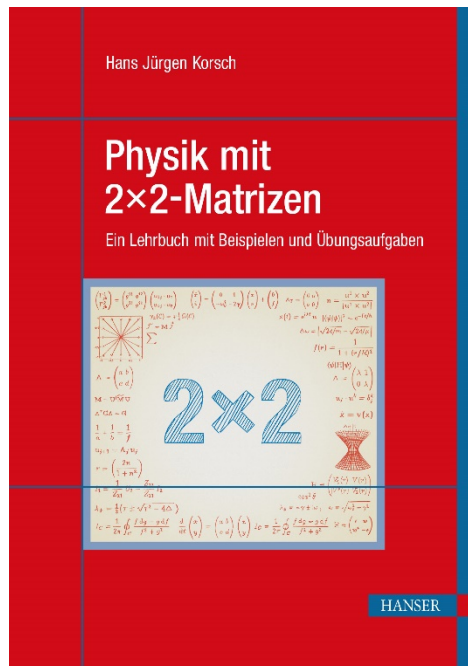


HANSER



Leseprobe

zu

Physik mit 2 x 2 Matrizen

von Hans Jürgen Korsch

Print-ISBN: 978-3-446-46694-4

E-Book-ISBN: 978-3-446-46806-1

Weitere Informationen und Bestellungen unter
<http://www.hanser-fachbuch.de/978-3-446-46694-4>

sowie im Buchhandel

© Carl Hanser Verlag, München

Vorwort

In der Physik werden Matrizen, insbesondere 2×2 -Matrizen, oft als einfache Modelle eingesetzt, um komplizierte Probleme verständlicher zu machen und ihre theoretischen und praktischen Lösungsmethoden zu illustrieren. Das vorliegende Lehrbuch behandelt interessante aktuelle und anwendungsnahe Aufgabenfelder der modernen Physik, in denen die Matrix-Algebra zum Einsatz kommt. Es wendet sich in erster Linie an Studierende der Physik, zum Selbststudium oder als Begleitmaterial zu Vorlesungen. Das Buch kann jedoch auch fortgeschrittenen Interessenten an physikalischen Fragestellungen und ihrer theoretischen Beschreibung neue Perspektiven eröffnen.

Zum einen bietet es einen schnellen Einstieg in sehr unterschiedliche Gebiete der Physik. Durch die oft verwendete ähnliche Methodik, wie zum Beispiel die Transfermatrizen, erkennt man interessante Zusammenhänge zwischen weit auseinander liegenden Feldern. Zum anderen ermöglicht es der Leserin oder dem Leser, die vermittelten Methoden erfolgreich auf neue Probleme anzuwenden.

Die Themenvielfalt des Buches spannt einen weiten Bogen von fundamentalen Themen wie Dynamischen Systemen bis hin zur allgemeinen Relativitätstheorie und Quantenphysik. Dabei steht die Quantenmechanik im Zentrum, aber es werden auch anwendungsorientiertere Gebiete wie Mechanik, Optik, Elektronik oder Quantencomputing behandelt.

Jedes Kapitel gibt eine kurze Einführung in den physikalischen Problemkreis und illustriert die angewandten Methoden mithilfe zahlreicher durchgerechneter Beispiele und Übungsaufgaben samt Lösungen. Es wird vorausgesetzt, dass der Leser mit den elementaren Methoden der Matrix-Algebra vertraut ist. Deshalb werden mathematische Verfahren nur kurz erläutert. Eine ausführlichere Darstellung der mathematischen Grundlagen findet der Leser in dem parallel erscheinenden Lehrbuch:

Korsch, Hans Jürgen: *Mathematik mit 2×2 Matrizen. Ein Lehrbuch mit Beispielen und Übungsaufgaben*, Carl Hanser Verlag 2021, Print-ISBN 978-3-446-46693-7, E-Book-ISBN 978-3-446-46805-4 .

Verweise darauf werden im vorliegenden Buch durch „M2“ angegeben, also beispielsweise als „Mehr dazu findet man in M2, Abschnitt 2.4.“

Wie oben erwähnt, stammen viele der Beispiele für einen Einsatz von Matrix-Methoden aus dem Gebiet der Quantenmechanik. Deren mathematische Grundlagen werden im Rahmen des vorliegenden Buches nur sehr knapp dargestellt. Mehr dazu findet man in dem Lehrbuch

Korsch, Hans Jürgen: *Mathematik der Quantenmechanik*, Carl Hanser Verlag 2019, Print-ISBN 978-3-446-46226-7, E-Book-ISBN 978-3-446-46255-7 .

Zwei weitere aktuelle Lehrbücher, die sich auf den Einsatz von Matrizen in der Physik konzentrieren, sind:

Ludyk, Günter: *Relativitätstheorie nur mit Matrizen* sowie *Quantenmechanik nur mit Matrizen*, beide erschienen im Springer-Verlag 2020.

Im vorliegenden Buch wurde auf die oft üblichen detaillierten Literaturangaben der Quellen oder der weiterführenden Arbeiten weitgehend verzichtet, da es nach Ansicht des Autors zunehmend einfacher ist, weitere Informationen zu interessanten Themen im Internet zu „er googeln“, beispielsweise über die immer besser werdenden Einträge bei Wikipedia. Voraussetzung dafür sind natürlich Grundkenntnisse der Thematik und der relevanten Schlagwörter. Quellenangaben gibt es jedoch dort, wo dies unverzichtbar erschien, beispielsweise weil der vorliegende Text sich stark an dieser Literatur orientiert, oder weil die betreffenden Arbeiten schwer auffindbar sind.

Ein paar Worte zur Rolle der vielen Aufgaben im Text. Sie sind bewusst einfach gehalten und lassen sich in der Regel in wenigen Denk- und Rechenschritten lösen. Sie sollen einerseits dazu anregen, aktiv an der Entwicklung eines Themas mitzuarbeiten, um ein besseres Verständnis zu erreichen. Andererseits sollen auf diese Weise Nebenrechnungen, die den Textfluss stören könnten, ausgelagert werden. In allen Fällen findet man ausführliche Lösungen am Ende jedes Kapitels.

Der vorliegende Text beruht auf den Vorlesungen des Autors zu Themen der Theoretischen Physik an der TU Kaiserslautern. Der Autor dankt den ehemaligen Mitgliedern seiner Arbeitsgruppe für viele Anregungen und Kommentare. Insbesondere möchte ich hier Dr. Bruno Mirbach hervorheben, der die Mühe nicht scheute, den vorliegenden Text kritisch durchzusehen, und der durch viele hilfreiche Anmerkungen dazu beitrug, dass der Text verständlicher und ärmer an Fehlern wurde. Weitere Hinweise und Vorschläge bitte an

h.j.korsch@gmail.com.

Eine aktuelle Korrekturliste und weitere Informationen findet man unter

<https://www.hanser-fachbuch.de>.

Mein Dank gilt auch dem Hanser Verlag für die freundliche Aufnahme des Buches und die hilfreiche Unterstützung durch sein Lektorat.

Kaiserslautern, Oktober 2020

Hans Jürgen Korsch

Inhalt

1	Lineare Dynamik	11
1.1	Phasenportraits linearer Flüsse	11
1.2	Fixpunkte und Phasenportraits	13
1.3	Der harmonische Oszillator	17
1.4	Ein Ausflug in die Nichtlinearität	20
1.4.1	Ein nichtlinearer Oszillator	22
1.4.2	Das Lotka-Volterra-Modell	23
1.5	Iterierte lineare Abbildungen	26
1.6	Lösungen der Aufgaben	27
2	Schwingungen und Stöße	31
2.1	Gekoppelte Schwingungen	31
2.2	Angetriebene Schwingungen	36
2.2.1	Zeitperiodische Systeme	40
2.2.2	Die Mathieu-Gleichung	42
2.3	Drei-Teilchen-Stöße	44
2.4	Billard-Systeme	51
2.4.1	Das ebene Billard	51
2.4.2	Fermi-Beschleunigung	55
2.5	Lösungen der Aufgaben	57
3	Ordnung und Chaos	61
3.1	Hamilton-Dynamik	61
3.1.1	Poincaré-Schnitte	64
3.1.2	Das Hénon-Heiles-System	65
3.2	Diskrete Abbildungen	67
3.2.1	Stroboskopische Abbildungen	67
3.2.2	Arnolds Katze	68
3.2.3	Fraktale Abbildungen	75
3.3	Lösungen der Aufgaben	79

4	Elektrische Netzwerke und Vierpole	83
4.1	Elektrische Schwingkreise.....	83
4.2	Vierpole.....	87
4.3	Vierpolketten.....	96
4.4	Lösungen der Aufgaben.....	98
5	Gekrümmte Räume	101
5.1	Flächen im euklidischen Raum.....	101
5.2	Die flache Raumzeit.....	114
5.3	Die gekrümmte Raumzeit.....	120
5.4	Lösungen der Aufgaben.....	124
6	Optische Systeme	127
6.1	Linsensysteme.....	127
6.1.1	Elementare optische Abbildungen.....	128
6.1.2	Die Systemmatrix.....	131
6.1.3	Stationäre Lösungen.....	137
6.1.4	Wellenoptik mit Gauß-Strahlen.....	138
6.2	Optische Resonatoren.....	141
6.2.1	Die Systemmatrix.....	141
6.2.2	Die Grundmode.....	144
6.3	Polarisationsoptik und Jones-Matrizen.....	146
6.4	Lösungen der Aufgaben.....	154
7	Elementare Quantensysteme	159
7.1	Grundbegriffe der Quantenmechanik.....	159
7.2	Das Zweiniveausystem.....	164
7.3	Einfache Modellsysteme.....	165
7.3.1	Der harmonische Oszillator.....	165
7.3.2	Das Kastenpotential.....	166
7.3.3	Ein Doppelmuldenpotential.....	167
7.4	Resonanzzustände.....	172
7.5	Periodische Potentiale.....	174
7.6	Semiklassische Näherungen.....	176
7.7	Lösungen der Aufgaben.....	184

