößerungen und Verkleinerungen ineinander überführen, so nennt man sie **ähnlich**. Kongruente Objekte sind stets ähnlich, aber ähnliche Objekte im Allgemeinen nicht kongruent zueinander. Man spricht von **gleichsinniger** Kongruenz bzw. Ähnlichkeit, wenn sich die Objekte nur durch Bewegungen (bei Ähnlichkeit auch durch Vergrößerungen und Verkleinerungen), aber **ohne Spiegelungen** ineinander überführen lassen. Andernfalls spricht man von **gegensinniger** Kongruenz bzw. Ähnlichkeit. Zueinander kongruente/ähnliche Vielecke sind genau dann gleichsinnig kongruent/ähnlich, wenn der Umlaufsinn erhalten bleibt. So sind die ersten drei Vielecke aus Bild 1.12/1.13 zueinander jeweils gleichsinnig kongruent/ähnlich und zu den letzten dreien gegensinnig kongruent/ähnlich. Beispiele für Kongruenz und Ähnlichkeit komplexerer Strukturen sind Bild 1.14

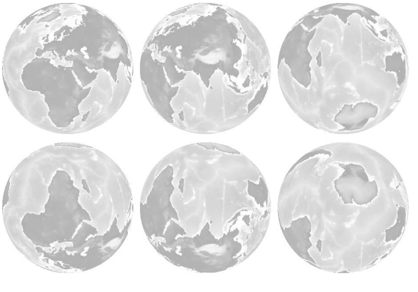


Bild 1.14: Kongruente Welten

KongruenteWelten.m

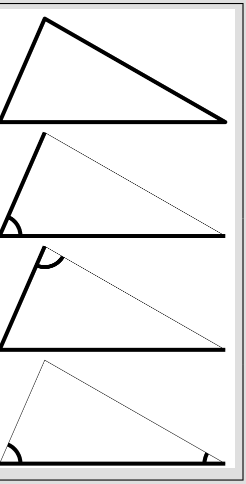
Bild 1.15: Ähnliche Welten

AehnlicheWelten.m

und 1.15: Die oberen drei Welten sind zueinander jeweils gleichsinnig kongruent/ähnlich und zu den unteren dreien gegensinnig kongruent/ähnlich. Kongruente Figuren stimmen in Größe und Gestalt überein; ähnliche Figuren nur in ihrer Gestalt. Bei ähnlichen Figuren stimmen korrespondierende Winkel und Längen*verhältnisse* überein, bei kongruenten Figuren zusätzlich auch die Größen von Längen. Da komplexe geometrische Figuren häufig durch Dreiecke zusammengesetzt oder angenähert werden (Bild 1.4), wird deren Kongruenz/Ähnlichkeit auf die Kongruenz/Ähnlichkeit von Dreiecken zurückgeführt. Die dafür grundlegenden Kongruenzsätze SSS, SWS, SsW, WSW und die entsprechenden Ähnlichkeitssätze sind in Bild 1.16 zusammengefasst. Die hier nicht behandelte Situation sSW wird in Satz 1.9 erörtert.

Dreiecke sind **kongruent**, wenn sie

| |
|---|
| in den **drei Seiten (SSS)** |
| **oder** in **zwei Seiten** und<br>**dem eingeschlossenen Winkel (SWS)** |
| **oder** in **zwei Seiten** und<br>**dem der größeren Seite gegenüberliegenden Winkel (SsW)** |
| **oder** in **einer Seite** und<br>**den beiden anliegenden Winkeln (WSW)** |



übereinstimmen. Analog dazu sind Dreiecke **ähnlich**, wenn sie

| |
|---|
| in **zwei Seitenverhältnissen** |
| **oder** im **Verhältnis zweier Seiten**<br>und **dem eingeschlossenen Winkel** |
| **oder** im **Verhältnis zweier Seiten**<br>und **dem der größeren Seite gegenüberliegenden Winkel** |
| **oder in zwei Winkeln** |

übereinstimmen.

Bild 1.16: Kongruenz- und Ähnlichkeitssätze für Dreiecke DreieckKongruenz.m

### ✍ Aufgabe 1.6 (zum Kongruenzbegriff) *Richtig oder falsch?*

1. *Vierecke sind kongruent, wenn sie in allen vier Seiten übereinstimmen.*
2. *Quadrate sind kongruent, wenn sie in einer Seite übereinstimmen.*
3. *Rauten sind kongruent, wenn sie in einer Seite übereinstimmen.*
4. *Rechtecke sind kongruent, wenn sie in zwei benachbarten Seiten übereinstimmen.*
5. *Rechtecke sind gleichsinnig kongruent, wenn sie in zwei benachbarten Seiten übereinstimmen.*
6. *Parallelogramme sind kongruent, wenn sie in zwei benachbarten Seiten übereinstimmen.*
7. *Parallelogramme sind kongruent, wenn sie in zwei benachbarten Seiten und dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmen.*
8. *Parallelogramme sind gleichsinnig kongruent, wenn sie in zwei benachbarten Seiten und dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmen.*
9. *Drachenvierecke sind kongruent, wenn sie in allen vier Seiten übereinstimmen.*
10. *Kreise sind kongruent, wenn sie im Radius übereinstimmen.*
11. *Kreise sind gleichsinnig kongruent, wenn sie im Radius übereinstimmen.*

### ✍ Aufgabe 1.7 (zum Ähnlichkeitsbegriff) *Richtig oder falsch?*

1. *Alle Vierecke sind zueinander ähnlich.*
2. *Alle Quadrate sind zueinander ähnlich.*
3. *Alle Rauten sind zueinander ähnlich.*
4. *Alle Rechtecke sind zueinander ähnlich.*
5. *Alle Parallelogramme sind zueinander ähnlich.*
6. *Parallelogramme sind ähnlich, wenn sie in allen Winkeln übereinstimmen.*
7. *Drachenvierecke sind ähnlich, wenn sie in allen Winkeln übereinstimmen.*
8. *Alle Kreise sind zueinander ähnlich.*

### ✍ Aufgabe 1.8 (zu Bild 1.16)

1. *Gemäß Kongruenzsatz SSS ist die Gestalt eines Dreiecks durch seine drei Seitenlängen eindeutig bestimmt. Wenn umgekehrt die drei Seitenlängen gegeben sind, existiert dann dazu immer ein Dreieck? Falls ja, geben Sie die entsprechende Konstruktion an. Falls nein, geben Sie eine Bedingung für die Seitenlängen an, die die Existenz des Dreiecks garantiert.*

2. *Gemäß Kongruenzsatz SWS ist die Gestalt eines Dreiecks durch zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel eindeutig bestimmt. Wenn umgekehrt zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel gegeben sind, existiert dann dazu immer ein Dreieck?*

# Index