HANSER

Leseprobe

zu

Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler

von Werner Helm et al.

Print-ISBN: 978-3-446-46913-6
E-Book-ISBN: 978-3-446-46937-2

Weitere Informationen und Bestellungen unter
https://www.hanser-kundencenter.de/fachbuch/artikel/978-3-446-46913-6
sowie im Buchhandel

Vorwort zur 3. Auflage

Für die vorliegende dritte Auflage wurde der gesamte Text kritisch durchgesehen und aktualisiert (wie beispielsweise der Einkommensteuertarif). Fehler wurden korrigiert, Ungenauigkeiten klargestellt und viele Anregungen von Studierenden eingearbeitet.

Auf plus.hanser-fachbuch.de finden Sie umfangreiches Zusatzmaterial, beispielsweise ein Zusatzkapitel über Differenzialgleichungen. Auch sind dort die Lösungen zu allen Aufgaben vorhanden. Ebenso zahlreiche Excel-Dateien zur Finanzmathematik, mit denen die Lösungen der Aufgaben einfach und leicht ermittelt werden können.

Der vorliegende Band richtet sich speziell an Studierende der Wirtschaftswissenschaften im weitesten Sinne, an Berufsakademien, Hochschulen oder Universitäten und ist geeignet als vorlesungsbegleitendes Lehr- und Übungsbuch, kann aber auch wegen der Vielzahl von Beispielen und Aufgaben zum Selbststudium verwendet werden.

Die Autoren sind sich dessen bewusst, dass Studierende der Volks- und Betriebswirtschaft, der Wirtschaftsinformatik oder des Wirtschaftsingenieurwesens sowie verwandter Disziplinen eine fachgerichtete Aufbereitung der Mathematik – auch der Grundlagen der Mathematik – erwarten. Daher sind grundlegende Begriffe der Mathematik wie z. B. der der Funktion von einer oder mehreren Variablen oder der Begriff des Differenzials aus Sicht des Wirtschaftswissenschaftlers dargestellt und mit fachspezifischen Beispielen versehen. Ausführlich dargestellt ist das Thema betriebswirtschaftliche Kostenfunktionen. Insofern ist dieser Band in sich abgeschlossen und kann auch als umfassendes Mathematik-Lehrbuch für Studierende der Wirtschaftswissenschaften dienen. Die Autoren lassen ihre jahrelange vielfältige Lehrerfahrung in dieses Buch einfließen. Vom Schwierigkeitsgrad zielt das Buch auf die Mitte: Da, wo in den Vorlesungen eine abstraktere Sicht auf die Mathematik betont wird, kann das Buch bei der unverzichtbaren praktischen Umsetzung helfen (Learning by Doing). An anderen Hochschulen mit einem geringen Stundenumfang in Mathematik kann das Buch als Universalreferenz dienen, deckt es doch einen sehr breiten Bereich an Inhalten ab, die auch für Lehrveranstaltungen relevant sind, die nicht die Bezeichnung Mathematik im Titel tragen, wie Kostenrechnung, Finanzierung oder Operations Research.

Das Vorgängerwerk *Lehr- und Übungsbuch MATHEMATIK in Wirtschaft und Finanzwesen* wurde gründlich überarbeitet, aktualisiert und an die Rahmenbedingungen der heutigen Bachelor-Studiengänge angepasst. Es bietet die **grundlegende Wirtschaftsmathematik komplett in einem Band**, geht an einigen Stellen leicht darüber hinaus und bildet Brücken aus zur praktischen Verwendung mathematischer Methoden auch in höheren Semestern. Ob Kostenfunktionen, Kundenwanderung, Lineare oder Nichtlineare Optimierung, Projektplanung oder Netzplantechnik – mit und ohne Computer – das Buch ist aus der Sicht der Nutzer und Anwender entwickelt, ohne dabei die mathematische Substanz zu opfern. Die kompakte und trotzdem vollständige Darstellung der klassischen Finanzmathematik vom Autor des in der sechsten Auflage erschienenen Buches *Finanzmathematik – Lehrbuch für Studium und Praxis* enthält zahlreiche Anwendungsbeispiele.