8	Transfermatrix und Streumatrix	189
8.1	Eigenschaften von Transfer- und Streumatrix	190
8.2	Einfache Modellpotentiale	194
8.2.1	Das Delta-Potential	194
8.2.2	Die Potentialstufe	195
8.2.3	Das Kastenpotential	196
8.3	Potentialketten.....	198
8.3.1	Das Doppel-Delta-Potential	199
8.3.2	Der Delta-Kamm	200
8.3.3	Allgemeine periodische Potentiale	203
8.4	Lösungen der Aufgaben	203
9	Von den Spinmatrizen zur Dirac-Gleichung	209
9.1	Die Spin- oder Pauli-Matrizen	209
9.2	Dichtematrix für Spin-1/2-Teilchen	212
9.3	Dynamik des Bloch-Vektors.....	214
9.4	Die Lindblad-Master-Gleichung	217
9.5	Dirac-Gleichung und Dirac-Matrizen	222
9.5.1	Die Dirac-Gleichung	222
9.5.2	Die Clifford-Dirac-Algebra	224
9.5.3	Der Dirac-Spin-Operator	226
9.6	Lösungen der Aufgaben	228
10	Das Zweiniveausystem der Quantenmechanik	231
10.1	Vermiedene Kreuzungen	231
10.2	Zufallsmatrizen und Eigenwert-Statistik	233
10.3	Zeitabhängige Hamilton-Operatoren.....	237
10.4	Zeitperiodische Systeme.....	242
10.4.1	Floquet-Theorie	242
10.4.2	Periodisch getriebene Zweiniveausysteme	244
10.4.3	Der angetriebene Rotor	246
10.5	Kontrolle von Quantenprozessen	248
10.6	Lie-algebraische Zeitevolution	250
10.7	PT-Symmetrie	256
10.7.1	... und 2×2 -Matrizen.....	258
10.7.2	... und elektronische Schwingkreise	261
10.8	Lösungen der Aufgaben	263

11	Phänomene bei Fast-Entartungen	267
11.1	Landau-Zener-Übergänge	267
11.2	Diabolische Punkte und Berry-Phasen	269
11.3	Exzeptionelle Punkte	275
11.4	Landau-Zener-Übergänge mit Zerfall	281
11.5	Nichtlineare Zweiniveausysteme	283
11.6	Lösungen der Aufgaben	288
12	Bipartite Quantensysteme und Quantencomputing	291
12.1	Bipartite Systeme und Verschränkung	293
12.2	Qubits und Quantengatter	295
12.3	Quanten-Teleportation	300
12.4	Quanten-Fouriertransformation	301
12.5	Lösungen der Aufgaben	304
	Index	307

1

Lineare Dynamik

*„Es ist unmöglich, die Schönheiten der Naturgesetze angemessen zu vermitteln, wenn jemand die Mathematik nicht versteht. Ich bedaure das, aber es ist wohl so.“
— Richard Feynman*

Physik ohne Differentialgleichungen wäre fast undenkbar. Also beginnen wir mit einer Untersuchung ihrer einfachsten nichttrivialen Vertreter, den linearen Differentialgleichungen erster Ordnung mit zwei Variablen. Eine Kenntnis ihrer Eigenschaften ist wichtig für ein Verständnis des Verhaltens komplexer nichtlinearer Systeme in der Umgebung ihrer stationären Punkte. Wir werden diese Fixpunkte klassifizieren und dabei den Begriff des Index eines Fixpunktes kennenlernen.

■ 1.1 Phasenportraits linearer Flüsse

Das Zeitverhalten eines Systems, beispielsweise eines mechanischen Pendels, eines elektrischen Schwingkreises oder eines biologischen Ökosystems, wird oft durch gekoppelte gewöhnliche Differentialgleichungen beschrieben. Solche Differentialgleichungen lassen sich in ein System erster Ordnung für die Variablen x_1, \dots, x_n transformieren. Im einfachsten Fall sind sie explizite Gleichungen für die Änderung $\dot{x}_j = dx_j/dt$ der Größen x_j mit der Zeit t ,

$$\dot{x}_j = v_j(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad j = 1, \dots, n. \quad (1.1)$$

(Genauer gesagt handelt es sich hier um ein **autonomes** System. Im allgemeineren Fall können die Funktionen v_j zeitabhängig sein.) Man sucht eine Lösung für die Anfangsbedingungen $x_j(t_0)$. Wir werden hier annehmen, dass die Variablen und die Funktionen reell sind. Zur Abkürzung schreibt man das Differentialgleichungssystem auch als

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(\mathbf{x}). \quad (1.2)$$

Dabei steht \mathbf{x} für ein n -Tupel der Variablen und es soll dadurch nicht unterstellt werden, dass es sich dabei um das mathematische Objekt eines Vektors handeln muss. Man bezeichnet den von den Variablen \mathbf{x} aufgespannten Raum als den **Phasenraum** und eine Lösung der Differentialgleichungen als **Phasenbahn** oder auch kurz als Bahn oder **Trajektorie**. Solch ein Phasenraum ist in der Regel eine **Mannigfaltigkeit**, also lokal ein n -dimensionaler Vektorraum. In jedem Punkt \mathbf{x} des Phasenraumes ist der Tangentialvektor einer Phasenbahn durch \mathbf{v} gegeben, die Vektoren $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ bilden ein **Vektorfeld** auf der Mannigfaltigkeit, ihre Richtungen ein **Richtungsfeld**.

Die Geschwindigkeiten $v_j(x_1, \dots, x_n)$ sind im Allgemeinen **nichtlineare** Funktionen, was in aller Regel zu einem sehr reichhaltigen dynamischen Verhalten führt. Man findet dabei die unterschiedlichsten Strukturen wie beispielsweise Fixpunkte, Grenzzyklen, chaotische Bahnen

und seltsame Attraktoren. Eine Übersicht über die Bahnen eines Systems bezeichnet man als ein **Phasenportrait**.

Von großer Bedeutung sind die Punkte \mathbf{x}_s des Phasenraums mit $\mathbf{v}(\mathbf{x}_s) = 0$, die sich also zeitlich nicht ändern. Sie haben viele Namen, wie beispielsweise **singuläre Punkte**, **stationäre Punkte**, **Gleichgewichtspunkte** oder **Fixpunkte**. Wir werden das Verhalten in der Umgebung dieser stationären Punkte genauer analysieren.

Eine Grundvoraussetzung für eine Untersuchung solcher dynamischer Systeme ist eine gute Kenntnis der einfachsten Modellsysteme dieser Art, nämlich **linearer Systeme**

$$\dot{x}_j = \sum_{k=1}^n a_{jk} x_k, \quad j = 1, \dots, n. \quad (1.3)$$

Hier ist $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$ ein Vektor und wir können die Gleichungen in Matrixform $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ zusammenfassen mit der Matrix $\mathbf{A} = (a_{jk})$. Solche Gleichungen erhält man beispielsweise dann, wenn man das nichtlineare System (1.1) in der Nähe eines stationären Punktes \mathbf{x}_s mit $v_j(\mathbf{x}_s) = 0$ betrachtet. Entwickelt man die $v_j(\mathbf{x})$ um diesen stationären Punkt und verschiebt ihn in den Koordinatennullpunkt, so erhält man die Gleichungen (1.1) mit $a_{jk} = \partial v_j / \partial x_k |_{\mathbf{x}_s}$.

Im einfachsten Fall einer einzigen Variablen kann die nichtlineare Differentialgleichung

$$\dot{x} = f(x) \quad (1.4)$$

durch $t - t_0 = \int_{x_0}^x f^{-1}(x') dx'$ gelöst werden. In der Umgebung eines stationären Punktes x_s mit $\dot{x} = f(x_s) = 0$ ist das Verhalten der linearisierten Gleichung $\dot{x} = a(x - x_s)$ mit $a = f'(x_s)$ sehr übersichtlich: Die Lösung $x(t) = x_s + x_0 e^{a(t-t_0)}$ nähert sich für $a < 0$ dem stationären Punkt x_s , für $a > 0$ entfernt sie sich davon. Der stationäre Punkt ist dann **stabil** oder **instabil**.

Schon für zwei Variablen ist das Verhalten der linearen Differentialgleichungen

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

mit den Anfangsbedingungen $(x(0), y(0))^T = (x_0, y_0)^T$ zur Zeit $t_0 = 0$ merklich interessanter. Es sei daran erinnert, dass wir hier reelle Matrixelemente und Anfangsbedingungen annehmen wollen, und damit auch reelle Lösungen $x(t)$ und $y(t)$. Außerdem wollen wir hier den einfachen Fall zeitunabhängiger Matrixelemente betrachten. Mehr zu dem zeitabhängigen Fall findet man in Abschnitt 2.2.

Wir können eine Lösung der Differentialgleichungen (1.5) finden, indem wir die erste Differentialgleichung ein zweites Mal nach der Zeit differenzieren und dann die Variable $y(t)$ mithilfe der zweiten Gleichung eliminieren. Das führt dann zu einer Differentialgleichung zweiter Ordnung wie bei dem gedämpften harmonischen Oszillator in Abschnitt 1.3. Hier wollen wir aber bei der Matrixdarstellung

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (1.6)$$

bleiben. Einfache Lösungen dieser Differentialgleichung findet man mithilfe des Separationsansatzes

$$\mathbf{x}(t) = e^{\lambda t} \mathbf{u} \quad (1.7)$$

mit einem zeitlich konstanten Vektor \mathbf{u} . Die Zeitableitung ergibt $\dot{\mathbf{x}} = \lambda \mathbf{x}$ und Einsetzen in (1.6) führt auf

$$\lambda e^{\lambda t} \mathbf{u} = e^{\lambda t} \mathbf{A}\mathbf{u} \quad \text{oder} \quad \mathbf{A}\mathbf{u} = \lambda \mathbf{u}. \quad (1.8)$$

Der Vektor \mathbf{u} ist also **Eigenvektor** der Matrix \mathbf{A} mit dem **Eigenwert** λ . Man erhält einen solchen Eigenwert durch die Lösung der **charakteristischen Gleichung**

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0 \quad (1.9)$$

(vgl. M2, Gleichung (1.53)). Die Eigenwerte λ_j der Matrix \mathbf{A} und die zugehörigen Eigenvektoren \mathbf{u}_j , also vom Nullvektor verschiedene Vektoren mit $\mathbf{A}\mathbf{u}_j = \lambda_j\mathbf{u}_j$, sind sehr wichtig für ein Verständnis der Dynamik des Systems. Man sieht sofort, dass jedes Vielfache eines Eigenvektors auch diese Bedingung erfüllt, es gibt also einen **Eigenraum** zu jedem Eigenwert. Mit der Zeit variiert ein Eigenvektor wie

$$\mathbf{u}_j(t) = e^{\lambda_j t} \mathbf{u}_j, \quad (1.10)$$

was man sofort durch Einsetzen in die Differentialgleichung (1.6) sieht. Der Vektor bleibt also immer in diesem Eigenraum.

Für unsere 2×2 -Matrix gibt es entweder zwei verschiedene Eigenvektoren, nennen wir sie \mathbf{u}_\pm mit den Eigenwerten λ_\pm , oder nur einen einzigen Eigenvektor \mathbf{u} mit dem Eigenwert λ . Im ersten Fall ist der Rang der Matrix \mathbf{A} gleich zwei und die Eigenvektoren bilden eine Basis. Die Matrix ist dann diagonalisierbar. Im zweiten Fall ist der Rang der Matrix gleich eins und die Matrix ist nicht diagonalisierbar.

Ein allgemeinerer Lösungsansatz der Dynamik des Systems (1.6) formuliert die Bewegungsgleichung in der Matrixform

$$\frac{d\mathbf{U}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{U}, \quad (1.11)$$

für die **Zeitentwicklungsmatrix** $\mathbf{U}(t)$, die zur Anfangszeit $t_0 = 0$ gleich der Einheitsmatrix ist: $\mathbf{U}(0) = \mathbf{I}$. Damit erhält man durch

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{U}(t)\mathbf{x}_0 \quad (1.12)$$

die Lösung für jede Anfangsbedingung \mathbf{x}_0 . Die Lösung des linearen Gleichungssystems (1.11) ist die Exponentialfunktion

$$\mathbf{U}(t) = e^{\mathbf{A}t} \quad (1.13)$$

deren explizite Form als 2×2 -Matrix wir hier nicht angeben wollen. Man findet sie für den harmonischen Oszillator in Abschnitt 1.3, oder allgemeiner in M2, Abschnitt 2.2.

■ 1.2 Fixpunkte und Phasenportraits

Das lineare System $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ aus Gleichung (1.6) besitzt als stationären Punkt, also als Fixpunkt, den Nullpunkt $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Das ist der einzige Fixpunkt, wenn \mathbf{A} invertierbar ist, also für $\det \mathbf{A} \neq 0$. Andernfalls kann es mehr Lösungen geben, nämlich alle Vektoren mit $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$, die Vektoren aus dem **Kern** von \mathbf{A} . Wenn \mathbf{A} die Nullmatrix ist, wäre das der gesamte Raum, andernfalls ein eindimensionaler Teilraum, der Eigenraum zum Eigenwert $\lambda = 0$. Derartige Fixpunkte nennt man **nicht-isoliert**, denn in jeder Umgebung eines solchen Punktes liegt ein weiterer Fixpunkt. Im Folgenden werden wir für alle Typen von Fixpunkten die zugehörigen Phasenportraits genauer beschreiben.

Das dynamische Verhalten der Lösungen hängt sicherlich nicht von dem verwendeten Koordinatensystem ab, sondern von Größen, die bei Transformationen des Koordinatensystems,

also Ähnlichkeitstransformationen, invariant bleiben (vgl. M2, Kapitel 4). Das ist der Spur der Matrix \mathbf{A} , also die Summe der Eigenwerte, und die Determinante, also das Produkt der Eigenwerte:

$$\begin{aligned}\tau &= \text{spur}\mathbf{A} = a + d = \lambda_+ + \lambda_-, \\ \Delta &= \det\mathbf{A} = ab - cd = \lambda_+ \lambda_-\end{aligned}\tag{1.14}$$

und natürlich die Eigenwerte

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2}(\tau \pm \sqrt{\tau^2 - 4\Delta})\tag{1.15}$$

selbst. Da \mathbf{A} reell ist, sind Spur und Determinante reell und die Eigenwerte sind entweder beide reell oder bilden ein komplex konjugiertes Paar.

Um die Dynamik des Systems zu verstehen, muss man zunächst alle möglichen unterschiedlichen Typen von Eigenwerten klassifizieren.

Fall I: \mathbf{A} ist diagonalisierbar.

Bringt man die Matrix durch eine Ähnlichkeitstransformation auf Diagonalform $\begin{pmatrix} \lambda_- & 0 \\ 0 & \lambda_+ \end{pmatrix}$, dann liegen die beiden Eigenvektoren in den Koordinatenrichtungen. Es gibt vier Möglichkeiten:

Fall Ia: Eigenwerte reell und $\det\mathbf{A} > 0$.

Dann haben die Eigenwerte gleiche Vorzeichen und wir finden ein Verhalten wie in Bild 1.1 für $\lambda_- = -2$, $\lambda_+ = -1$ illustriert, ein sogenannter **stabiler Knoten**. Die Bahnen nähern sich im Langzeitlimit dem Fixpunkt in der Eigenrichtung des Eigenwertes mit dem kleinsten Betrag des Eigenwertes, also der langsamsten Richtung. In dem dargestellten Fall verläuft die Bewegung in der y -Richtung schneller als die in der x -Richtung, da $|\lambda_-| > |\lambda_+|$. Wenn beide Eigenwerte negativ und gleich sind, so bewegt sich jeder Punkt radial zum Zentrum, ein **stabiler Stern**, wie im rechten Bild. Sind beide Eigenwerte positiv, dann kehrt sich das Zeitverhalten um, und die Bahnen entfernen sich vom Fixpunkt. Wir haben einen **instabilen Knoten** bzw. einen **instabilen Stern**.

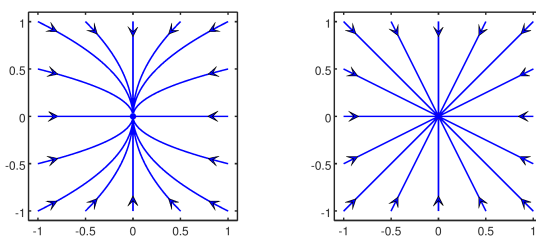


Bild 1.1 Stabiler Knoten (links) und stabiler Stern (rechts).

Fall Ib: Eigenwerte reell und $\det\mathbf{A} < 0$.

Die Eigenwerte haben unterschiedliches Vorzeichen. In einer Eigenrichtung finden wir dann eine Bewegung zum Fixpunkt hin, in der anderen von ihm weg. Wir haben einen **Sattelpunkt**, wie links in Bild 1.2 für $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ mit den Eigenwerten $\lambda_{\pm} = \pm 1$ und den Eigenvektoren $\mathbf{u}_{\pm} = (1, \pm 1)^T$.

Fall Ic: Eigenwerte reell und $\det\mathbf{A} = 0$.

Dann ist einer der beiden Eigenwerte gleich null und damit der Kern von \mathbf{A} nicht nur der Nullvektor. Das rechte Bild 1.2 zeigt ein Phasenportrait für $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Hier besteht

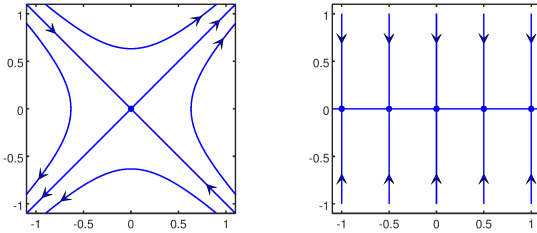


Bild 1.2 Sattelpunkt (links) und nicht-isolierte Fixpunkte auf der x -Achse (rechts).

die gesamte x -Achse aus (nicht-isolierten) Fixpunkten und alle Punkte nähern sich im Langzeitlimit dieser Achse.

Fall I d: Eigenwerte konjugiert komplex.

Dieser Fall mit

$$\lambda_{\pm} = \gamma \pm i\omega \quad , \quad \gamma, \omega \in \mathbb{R} \tag{1.16}$$

tritt ein für $\tau^2 - 4\Delta < 0$. Dann ist die allgemeine Lösung

$$\mathbf{x}(t) = c_+ e^{\lambda_+ t} \mathbf{u}_+ + c_- e^{\lambda_- t} \mathbf{u}_- \tag{1.17}$$

ein komplexer Vektor. Wir suchen aber eine reelle Lösung. Da unsere Differentialgleichung $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ linear ist, ist mit $\mathbf{x}(t)$ auch $\mathbf{x}^*(t)$ eine Lösung und wir können reelle Linearkombinationen konstruieren. Das lässt sich in übersichtlicher Weise formulieren, indem man die Diagonalfom $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \lambda_- & 0 \\ 0 & \lambda_+ \end{pmatrix}$ mithilfe der Ähnlichkeitstransformation $\mathbf{S} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$ auf eine reelle Form transformiert:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}' &= \mathbf{S}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{S} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_- & 0 \\ 0 & \lambda_+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_- & i\lambda_- \\ i\lambda_+ & \lambda_+ \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \lambda_- + \lambda_+ & i\lambda_- - i\lambda_+ \\ -i\lambda_- + i\lambda_+ & \lambda_- + \lambda_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \omega \\ -\omega & \gamma \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{1.18}$$

Dann lauten die Bewegungsgleichungen in den Koordinaten $\mathbf{x}' = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{x}$

$$\begin{aligned} \dot{x}' &= \gamma x' + \omega y' , \\ \dot{y}' &= -\omega x' + \gamma y' , \end{aligned} \tag{1.19}$$

die man in Polarkoordinaten

$$x' = r \cos \varphi , \quad y' = r \sin \varphi \tag{1.20}$$

entkoppeln kann als

$$\dot{r} = \gamma r , \quad \dot{\varphi} = -\omega \tag{1.21}$$

mit den Lösungen

$$r(t) = r_0 e^{\gamma t} , \quad \varphi(t) = \varphi_0 - \omega t. \tag{1.22}$$

Das ist eine Rotation mit Winkelgeschwindigkeit ω , deren Entfernung vom Koordinatennullpunkt exponentiell abnimmt (für $\gamma < 0$), zunimmt (für $\gamma > 0$) oder konstant bleibt (für $\gamma = 0$). Im ersten Fall ist das ein **stabiler Fokus**, eine **Senke** des Vektorfeldes, wie in links in Bild 1.3 dargestellt, im zweiten Fall ein **instabiler Fokus**, eine **Quelle** des Vektorfeldes, und im letzten Fall ein **Zentrum** wie im rechten Bild.