In den ersten fünf Kapiteln werden die Grundlagen der Mathematik für Volks- und Betriebswirte dargestellt und anhand von ökonomischen Problemen in einem praxisorientierten Zusammenhang erläutert. Dazu zählen Funktionen, Differenzial- und Integralrechnung und Lineare Algebra – Theorie eng verknüpft mit ökonomischen Anwendungen. Kapitel 6 enthält die Lineare Optimierung mit dem Simplex-Algorithmus. Kapitel 7 umfasst die gesamte klassische Finanzmathematik von der Zinsrechnung bis zu den Abschreibungsarten auf aktuellem Stand und führt heran an die Begriffe *Rendite*, *Risiko*, *Call* und *Put*. In Kapitel 8 werden in knapper Form weitere praktische Probleme und deren Lösungsmethoden dargestellt. Stichworte sind: Nichtlineare Programmierung, Optimierung eines Portfolios, Netzplantechnik (CPM, PERT) mit GANTT-Charts.

In allen Kapiteln enthalten sind viele praktische und zeitgemäße durchgerechnete Beispiele, die das Erlernen und Behalten der Begriffe wesentlich fördern. In vielen Fällen werden bei der Berechnung und Darstellung der Lösungen professionelle Softwaresysteme wie z. B. das System SAS verwendet. SAS gilt als die weltweit beste Analytics-Software, renommierte wie aufstrebende Fachbereiche *leisten* sich SAS. Damit wird eine Einführung in die Handhabung dieser auch in Wirtschaft und Industrie vielfach verwendeten Software gegeben. Das Buch enthält Hinweise auf Excel-Programme zur Finanzmathematik. Die zahlreichen Aufgaben, deren Lösungen am Ende des Buches zu finden sind, sollen dem Festigen der erworbenen Kenntnisse und natürlich auch der Prüfungsvorbereitung dienen.

Autoren und Verlag hoffen, auch mit diesem Buch den Studierenden ein wertvolles Studienmaterial bereitzustellen. Hinweise, Erfahrungen und Anregungen seitens der Studierenden und der Lehrenden nehmen die Autoren und der Verlag gern entgegen.

Wir bedanken uns bei allen, die Anregungen und Korrekturvorschläge zu den Vorauflagen gegeben haben. Auch über Hinweise und Bemerkungen zur neuen, dritten Auflage freuen wir uns.

Dezember 2020 Die Autoren

Inhaltsverzeichnis

1 Funktionen einer reellen Variablen in ökonomischen Problemen 13
1.1 Mathematische Grundbegriffe 13
1.1.1 Funktionsbegriff 13
1.1.2 Ein Funktionenreservoir 17
1.1.3 Eigenschaften von Funktionen 21
1.1.4 Umkehrfunktion 24
1.2 Funktionen für ökonomische Zusammenhänge 29
1.3 Funktionen und ökonomisches Wachstum 30
Aufgaben 1.1 bis 1.18 33

2 Differenzialrechnung für Funktionen einer reellen Variablen in ökonomischen Problemen 36
2.1 Einführung 36
2.2 Mathematische Grundlagen 37
2.2.1 Grenzwert 37
Aufgaben 2.1 bis 2.6 43
2.2.2 Stetigkeit 44
2.2.3 Ableitung 47
Aufgaben 2.7 bis 2.15 55
2.2.4 Differenzial 56
Aufgabe 2.16 60
2.2.5 Untersuchung von Funktionen mithilfe ihrer Ableitungen 60
Aufgaben 2.17 und 2.18 66
2.2.6 Nichtlineare Gleichungen in ökonomischen Problemen und deren Lösung . . 66
Aufgaben 2.19 und 2.20 70
2.3 Ökonomische Probleme und Ableitungen von Funktionen 71
Aufgaben 2.21 bis 2.29 78
2.4 Reagibilität und Ableitungen 79
Aufgaben 2.30 bis 2.41 96
2.5 Extremwertaufgaben der Ökonomie 98
2.5.1 Extrema für Kostenfunktionen 98
Aufgaben 2.42 bis 2.48 109
2.5.2 Gewinnmaximum 110
Aufgaben 2.49 bis 2.57 140
2.6 Die Regel von de L'HOSPITAL 142
Aufgabe 2.58 145
2.7 Reihen und Potenzreihen 145
2.7.1 Reihen 145
2.7.2 Potenzreihen 150