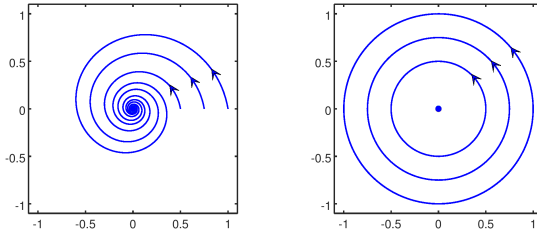


Bild 1.3 Stabiler Fokus (links) und Zentrum (rechts).

Fall II: A ist nicht diagonalisierbar.

Dann lässt sich die Matrix durch eine Ähnlichkeitstransformation auf die Jordan-Form

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \tag{1.23}$$

bringen (vgl. M2, Abschnitt 2.1.3). Dabei ist λ der einzige Eigenwert mit dem einzigen Eigenvektor $\mathbf{u} = (1, 0)^T$. Bild 1.4 zeigt den Fluss für $\lambda = -0.5$. Dies ist ein stabiler **degenerierter Knoten**. Alle Bahnen nähern sich dem Koordinatennullpunkt tangential zur Richtung des Eigenvektors, hier die x -Achse. Für $\lambda = 0$ besteht die gesamte x -Achse aus (nicht-isolierten) Fixpunkten, ähnlich zu dem Fall in Bild 1.2 für eine diagonalisierbare Matrix mit einem Eigenwert $\lambda = 0$. Das Verhalten ist hier jedoch anders: Es gibt keine Bahnen, die gegen die Fixpunkte konvergieren. Alle Trajektorien verlaufen parallel zur x -Achse mit einer Geschwindigkeit, die proportional zur y -Komponente anwächst. Alle Bahnen der Abbildung wurden mit $x_0 = 0$ gestartet und jeweils um das gleiche Zeitintervall propagiert.

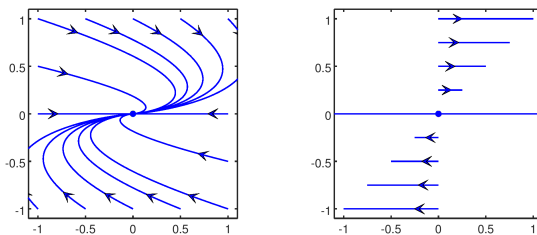


Bild 1.4 Degenerierter stabiler Knoten (links) und nicht-isolierte Fixpunkte (rechts).

Zur Übung der Fixpunktklassifikation die folgende Aufgabe:

Aufgabe 1.1 (Lös. Seite 27): Von welchem Typ sind die Fixpunkte der Matrizen $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$?

Zusammenfassend ist die Klassifikation der Fixpunkte in Bild 1.5 in der (Δ, τ) -Ebene dargestellt. Innerhalb der nach rechts geöffneten Parabel $\tau^2 - 4\Delta = 0$ sind die stationären Punkte Fokus-Punkte, stabil für $\tau < 0$, instabil für $\tau > 0$, und Zentren für $\tau = 0$. Unterhalb und oberhalb der Parabel ergeben sich stabile und instabile Knoten, und in der Halbebene $\Delta < 0$ finden wir Sattelpunkte. Die verschiedenen Fixpunkttypen gehen auf den kritischen Kurven ineinander über. Hier haben wir drei solche Kurven:

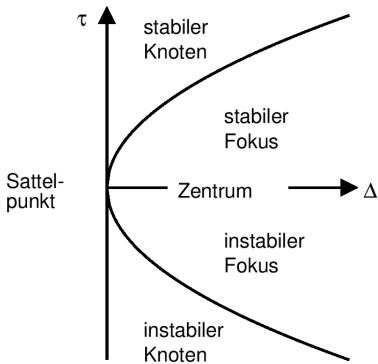


Bild 1.5 Klassifikation stationärer Punkte in Abhängigkeit von Spur τ und Determinante Δ der Matrix \mathbf{A} . Auf der Parabel $\tau^2 - 4\Delta = 0$ findet man degenerierte Knoten und auf der Geraden $\Delta = 0$ nicht-isolierte stationäre Punkte.

- (a) Wenn man bei einer Parametervariation die ($\Delta=0$)-Achse von der linken Seite her kreuzt, dann gehen zwei reelle Fixpunkte verschiedenen Vorzeichens in zwei reelle gleichen Vorzeichens über. Auf der kritischen Geraden ist also einer der Fixpunkte gleich null. Dort finden wir nicht-isolierte Fixpunkte wie rechts in Bild 1.2 dargestellt.
- (b) Kreuzt man die kritische Parabel $\tau^2 - 4\Delta = 0$ von außen nach innen, dann nähern sich zwei reelle Eigenwerte, treffen sich und gehen in ein konjugiert komplexes Paar über. Auf der Parabel selbst ist die Matrix nicht diagonalisierbar und hat nur einen einzigen Eigenwert. Bei diesem Übergang verwandelt sich ein Knoten über einen degenerierten Knoten (vgl. Bild 1.4) in einen Fokus-Punkt.
- (c) Auf der Achse $\tau = 0$ mit $\Delta > 0$ finden wir zwei rein imaginäre Eigenwerte und wir haben ein Zentrum (vgl. das rechte Bild in Bild 1.3). Bei einer Parametervariation, die diese Achse kreuzt, geht ein stabiler Fokus in einen instabilen über.

Von den drei beschriebenen kritischen Fällen trifft man am häufigsten auf den Fall (c), also auf Zentren. Sie treten beispielsweise in reibungsfreien mechanischen Systemen auf.

■ 1.3 Der harmonische Oszillator

Der angetriebene gedämpfte harmonische Oszillator ist eines der elementaren Modellsysteme der klassischen Physik. Die Bewegungsgleichung lautet

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t) \quad (1.24)$$

mit der Dämpfungskonstanten γ und der Frequenz ω_0 der ungedämpften Schwingung. Der zeitabhängige Antrieb $f(t)$ ist im einfachsten Fall eine monofrequente periodische Funktion $f(t) = f_0 \cos \Omega t$.

Gleichung (1.24) ist eine Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Sie lässt sich in zwei gekoppelte Differentialgleichungen erster Ordnung umschreiben, indem man die Geschwindigkeit $v = \dot{x}$ als zweite Veränderliche neben x einführt. Dann erhält man

$$\dot{x} = v \quad , \quad \dot{v} = -\omega_0^2 x - 2\gamma v + f(t). \quad (1.25)$$

In vektorieller Form lautet das

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -2\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}, \quad (1.26)$$

oder einfacher

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{f}(t) \quad (1.27)$$

mit $\mathbf{x} = (x, v)^T$, $\mathbf{f}(t) = (0, f(t))^T$ und der Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -2\gamma \end{pmatrix}. \quad (1.28)$$

Im einfachsten Fall haben wir keinen äußeren Antrieb, $f(t) = 0$, und die Bewegungsgleichung vereinfacht sich zu der homogenen Differentialgleichung $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ aus Gleichung (1.6), die wir oben untersucht haben (vgl. Seite 12 und folgende). Den angetriebenen Fall werden wir in Abschnitt 2.2 betrachten.

Die Eigenwerte der Matrix \mathbf{A} sind gleich

$$\lambda_{\pm} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}. \quad (1.29)$$

Es lassen sich drei Fälle unterscheiden:

- (a) Für schwache Dämpfung ($\gamma < \omega_0$), im **Schwingfall**, ist der Term unter der Wurzel negativ und wir schreiben zweckmäßigerweise

$$\lambda_{\pm} = -\gamma \pm i\omega, \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}. \quad (1.30)$$

Die Eigenfunktionen fallen also zeitlich ab wie $e^{-\gamma t}$ und oszillieren mit der Frequenz ω .

- (b) Für starke Dämpfung ($\gamma > \omega_0$) sind die Eigenwerte reell und beide Lösungen fallen exponentiell ab, am langsamsten die zum Eigenwert λ_+ .
- (c) Für die kritische Dämpfung ($\gamma = \omega_0$) entarten die Eigenwerte, $\lambda_+ = \lambda_-$, und auch die beiden zugehörigen Eigenvektoren stimmen überein.

Die reelle Matrix \mathbf{A} aus Gleichung (1.28) ist nicht-symmetrisch. Wenn dann λ_n ihr Eigenwert ist, dann ist λ_n^* ein Eigenwert der hermitesch konjugierten Matrix \mathbf{A}^\dagger , ihre Eigenvektoren sind aber verschieden. Man unterscheidet dann zwischen **rechten Eigenvektoren** \mathbf{x}_n (denen von \mathbf{A}) und **linken Eigenvektoren** \mathbf{y}_n (denen von \mathbf{A}^T). Es lässt sich leicht zeigen, dass die rechten und linken Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten orthogonal sind. (Mehr dazu in M2, Abschnitt 1.3.2.) Eine solche biorthogonale Basis ist zweckmäßig bei konkreten Berechnungen. Man normiert dann die Basisvektoren wie

$$\mathbf{y}_n^\dagger \mathbf{x}_m = \delta_{nm}. \quad (1.31)$$

Aufgabe 1.2 (Lös. Seite 28): Berechnen Sie die rechten und linken Eigenvektoren \mathbf{x}_{\pm} bzw. \mathbf{y}_{\pm} der Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -2\gamma \end{pmatrix}$ aus Gleichung (1.28) zu den Eigenwerten λ_{\pm} . Verifizieren Sie, dass sie orthogonal sind, $\mathbf{y}_-^\dagger \mathbf{x}_+ = \mathbf{y}_+ \cdot \mathbf{x}_- = 0$, und normieren Sie sie wie $\mathbf{y}_-^\dagger \mathbf{x}_- = \mathbf{y}_+^\dagger \mathbf{x}_+ = 1$.

Eine **allgemeine Lösung**, also eine Lösung $\mathbf{x}(t)$ für jede Anfangsbedingung $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$, lässt sich mit der Zeitentwicklungsmatrix $\mathbf{U}(t)$ aus (1.11) bequem als

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{U}(t) \mathbf{x}_0 \quad (1.32)$$

schreiben. Wir werden weiter unten sehen, wie man eine solche Matrixlösung in exponentieller Form $\mathbf{U}(t) = e^{\mathbf{A}t}$ (vgl. Gleichung (1.13)) konstruieren kann. Im Moment wollen wir einmal akzeptieren, dass

$$\mathbf{U}(t) = \frac{e^{-\gamma t}}{\omega} \begin{pmatrix} \omega_0 \sin(\omega t + \varphi) & \sin \omega t \\ -\omega_0^2 \sin \omega t & -\omega_0 \sin(\omega t - \varphi) \end{pmatrix} \quad (1.33)$$

mit $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ und $\sin \varphi = \omega / \omega_0$ eine solche Lösung darstellt.

Aufgabe 1.3 (Lös. Seite 28): Man kann die Lösung (1.33) natürlich durch Differenzieren überprüfen, beispielsweise für das Matrixelement U_{11} .

Hier haben wir zunächst den schwach gedämpften Fall $\gamma < \omega_0$ angenommen, den Schwingfall. Die Modifikationen für starke Dämpfung $\gamma > \omega_0$ ist

$$\mathbf{U}(t) = \frac{e^{-\gamma t}}{\tilde{\omega}} \begin{pmatrix} \omega_0 \sinh(\tilde{\omega} t + \tilde{\varphi}) & \sinh \tilde{\omega} t \\ -\omega_0^2 \sinh \tilde{\omega} t & -\omega_0 \sinh(\tilde{\omega} t - \tilde{\varphi}) \end{pmatrix} \quad (1.34)$$

mit $\tilde{\omega} = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$ und $\sinh \tilde{\varphi} = \tilde{\omega} / \omega_0$. Im Grenzfall kritischer Dämpfung, $\gamma = \omega_0$, liefern beide Gleichungen

$$\mathbf{U}(t) = e^{-\gamma t} \begin{pmatrix} 1 + \gamma t & t \\ -t & 1 - \gamma t \end{pmatrix}. \quad (1.35)$$

Im Folgenden wollen wir zeigen, wie man eine Matrixlösung wie (1.33) bestimmen kann. Wir leisten uns dabei den Luxus einer Verallgemeinerung und untersuchen die Differentialgleichung

$$\frac{d\mathbf{U}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{U} \quad \text{mit} \quad \mathbf{U}(0) = \mathbf{I} \quad (1.36)$$

für die allgemeine 2×2 -Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (1.37)$$

mit konstanten Koeffizienten. Die schon oben erwähnte Lösung ist $\mathbf{U}(t) = e^{\mathbf{A}t}$ mit der Matrixfunktion $e^{\mathbf{A}t}$, die man beispielsweise durch die Reihendarstellung der Exponentialfunktion

$$e^{\mathbf{A}t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \mathbf{A}^n \quad (1.38)$$

definieren kann, was natürlich wieder eine 2×2 -Matrix ergibt, nämlich

$$e^{\mathbf{A}t} = e^{\lambda_0 t} \left\{ \cosh \gamma_0 t \mathbf{I} + \frac{1}{\gamma_0} \sinh \gamma_0 t (\mathbf{A} - \lambda_0 \mathbf{I}) \right\}. \quad (1.39)$$

mit $\lambda_0 = (a + d)/2$ und $\gamma_0 = \sqrt{(a - d)^2/4 + bc}$. (Mehr darüber findet sich in M2, Kapitel 2.2; siehe insbesondere Gleichung (2.88).)

Die Zeitentwicklungsmatrix $\mathbf{U}(t)$ beschreibt den Fluss im Phasenraum, der durch das Vektorfeld $\mathbf{A}\mathbf{x}$ erzeugt wird. Für die Matrix \mathbf{A} aus (1.28) erhält man $\lambda_0 = -\gamma$ und $\gamma_0 = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$, also die oben angegebenen Lösungen (1.33) und (1.34).

Aufgabe 1.4 (Lös. Seite 28): Berechnen Sie explizit Determinante und Spur der Matrix $\mathbf{U}(t)$ aus (1.33). Wie lassen sich diese Ergebnisse direkt aus der Matrix A aus (1.28) ermitteln?

Die Zeitentwicklungsmatrizen $\mathbf{U}(t)$ zu einer Matrix A bilden eine kommutative Gruppe bezüglich der Matrixmultiplikation. Das erkennt man auf einfache Weise mithilfe der Darstellung $\mathbf{U}(t) = e^{At}$. Zunächst gehört wegen $\mathbf{I} = e^{A \cdot 0} = \mathbf{U}(0)$ die Einheitsmatrix zu dieser Menge und die Gleichungen

$$\mathbf{U}(t_2)\mathbf{U}(t_1) = e^{At_2}e^{At_1} = e^{A(t_2+t_1)} = \mathbf{U}(t_2+t_1) = \mathbf{U}(t_1)\mathbf{U}(t_2), \quad (1.40)$$

$$\mathbf{U}^{-1}(t) = e^{-At} = \mathbf{U}(-t) \quad (1.41)$$

zeigen, dass auch die Produkte und die Inversen dazugehören. Außerdem belegt die Formel für das Produkt die Kommutativität.

■ 1.4 Ein Ausflug in die Nichtlinearität

Eine wesentliche Eigenschaft der oben betrachteten Systeme ist ihre **Linearität**. Das erlaubt eine Analyse mit den Techniken der Linearen Algebra, schränkt aber andererseits ihre Anwendbarkeit zur Beschreibung interessanter physikalischer Systeme viel zu sehr ein. Im Rahmen dieses Buches können wir leider nur einen kurzen Ausflug in die Welt nichtlinearer Systeme unternehmen und beschränken uns dabei auf zweidimensionale autonome Systeme, die durch die Differentialgleichungen

$$\dot{x} = f(x, y) \quad , \quad \dot{y} = g(x, y) \quad (1.42)$$

beschrieben werden, die also nicht explizit von der Zeit abhängen. Mit $\mathbf{x} = (x, y)^T$ für den Punkt in der Phasenebene und der Geschwindigkeit $\mathbf{v} = (f, g)^T$, die wir als glatt, also beliebig oft differenzierbar, voraussetzen, schreiben wir dies wieder als $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(\mathbf{x})$. Solche zweidimensionalen Systeme sind vergleichsweise einfach zu verstehen, denn man kann zeigen, dass hier *keine* chaotische Dynamik auftreten kann.

Einen Überblick über das dynamische Verhalten liefert das Phasenportrait. Es wird wesentlich organisiert durch **Invarianten** der Dynamik, also Punktmenge, deren Punkte bei der Zeitentwicklung für alle Zeiten in dieser Menge verbleiben. Das sind hier Fixpunkte und geschlossene Bahnen, also **invariante Kurven**.

Zum besseren Verständnis ihrer Organisation im Phasenraum benötigen wir noch ein weiteres Charakteristikum, ihren **Index**. Wir betrachten dazu das Richtungsfeld auf einer einfach geschlossenen Kurve C im Phasenraum, also auf einer Kurve, die sich nicht selbst schneidet. Außerdem soll auf der Kurve kein Fixpunkt liegen. Wir betrachten in einem Punkt der Kurve einen Zeiger in Richtung des Richtungsfeldes und verfolgen diesen Zeiger bei einem vollständigen Umlauf des Punktes längs der Kurve entgegen dem Uhrzeigersinn. Der **Index** I_C der Kurve ist definiert als die Anzahl der Zeigerdrehungen, die **Windungszahl**, wieder gemessen entgegen dem Uhrzeigersinn. Unter dem **Index eines Fixpunktes** versteht man den Index ei-

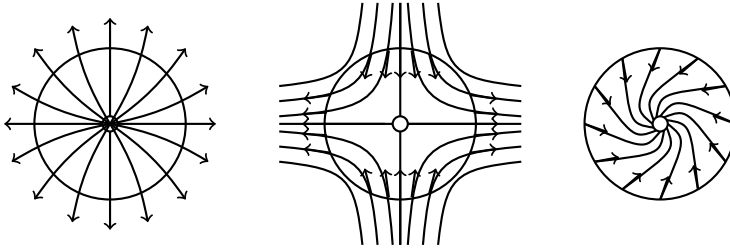


Bild 1.6 Index stationärer Punkte. Knoten (links) und Fokus (rechts) haben den Index +1, ein Sattelpunkt (Mitte) hat den Index -1.

ner geschlossenen Kurve, die ihn einschließt und keinen weiteren Fixpunkt. Hier einige der wichtigsten **Eigenschaften des Index**¹:

- (a) Nach einer kurzen Überlegung mit einem Blick auf Bild 1.6 erkennt man, dass der Index eines Fokus-Punktes und eines Knotens gleich +1 ist, der eines Sattelpunktes gleich -1.
- (b) Bei einer stetigen Deformation der Kurve C ohne Kreuzung eines Fixpunktes ändert sich der Index nicht, denn als ganzzahlige Größe kann sich der Index nicht stetig ändern.
- (c) Wenn die Kurve C keinen Fixpunkt umschließt, ist ihr Index gleich null, denn man kann nach (b) die Kurve stetig auf einen winzigen Punkt zusammenziehen. Dort ist das Feld konstant und die Windungszahl folglich null.
- (d) Umschließt die Kurve C eine endliche Anzahl isolierter Fixpunkte, ist ihr Index gleich der Summe der Indizes dieser Fixpunkte. Das lässt sich zeigen, indem man die Kurve stetig zusammenzieht, sodass sie nur noch die Fixpunkte umschließt sowie Hin- und Rückwege längs ihrer Verbindungslinien. Dann kompensieren sich die Beiträge dieser Verbindungslinien.
- (e) Wenn die geschlossene Kurve eine Bahnkurve ist, dann sind alle Geschwindigkeitsvektoren tangential zur Bahn gerichtet. Folglich dreht sich der Vektor genau wie der Bahnpunkt genau einmal und der Index ist gleich +1.