2.8 Entwicklung einer Funktion in eine Potenzreihe 153
2.8.1 MacLaurinsche Reihen 153
2.8.2 Allgemeine Taylor-Reihen 157
Aufgaben 2.59 bis 2.61 158
2.9 Komplexe Zahlen 159
2.9.1 Definition und Darstellung komplexer Zahlen 159
2.9.2 Das Rechnen mit komplexen Zahlen 163

3 Funktionen mit mehreren Veränderlichen 169
3.1 Definition und Darstellungsform von Funktionen mit mehreren Veränderlichen 169
3.2 Partielle Differenziation 172
Aufgaben 3.1 bis 3.3 175
3.3 Partielle Ableitungen höherer Ordnung 175
Aufgabe 3.4 177
3.4 Tangentialebene und das totale Differenzial 178
3.4.1 Geometrische Betrachtungen 178
Aufgabe 3.5 179
3.4.2 Das totale Differenzial 179
3.5 Spezielle Ableitungstechniken 181
3.5.1 Differenziation nach einem Parameter 181
3.5.2 Implizite Differenziation 182
3.6 Anwendungen 182
3.6.1 Lösung nichtlinearer Gleichungssysteme 183
3.6.2 Lokale Extrema und Sattelpunkte 185
3.6.3 Fehlerrechnung 190
3.6.4 Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen 191
Aufgaben 3.6 bis 3.8 194

4 Integralrechnung 195
4.1 Integration als Umkehrung der Differenziation – das unbestimmte Integral . . 195
Aufgaben 4.1 bis 4.3 202
Aufgabe 4.4 203
4.2 Das bestimmte Integral – Hauptsatz der Integralrechnung 204
Aufgaben 4.5 und 4.6 209
4.3 Uneigentliche Integrale 209
4.4 Geometrische Anwendungen 211
4.4.1 Flächenberechnung 211
4.4.2 Länge einer Kurve 213
4.4.3 Volumen und Oberfläche von Rotationskörpern 214
4.5 Anwendung der Integralrechnung in ökonomischen Zusammenhängen 216
4.6 Numerische Integration 219
Aufgabe 4.7 221
4.7 Doppelintegrale 221
4.7.1 Doppelintegrale in kartesischen Koordinaten 221

4.7.2 Doppelintegrale in Polarkoordinaten 224
Aufgabe 4.8 227

5 Lineare Algebra in Betriebs- und Volkswirtschaft 228
5.1 Einführende Beispiele ökonomischen Inhalts 228
Aufgaben 5.1 und 5.2 231
5.2 Mathematische Grundlagen der Matrizen- und Vektorrechnung 231
5.2.1 Matrizen und Vektoren sowie ihre Spezifizierungen 232
Aufgaben 5.3 und 5.4 236
5.2.2 Rechnen mit Matrizen und Vektoren 236
Aufgaben 5.5 bis 5.8 245
5.2.3 Inverse Matrix 245
Aufgaben 5.9 bis 5.12 251
5.2.4 GAUSSscher Algorithmus 252
Aufgaben 5.13 und 5.14 257
5.2.5 Lineare Unabhängigkeit von Vektoren 258
Aufgaben 5.15 bis 5.17 262
5.3 Matrizen und Vektoren in Betriebs- und Volkswirtschaft 263
Aufgaben 5.18 bis 5.22 272
5.4 Mathematische Grundlagen linearer algebraischer Gleichungssysteme 275
5.4.1 Einführung 275
5.4.2 Lösung linearer algebraischer Gleichungssysteme: Begriff und Methode . . . 277
Aufgaben 5.23 bis 5.25 280
5.4.3 GAUSSscher Algorithmus zur Lösung linearer algebraischer Gleichungssysteme 281
Aufgaben 5.26 bis 5.30 291
5.4.4 Basislösungen 292
Aufgaben 5.31 bis 5.36 298
5.4.5 Zusammenfassende Aussagen über lineare algebraische Gleichungssysteme 299
Aufgaben 5.37 bis 5.40 301
5.5 Lineare algebraische Gleichungssysteme in Betriebs- und Volkswirtschaft . . 302
Aufgaben 5.41 und 5.42 310
5.6 Determinante einer Matrix 311
Aufgaben 5.43 und 5.44 314
5.7 Das Eigenwertproblem für quadratische Matrizen 315
Aufgabe 5.45 319