Wenn diese Betrachtungen der Indexfunktion zu anschaulich, also zu wenig „mathematisch“ erscheinen, dann könnte die folgende Aufgabe das ausgleichen:

Aufgabe 1.5 (Lös. Seite 29): Für das Vektorfeld der Differentialgleichungen (1.42) ist der Index einer einfachen Kurve C , die keinen Fixpunkt enthält, gleich

$$I_C = \frac{1}{2\pi} \oint_C \frac{f dg - g df}{f^2 + g^2}.$$

Beweisen Sie diese Integralformel und berechnen Sie für das Feld $f(x, y) = x \cos \alpha - y \sin \alpha$, $g(x, y) = x \sin \alpha - y \cos \alpha$ mithilfe der Integralformel den Index für einen Kreis, der den Nullpunkt umschließt.

¹ Sehr viel mehr zu diesem Thema findet man in dem Buch Arnold, V. I.: *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, Springer-Verlag 2001.

Index

- Abbildung
 - affine, 75
 - flächentreue, 27, 64
 - Katzen-, 27
 - lineare, 27
 - Poincaré, 27, 52
 - stroboskopische, 26
 - symplektische, 27
- ABCD-Gesetz, 137, 139, 144
- adiabatisch, 173, 232, 237, 268, 269
- adjungiert, 160, 162
- affine Abbildung, 75
- ähnlich, 42
- Ähnlichkeitstransformation, 14, 42, 215, 244, 251, 257
- akustischer Zweig, 36
- Alice und Bob, 300
- allgemeine Lösung, 32
- AND-Gatter, 295
- angetriebene Schwingung, 36
- Anosov-System, 72
- antihermites, 40
- Antikommutator, 160, 211, 223, 224, 271
- antilinear, 257
- Antiteilchen, 227
- aperiodischer Grenzfall, 281
- Arnold, Vladimir I., 68
- Astroid-Kurve, 285, 286
- Attraktor, 12, 77
- Automorphismus, 69
- autonomes System, 11, 20, 52
- axiale Vergrößerung, 132

- Baker-Campbell-Hausdorff-Relation, 255
- Bandlücke, 36, 97
- Basisdarstellung, 162, 212
- Bell-Zustand, 294, 295, 299, 300
- Berry, Michael V., 269
- Berry-Phase, 269, 272, 273

- Bildweite, 134
- Bilinearform, 64
- Billard-Abbildung, 52, 53
- Billard-System, 51, 144
- biorthogonal, 18, 165, 276
- bipartite Quantensysteme, 291
- Blindwiderstand, 84, 94, 95
- Bloch
 - -Band, 176, 202
 - -Bedingung, 207
 - -Funktion, 176
 - -Gleichung, 217–219, 221
 - -Kugel, 215, 219, 285, 296
 - -Theorem, 175
 - -Vektor, 214–216, 219, 297
 - -Welle, 176, 203
- Bloch, Felix, 175, 215
- Blockmatrix, 223–226, 236
- Bogenlänge, 51, 105, 109
- Bohigas-Giannoni-Schmit-Vermutung, 246
- Bonnet, Pierre Ossian, 109
- Bose-Hubbard-Dimer, 254, 291
- Brechungsgesetz, 129
- Brechungsmatrix, 129, 136
- Brennpunkt, 132–137, 143, 259
- Brennweite, 133, 135, 136
- Brewster-Platte, 147
- Brillouin, Léon Nicolas, 244
- Brillouin-Zone, 35, 176, 244, 246

- C-System, 72
- Cantor-Menge, 244
- chaotisch, 50, 61, 65, 66, 144, 233, 247
- chaotische Bahn, 53
- charakteristische Gleichung, 13, 32, 47, 57, 240, 242
- charakteristischer Exponent, 42, 243
- Christoffel, Elwin Bruno, 103
- Christoffel-Symbol, 103, 106, 109, 121, 125

- Clifford-Algebra, 224
 CNOT-Gatter, 298
 Collins-Integral, 139
 Concurrence, 294
- d'Alembert-Operator, 225
 Dämpfungsmaß, 93–95
 de Sitter, W., 122
 de-Sitter-Metrik, 123
 degenerierter Knoten, 16
 Delta
 – -Funktion, 42, 176, 194
 – -Kamm, 176, 200, 202, 203
 – -Potential, 194, 195, 199–202, 206, 207, 259
 Determinante & Spur, 39, 64
 Detuning, 240, 249
 Deutsch, David, 291
 diabatisch, 173, 232, 268, 269, 281
 diabolisch, 270, 272, 277, 278
 Dichtematrix, 212–214, 218, 220, 229
 Dichteoperator, 161, 212, 216
 Differentialgleichung, 11, 12, 20
 – hillsche, 36, 42, 176, 242
 – inhomogene, 36
 Dipol, 237, 246
 Dirac
 – -Algebra, 224
 – -Gleichung, 222, 223, 225
 – -Kamm, 202
 – -Matrix, 224
 – -Operator, 223, 225, 226
 Dirac, Paul, 222
 diskrete Abbildung, 67, 72, 80
 diskrete nichtlineare Schröd.-Gl., 283
 Diskriminante, 24, 28, 285
 Dispersionsrelation, 35, 36, 97, 176, 202, 207
 Divergenz, 62
 DNLS, 283
 Doppel-Delta-Potential, 199
 Doppelmuldenpotential, 167, 180, 259, 260
 Drehimpuls, 51, 122, 172, 222, 226, 238, 257
 Drehwellen-Näherung, 240
 Drei-Teilchen-System, 44, 50
 Dreieckschaltung, 90, 91
 Drosselkette, 97
 Dualraum, 159
- Duffing-Oszillator, 22, 25
 dynamische Phase, 250, 270
- Eigen
 – -frequenz, 33, 84, 85, 262
 – -funktion, 18, 165, 169, 274, 275
 – -raum, 13, 224, 278
 – -spinor, 224
 – -vektor, 13, 25, 32, 47, 57, 138, 141, 151, 161, 169, 184, 219, 227, 229
 – -wert, 138, 151
 – -zustand, 160, 161, 166, 169, 199, 226, 232, 247, 271
 Eigenwert-Statistik, 233
 Eingangsimpedanz, 92
 Einheitsoperator, 161, 166
 Einstein, Albert, 120
 Einstein-Podolsky-Rosen-Paradoxon, 295
 einsteinsche Feldgleichungen, 120, 122
 einsteinsche Summenkonvention, 118
 Einzugsbereich, 23, 25
 elastischer Stoß, 44
 Ellipse, 27, 63, 147, 259
 elliptischer Fixpunkt, 27, 54, 65
 Energie-Impuls-Tensor, 120
 Energieerhaltung, 23, 45, 64, 293
 Energiespektrum, 167, 174, 233
 Entartung, 220, 234, 235, 270, 271, 274, 278
 Entropie, 72, 161, 213, 247
 EPR-Paradoxon, 295
 EPR-Zustand, 295, 300
 Ereignis, 116, 119
 ergodisch, 72, 74
 Erhaltungsgröße, 23, 45, 51, 63, 122, 161, 190, 227
 Erwartungswert, 160, 186, 212
 Erzeugungsoperator, 166, 254
 euklidischer Raum, 122
 Euler-Charakteristik, 109, 112, 286
 Exponentialdarstellung, 119, 213
 – der Spinmatrizen, 212
 Exponentialfunktion
 – Matrix-, 38
 Exponentialverteilung, 234, 248
 exzeptioneller Punkt, 96, 220, 258, 262, 275–280, 287

- exzeptionelles Zeitverhalten, 280, 281
- Faktorisierung, 301, 304
- Faraday-Rotator, 149–151
- Fehlerfunktion, 185
- Fermi, Enrico, 55
- Fermi-Beschleunigung, 55
- Feshbach, Herman, 172
- Feshbach-Resonanz, 172, 182, 183
- Feynman, Richard, 225
- Fixpunkt, 11–14, 16, 20, 22–25, 30, 65, 66, 68, 80, 143, 288
 - elliptischer, 27, 54, 65
 - hyperbolischer, 27, 54, 65, 70, 72
- Flächenerhaltung, 62
- Flächenbedingung, 250
- flächentreu, 27, 52, 64, 68, 69, 79
- Floquet
 - -Matrix, 42, 43
 - -Operator, 243, 247
 - -Theorie, 242
 - -Zustand, 243, 249
- Floquet, Achille Marie Gaston, 242
- Fokus, 15, 16, 23, 26, 30
- fokussierend, 132, 133, 135
- Fouriertransformation, 301, 304
- Fraktal, 75, 77
- Fraktaldimension, 75, 77
- Fresnel-Näherung, 139
- Fundamentalmatrix, 38
- Fundamentalsystem, 174, 203
- g-Parameter, 142
- Galilei
 - -Gruppe, 114, 116
 - -Transformation, 114, 116
- Galilei, Galileo, 114
- Gatter, 295
 - $\pi/8$ -, 296
 - AND-, 295
 - CNOT-, 298
 - Hadamard-, 296, 297, 299, 300, 303
 - NAND-, 295
 - NOT-, 295, 296
 - OR-, 295
 - Pauli-, 296
 - Phasen-, 296
 - reversibles, 295
 - SWAP-, 298
 - universelles, 295, 304
 - XOR-, 295
- Gauß
 - -Funktion, 139, 166
 - -Klammer, 48
 - -Mode, 144, 145
 - -Strahl, 138, 140
- Gauß, Carl Friedrich, 109
- Gauß-Bonnet
 - Satz von, 109
- gaußsche Krümmung, 107, 112, 125
- gaußsches
 - orthogonales Ensemble, 234
 - symplektisches Ensemble, 236
 - unitäres Ensemble, 236
- Gegenstandsweite, 134
- gekicktes System, 42, 67, 68
- gemischter Zustand, 161, 214
- Generator, 251
- Geodäte, 102–105, 112, 120
- geometrische Phase, 269, 270
- geschlossene Kurve, 20, 23, 25
- glatt, 20, 38, 101, 109
- GOE, 234, 235, 248
- Gradienten-Matrix, 272
- Gravitation, 120, 121
- Grenzyklus, 11, 26, 37
- Gross-Pitaevskii-Gleichung, 283
- Grundmode, 144
- Gruppe, 20, 119
 - Galilei-, 114, 116
 - Lorentz-, 116
 - pseudounitäre, 191
- Gruppengeschwindigkeit, 35
- GSE, 235
- GUE, 235
- Hadamard-Gatter, 296, 297, 299, 300, 303
- Hamilton
 - -Dynamik, 51, 52
 - -Funktion, 62, 63, 67, 120, 160, 284
 - -Matrix, 40, 217, 218, 232, 239, 257, 270, 274, 279, 284