6 Lineare Optimierung in Volkswirtschaft und Betriebswirtschaft 320
6.1 Problemstellungen und Grundbegriffe 320
6.1.1 Aufgabenstellung und Beispiele 320
6.1.2 Das Rechnen mit Ungleichungen 323
6.1.3 Die grafische Lösung 326
6.1.4 Allgemeine mathematische Formulierung des linearen Optimierungsproblems 331
6.2 Der Simplex-Algorithmus 333
6.2.1 Die Grundideen des Simplex-Verfahrens 333
6.2.2 Der Austauschschritt im Simplex-Tableau 334

6.2.3 Die Simplex-Regeln 338
6.2.4 Der Simplex-Algorithmus (Phase II) 340
6.2.5 Theoretische Ergänzungen und Sonderfälle 341
6.3 Der Simplex-Algorithmus für allgemeine lineare Programme 343
6.3.1 Minimumprobleme, Gleichungsrestriktionen, Varianten der Vorzeichenbeschränkungen, obere und untere Schranken 343
6.3.2 Simplex-Algorithmus: Phase I und Phase II 346
6.4 Dualität 348
6.4.1 Primal-Dual-Beziehung und Dualitätssätze 348
6.4.2 Primal-Dual-Beziehung und Komplementarität 351
6.4.3 Dualer Simplex-Algorithmus (Phase III) 353
6.4.4 Ökonomische Interpretationen der Größen in den Simplex-Tableaus 356
6.5 Weiterführende Aspekte 357
6.5.1 Modellbildung 357
6.5.2 Spezialfälle linearer Optimierung 359
6.5.3 Sensitivitätsanalyse bei der linearen Optimierung 362
6.5.4 Parametrische (lineare) Optimierung 363
6.5.5 Effizienz und Vergleich von LP-Solvern 363
6.5.6 Ganzzahlige lineare Optimierung 363
6.5.7 Nichtlineare Optimierung 364
Aufgaben 6.1 bis 6.11 364

7 Finanzmathematik 368
7.1 Zinsrechnung 369
7.1.1 Einfache Zinsen und Zinseszinsen 369
7.1.2 Vorschüssige Verzinsung 375
7.1.3 Gemischte Verzinsung 377
7.1.4 Unterjährige Verzinsung 378
7.1.5 Stetige Verzinsung 380
Aufgaben 7.1 bis 7.11 381
7.2 Barwert, Äquivalenz und Rendite 382
7.2.1 Barwert und Äquivalenz 382
7.2.2 Kapitalwertmethode 384
7.2.3 Rendite 386
7.2.4 Mittlerer Zahlungstermin und Duration 390
Aufgaben 7.12 bis 7.20 391
7.3 Rentenrechnung 392
7.3.1 Nachschüssige und vorschüssige Renten 392
7.3.2 Aufgeschobene, abgebrochene und ewige Rente 398
7.3.3 Jährliche Verzinsung – unterjährige Rentenzahlung 400
7.3.4 Unterjährige Verzinsung 405
Aufgaben 7.21 bis 7.31 406
7.4 Kreditrechnung 408
7.4.1 Grundbegriffe 408
7.4.2 Ratentilgung 410

7.4.3 Annuitätentilgung . . . 410
7.4.4 Unterjährige Verzinsung, Tilgung und Rückzahlung . . . 414
7.4.5 Ratenkredit . . . 421
Aufgaben 7.32 bis 7.41 . . . 422
7.5 Kurs- und Renditerechnung . . . 424
7.5.1 Grundlagen . . . 424
7.5.2 Zinsschuld . . . 425
7.5.3 Annuitätenschuld . . . 429
Aufgaben 7.42 bis 7.48 . . . 433
7.6 Abschreibung . . . 434
7.6.1 Grundlagen . . . 434
7.6.2 Lineare Abschreibung . . . 435
7.6.3 Geometrisch-degressive Abschreibung . . . 436
7.6.4 Weitere Abschreibungsarten . . . 437
7.6.5 Vergleich linearer und geometrisch-degressiver Abschreibung . . . 439
Aufgaben 7.49 bis 7.55 . . . 441
7.7 Weitergehende Betrachtungen . . . 442
7.7.1 Rendite und Risiko . . . 442
7.7.2 „Neuere“ Finanzprodukte . . . 444
Aufgaben 7.56 bis 7.58 . . . 445