- -Operator, 160, 174, 216, 222, 227, 231–233, 235–246, 249–256, 269, 276, 291, 292
- Hamilton, William Rowan, 61
- hamiltonsche Bewegungsgleichung, 61, 62
- hamiltonsche Mechanik, 61
- harmonischer Oszillator, 17, 36, 165
- Hauptebene, 133, 136, 137
- Hausdorff, Felix, 75
- Hausdorff-Dimension, 75
- Heisenberg, Werner K., 161
- Helizität, 226, 227
- Hénon-Heiles-System, 65, 79
- Hermite-Funktion, 146
- Hermite-Polynom, 166
- hermitesch, 118, 160–162, 164, 172, 209, 218, 223, 232, 235, 243, 254–258, 260, 272, 284, 296
- Hesse-Matrix, 31, 286
- heterokliner Punkt, 72
- Hilbert, David, 159
- Hilbert-Raum, 159–163, 168, 214, 292, 298
- hillsche Differentialgleichung, 36, 42, 176, 242
- Hochpass, 95
- Hohlraumresonator, 141, 143, 155, 246
- Holonomie, 110, 114
- homöomorph, 109
- homokliner Punkt, 71
- Hong-Ou-Mandel-Effekt, 293
- Hopf, Eberhard F. E., 26
- Hopf-Bifurkation, 26
- Hyperbel, 27, 63, 65, 108, 117
- hyperbolischer Fixpunkt, 27, 54, 65, 70, 72
- Hyperboloid, 108, 122
- Hyperfläche, 122
- Hyperradius, 123

- Impedanz, 84, 85, 92
- Impulsoperator, 161
- indefinite Metrik, 122
- Index, 20, 23, 25
- inelastischer Stoß, 44, 49
- Inertialsystem, 114, 117, 120
- inhomogene Differentialgleichung, 36
- instabil, 12, 14–17, 23, 25–28, 54, 65, 66, 68, 71, 72, 172
- instantan, 44
- instantaner Eigenzustand, 270, 271
- integrables System, 248
- Invariante, 20
- invariante Kurve, 20, 53, 66
- Involution, 257
- Isometrie, 118

- Jacobi-Determinante, 235, 264
- Jacobi-Matrix, 24, 53
- Jones-Matrix, 147, 150, 151, 157
- Jones-Vektor, 146

- K-System, 72
- Kanal, 173, 190, 293
- Karte, 101
- Kastenpotential, 166, 196, 197, 205
- Katzen-Abbildung, 27, 68
 - diskrete, 72, 80
- Kegelschnitt, 63
- Kern, 13
- Kettenmatrix, 89, 92, 96, 99, 198
- Kirchhoff, Gustav Robert, 83
- Kirchhoff-Integral, 139
- kirchhoffsche Regeln, 83
- Klein-Gordon-Gleichung, 222, 225
- Knoten, 21, 25, 83, 91
 - degenerierter, 17
- Knotenregel, 83
- Koch, Helge von, 78
- Koch-Kurve, 78
- Kodimension, 234, 236
- kohärenter Zustand, 255
- kollineare Stöße, 44
- Kolmogorov-Entropie, 72
- Kommutator, 160, 166, 211, 216, 221, 226, 252, 257, 265
 - Spinmatrizen, 211
- komplexe Fortsetzung, 167, 173, 197
- komplexe Rotation, 173
- Kompositionsregel, 39, 41
- Kontinuumszustand, 173
- kontravariant, 101, 115, 118, 222, 225
- Kontroll-Qubit, 298, 305
- kosmologische Konstante, 120, 122
- kovariant, 101, 115, 118, 222

- kovariante Ableitung, 103–105, 110
 Krümmung, 121
 Krümmungsradius, 53
 Kreuzung, 246
 Kreuzungspunkt, 187
 Kriechfall, 281
 Kronecker-Produkt, 220
 Krümmung
 – gaußsche, 107, 109
 – geodätische, 105, 109, 111
 Krümmungsradius, 107, 140
 Krümmungsskalar, 120
 Kugeldreieck, 110
 Kugelwelle, 137, 140
 Kurvenkreuzung, 173, 182
- Lagrange
 – -Funktion, 119
 – -Gleichung, 102
 – -Multiplikator, 213
 – -Parameter, 284
 Laguerre-Funktion, 146
 Landau, Lew D., 269
 Landau-Zener-Übergang, 269, 281
 langsame Achse, 148
 längssymmetrisch, 92
 Laplace-Operator, 225
 Laserfeld, 248
 Lastimpedanz, 93
 laterale Vergrößerung, 132
 Laufzeitglied, 95
 LC-Kette, 97
 LC-Schwingkreis, 85
 Lebensdauer, 181, 276
 Leistungsanpassung, 92
 Leiteroperator, 166
 Leitwert, 84, 94
 Leitwertmatrix, 88
 lichtartig, 117
 Lichtgeschwindigkeit, 114–116, 121
 Lie, M. S., 251
 Lie-Algebra, 251, 253, 255
 Lie-Klammer, 63
 Lindblad-Gleichung, 218, 220
 Lindblad-Operator, 218
 lineare Abbildung, 75
 lineare Kette, 34
 lineare Polarisation, 146, 153
 linearer Raum, 32, 159
 linearisierte Abbildung, 12, 24, 27, 30, 53, 56, 65
 linker Eigenvektor, 18, 28, 165, 184, 276, 278
 Linsengleichung, 127, 134
 Linsensystem, 127, 137
 Logarithmus, Matrix-, 41
 logistische Gleichung, 24
 Lokalisierung, 247
 Lorentz
 – -Gruppe, 116, 119
 – -Invarianz, 117, 118
 – -Matrix, 119
 – -Transformation, 114–117, 119
 Lorentz, Hendrik Antoon, 114
 Lotka-Volterra-Modell, 23, 27
 LRC-Schwingkreis, 85, 86, 261
 Lyapunov-Exponent, 72
- Magnetfeld, 238, 246, 274
 Magnus-Entwicklung, 251
 Mandelbrot, Benoît, 75
 Mannigfaltigkeit, 11, 23, 25, 51, 71, 102, 104, 109, 110, 120, 286
 Maschenregel, 83
 Master-Gleichung, 217
 Mathieu-Gleichung, 42, 67, 243
 Matrix-Exponentiation, 63, 212
 Matrix-Logarithmus, 41
 Maxwell-Gleichung, 114, 261
 Mean-Field-Näherung, 284
 Membranschwingung, 274
 Meridionalstrahl, 127
 Messung, 93, 160, 294, 295, 300
 metastabiler Zustand, 172, 173
 Metrik, 102, 103, 105, 108, 109, 224
 – de-Sitter-, 123
 – indefinite, 118, 122
 – Minkowski-, 118, 122
 – Schwarzschild-, 121, 123
 metrischer Tensor, 102, 105, 120
 MgH, 173, 174, 183
 Minkowski
 – -Abstand, 117

- -Geometrie, 225
- -Metrik, 118, 122, 224
- -Raum, 107, 115, 118, 122, 222
- Minkowski, Hermann, 115
- mischend, 72
- Möbius-Band, 102
- Moiseyev, N., 172
- Multikommutator, 251

- Nächste-Nachbar-Abstände, 233, 236, 248
- NAND-Gatter, 295
- newtonsche Bewegungsgleichungen, 31
- nicht-hermitesch, 253–256, 261, 275, 281, 288
- nichtlineare Differentialgleichungen, 51, 253
- nichtlineare Quantendynamik, 283
- nichtlineare Schrödinger-Gleichung, 283
- nichtlinearer Oszillator, 22
- nichtlineares System, 12, 20, 22, 26
- nilpotent, 43
- Niveaure Kreuzung, 270, 277
- Norm, 159, 260, 293, 296
- Norm-Operator, 255
- Normalenvektor, 101–106
- Normalkoordinaten, 32, 33, 57
- NOT-Gatter, 295, 296

- Oberflächenintegral, 271
- Objekt-Bild-Beziehung, 132
- Observable, 159, 161, 218
- Operator, 159
- optische
 - Abbildung, 128
 - Achse, 127
 - Diode, 150
- optischer
 - Isolator, 150
 - Resonator, 141
 - Zweig, 36
- OR-Gatter, 295
- orientierbar, 102, 109
- orthogonale Transformation, 234
- orthonormal, 161, 166, 214, 292, 295, 301
- Ortsdarstellung, 162, 169
- Ortsoperator, 161
- Oszillator
 - Duffing-, 22, 25
 - harmonischer, 12, 17, 36–38, 85, 167, 169, 178, 240, 254, 259, 281, 282
 - nichtlinearer, 22
 - Swanson-, 254

- Parabel, 17, 63
- Parallelschaltung, 84, 88, 94
- Paralleltransport, 104, 106, 110, 113, 125, 273
- paraxial, 127, 128, 143
- Paritätsoperator, 257
- passiver Resonator, 141
- Pauli, Wolfgang, 210
- Pauli-Gatter, 296
- Pauli-Matrix, 210, 212, 224, 226, 296, 297
- periodische Bahn, 26, 53, 56, 60, 65, 66, 143, 155, 247
- periodisches Potential, 174, 203
- Phasen
 - -bahn, 11, 23, 25
 - -portrait, 12, 13, 20, 25, 26
 - -raum, 11, 19, 25, 247
 - bahn, 37, 62, 63
 - Gatter, 296
 - integral, 183
 - maß, 93, 97
 - raum, 51, 56, 61, 63, 64, 66
 - raumvolumen, 62, 178
 - sprung, 177, 183, 293
- Phasen-
 - portrait, 24
- Pi
 - -Achtel Gatter, 296
 - -Puls, 249
 - -Schaltung, 90, 91, 94
- plancksches Wirkungsquantum, 178
- Planspiegel, 130, 141
- Poincaré, Jules Henri, 64
- Poincaré-Abbildung, 27, 52, 64, 66
- Poincaré-Schnitt, 51, 52, 64, 66, 247
- Poisson-Klammer, 63
- Poisson-Verteilung, 234, 237, 248
- Polarisation, 146, 148, 149, 151, 153, 213, 214, 216
- Polarisationsvektor, 217
- Polarisator, 147
- Polarkoordinaten, 15, 79, 108, 121, 124, 286

- Populationsdynamik, 23, 25
 positiv definit, 31
 positiver Operator, 161
 Positron, 227
 Potential
 – -barriere, 167, 178, 189
 – -fläche, 173, 182, 187
 – -kette, 198
 – -mulde, 177, 181
 – -stufe, 195
 – periodisches, 174
 – rotations-symmetrisches, 172
 – Zentrifugal-, 172
 Prädissoziation, 173, 183
 Produktformel, 39, 215
 Produktzustand, 293, 294, 304
 Projektor, 161
 pseudoorthogonal, 119
 Pseudosphäre, 107
 pseudounitär, 191, 192
 PT-Dimer, 261
 PT-Symmetrie, 254, 256, 262, 281
- Quabla, 225
 quadratische Form, 63, 147
 Quanten
 – -Faktorisierung, 304
 – -Fouriertransformation, 301–304, 306
 – -Teleportation, 300
 – -chaos, 233
 – -computing, 291, 295, 301, 304
 – -gatter, 296, 300, 304
 Quantisierungsbedingung, 178, 181, 183, 206, 250
 Quantisierungsformel, 182
 Quasienergie, 243, 249
 Quasiimpuls, 176
 Quaternion, 225
 Qubit, 295, 297, 304, 305
 Quelle, 288
- Rabi-Frequenz, 241, 245, 249, 250
 Raleighlänge, 140
 Rang, 13
 Rapidität, 119
 Ratengleichung, 217
- Räuber-Beute-Modell, 23
 raumartig, 117
 Raumzeit, 114, 115, 120
 ray-tracing, 128
 rechter Eigenvektor, 18, 28, 184, 276, 278
 Referenzebene, 128, 132, 135, 139, 142
 Reflexionsmatrix, 130, 141
 Reflexionswahrscheinlichkeit, 180, 192
 Reihenschaltung, 88
 reiner Zustand, 161, 214
 Rekursion, 59, 166, 201
 Relativgeschwindigkeit, 45, 49
 Relativitätstheorie, 119, 120, 222, 226
 Residuum, 142
 Resonanz, 42, 238, 246
 – -bedingung, 182
 – -breite, 182
 – -energie, 167, 198
 – -frequenz, 85, 240
 – -zustand, 163, 167, 172, 173, 178, 181, 182, 193
 – Feshbach-, 172, 182, 183
 – Shape-, 172, 183
 reversibel, 295, 297, 300
 Ricci-Curbastro, Gregorio, 120
 Ricci-Skalar, 120
 Ricci-Tensor, 120
 Richtungsfeld, 11, 20
 riemannsche Fläche, 173, 278
 riemannsche Mannigfaltigkeit, 109
 riemannscher Raum, 122
 Rotating-Wave-Approximation, 240, 244
 RWA, 240, 244, 250
- Sägezahn-Schwingung, 56
 Sattelfläche, 107, 112
 Sattelpunkt, 14, 16, 21, 23, 25, 27, 30, 65, 79, 286, 287
 Satz von
 – Stokes, 271
 – Cayley-Hamilton, 258
 – Floquet, 176
 – Gauß-Bonnet, 109
 Satz von Cayley-Hamilton, 266
 Scheinwiderstand, 84
 schief-symmetrisch, 64

- schnelle Achse, 148
Schrödinger, Erwin, 160
Schrödinger-Gleichung, 160–163, 167, 170, 173, 177, 189, 202, 204, 242, 257, 261, 289
Schwarzschild
– -Metrik, 121, 123
– -Radius, 121
Schwarzschild, Karl, 121
Schwingfall, 18, 19, 281
Schwingkreis, 83–85, 261
Schwingungsgleichung, 31, 33, 85, 86, 106, 274, 281
selbstähnlich, 75, 77
Selbsterregung, 26
seltsamer Attraktor, 12
semiklassische Näherung, 174, 176–179, 191, 207
Senke, 15, 30, 288
Separationsansatz, 12, 146
Separatrix, 287
Shape-Resonanz, 172, 183
Sierpinski-Dreieck, 77
singuläre Matrix, 38, 41, 194
singulärer Punkt, 12
Singularität, 107, 123
Skalarprodukt, 28, 32, 159, 165, 210, 230
SN-Zerlegung, 280
Spektrum, 161, 237, 243, 246
Spiegelmatrix, 130
Spin, 209, 214, 222, 226, 238, 257, 274, 291, 294
Spin-Operator, 214, 226
Spinmatrix, 209, 212, 228, 272, 296
Spinor, 224
stabil, 12, 27
stabiler Knoten, 14, 16, 30
stabiler Stern, 14
Stabilitäts
– -bedingung, 54, 56, 65, 142, 146
– -bereich, 43, 143, 243
– -exponent, 70
– -index, 65
– -insel, 247
– -matrix, 60, 79, 142
– -winkel, 143
Standard-Abbildung, 68
Stark-Effekt, 246
stationärer Punkt, 12, 17, 21, 284
Stern-Dreieck-Transformation, 91, 94
Sternschaltung, 90, 91
Stoßdauer, 49
Strahlbreite, 140
Strahlparameter, 139, 144, 157
Strahlradius, 140, 145, 156
Streumatrix, 189, 192, 205
stroboskopische Abbildung, 26, 67, 247
Strogatz, S. H., 24
Stromdichte, 190, 204
strukturstabil, 72
su(1,1), 252, 266
su(2), 212, 252, 266
Summenkonvention, 102, 115, 222
Superpositionsprinzip, 160, 283
Swanson-Oszillator, 254
SWAP-Gatter, 298
Sylvester-Matrix, 285
Symmetrie, 32, 86, 146, 169, 193, 205, 234, 246
symplektisch, 27, 60, 62, 63, 65, 131, 143, 155, 192, 236
Systemmatrix, 128, 131, 136, 137, 141

T-Schaltung, 90, 94, 97
Tangentialebene, 101, 104
Tangentialraum, 102, 104, 124
Teilchenzahloperator, 166, 291
Teleportation, 300
Teleskop, 132, 136, 138
TEM-Mode, 146
Tensor, 103, 120
– metrischer, 102, 105, 120
– Ricci-, 120
– total antisymmetrischer, 211
Tesla, N., 101
Tessar-Objektiv, 136
Thomas-Präzession, 119
Tiefpass, 94
Torus, 66, 69, 71, 102, 109, 111
Trajektorie, 11, 16, 287
Transfermatrix, 179, 180, 189, 199, 200, 207
– verallgemeinerte, 191
Translation, 193
Translationsmatrix, 130, 136

- Transmissions
 – -matrix, 190
 – -resonanz, 197, 199, 201
 – -wahrscheinlichkeit, 153, 180, 192, 199, 201
 Transparenz, 193, 197, 199, 201
 transversale Mode, 145, 146
 Tschebyscheff
 – -Identität, 158
 – -Polynom, 48, 49, 59, 201
 Tschebyscheff, Pafnuti Lwowitsch, 48
 Tunnel
 – -effekt, 168, 170, 261
 – -frequenz, 171, 260
 – -integral, 180, 181
 Tunneleffekt, 172

 Überlappungsintegral, 168, 186
 Überlappungsmatrix, 163, 168
 Übertragungsmaß, 93, 94
 Übertragungsmatrix, 129, 130, 137
 übertragungssymmetrisch, 87
 Umkehrpunkt, 177, 207
 unitär, 40, 158, 160, 192, 236, 255, 293, 296, 299
 universell, 295, 304
 Unschärferelation, 160
 Untermannigfaltigkeit, 51, 122

 Variation, 102, 213, 250, 270, 274
 Vektorfeld, 11, 62, 104, 110
 Vektorisierung, 220
 Vektoroperator, 211
 Vergrößerung, 134, 138
 – axiale, 132
 – laterale, 132
 – Winkel-, 132
 Verknüpfungsmatrix, 179, 190
 Verlustfaktor, 151
 vermiedene Kreuzung, 231, 268, 277, 282
 Vernichtungsoperator, 166, 254, 291
 Verschiebungsrelation, 193, 199, 200
 Verschränkung, 294, 300
 Verstimmung, 240
 Verzögerungsplatte, 148, 151, 157
 Vielteilchen-Quantensystem, 283, 284
 Vierervektor, 115, 119, 120, 222, 224
 Vierpol, 83, 87, 92, 198

 Vierpolkette, 96

 Welle, 36, 96, 139, 146, 167, 172, 180, 189
 Wellen
 – -Operator, 225
 – -leiter, 261
 – -optik, 138
 – -paket, 35, 168
 – -widerstand, 93, 99
 – -zahl, 35, 97, 139, 145, 167, 189, 194
 Weltlinie, 120
 Wertebereich, 259
 Weyl, Hermann, 178
 weylsche Regel, 178, 247
 Widerstand, 84, 85, 90
 Widerstandsmatrix, 87, 92
 widerstandssymmetrisch, 87, 92
 Wigner-Dyson-Verteilung, 237
 Windungszahl, 20
 Winkelvergrößerung, 132
 Wirkdämpfungsglied, 94
 Wirkung, 119, 160, 177, 179, 181, 207
 Wirkwiderstand, 84
 WKB-Näherung, 177, 182
 Wronski-Determinante, 175, 191, 195, 204

 XOR-Gatter, 295

 Zeit
 – -ordnungsoperator, 238
 – -spiegelung, 257
 – -symmetrie, 242
 – -umkehr, 242, 257, 262
 zeitartig, 117
 Zeitentwicklungsmatrix, 13, 18, 20, 38, 39, 42, 239
 Zeitentwicklungsoperator, 160, 238, 250, 293
 zeitperiodisches System, 31, 68, 176, 239, 246
 Zener, Clarence M., 269
 Zentrum, 15, 16, 23
 Zerfallsrate, 172, 276
 zirkulare Polarisation, 146, 153
 Zufallsmatrix, 233, 237, 246
 Zweiniveausystem, 171, 231
 Zweitor, 87
 Zylinderfunktion, 282