8 Weitere praktische Probleme und deren Lösung . . . 446
8.1 Nichtlineare Optimierung . . . 446
8.1.1 Problemstellung, Grundlagen und grafische Lösungen . . . 447
8.1.2 Karush-Kuhn-Tucker-Theorie (KKT-Theorie) . . . 454
8.1.3 Nichtlineare Optimierungsprobleme ohne Nebenbedingungen . . . 458
8.1.4 Bausteine der allgemeinen NLP-Techniken (Übersicht) . . . 460
Aufgaben 8.1 bis 8.5 . . . 462
8.2 Problemlösungen mit einem Standard-Software-System . . . 462
8.2.1 Allgemeine LP-Probleme . . . 463
8.2.2 Ausgewählte NLP-Probleme . . . 467
8.2.3 Portfolio-Probleme . . . 468
8.2.4 Transportprobleme . . . 471
8.2.5 Zuordnungsprobleme . . . 473
8.2.6 Netzwerkprobleme . . . 474
8.2.7 Netzplantechniken . . . 476
8.2.8 Kundenwanderung . . . 483
8.2.9 Verwaltung von Modellen: Algebraische Eingabe und Solver . . . 485

Literaturverzeichnis . . . 488

Sachwortverzeichnis . . . 490

1 Funktionen einer reellen Variablen in ökonomischen Problemen

Zusammenhänge zwischen den Größen wirtschaftlicher Erscheinungen als mathematische Funktion zu betrachten und aus ihrer formal-mathematischen Analyse inhaltlich-ökonomische Informationen zu gewinnen, hat sich zu einem bewährten Hilfsmittel entwickelt. Davon zeugen unter anderem die vielfältigen Produktionsfunktionen in Betriebs- und Volkswirtschaft sowie die verschiedenen Typen von Wachstumsfunktionen.

1.1 Mathematische Grundbegriffe

1.1.1 Funktionsbegriff

BEISPIEL

1.1 Zuordnungen als ein Grundelement von Funktionen

Die Herstellung eines Produktes verursacht Kosten. Setzt man sie ins Verhältnis zur Zahl der erzeugten Exemplare des Produktes (zur Produktionsmenge), erhält man die Durchschnittskosten. Letztere werden auch Stückkosten oder spezifische Kosten genannt. Sowohl Kosten als auch Durchschnittskosten ändern sich mit der Produktionsmenge. Dabei wird – gewisse Produktionsbedingungen innerhalb eines Zeitraumes als konstant vorausgesetzt – jeder Produktionsmenge eine bestimmte Kostensumme zugeordnet, und umgekehrt gehört zu jeder Kostensumme eine bestimmte Produktionsmenge. Für die Durchschnittskosten gilt nur Ersteres, während zu einer gegebenen Höhe von Durchschnittskosten durchaus zwei verschiedene Produktionsmengen gehören können. *Tabelle 1.1* zeigt eine mögliche konkrete Zuordnung der genannten ökonomischen Größen.

Tabelle 1.1 Produktionsmenge P (in Mengeneinheiten ME), Kosten K (in Geldeinheiten GE) und Durchschnittskosten k (in GE/ME)

P in ME	2	4	6	8	10	12	14	16
K in GE	38,6	47,6	51,8	56	65	83,6	116,6	168,8
k in GE/ME	19,3	11,9	$8{,}6\overline{3}$	7	6,5	$6{,}9\overline{6}$	8,33	10,55

■

Das Charakteristische im *Beispiel 1.1* besteht darin, dass jedem Wert P genau ein Wert K bzw. genau ein Wert k zugeordnet wird. Es ergeben sich Wertepaare $(P; K)$ bzw. $(P; k)$.

Sind M_1 und M_2 zwei Mengen reeller Zahlen ($M_1, M_2 \subseteq \mathbf{R}$), und ist jedem $x \in M_1$ genau ein $y \in M_2$ zugeordnet, so heißt die dadurch gegebene paarweise Zuordnung reelle **Funktion** $\boldsymbol{f}$. Dabei heißt M_1 Definitionsbereich von f; er wird mit $D(f)$ bezeichnet.

Als Symbole dienen

$f\colon\ M_1 \to M_2$ oder ausführlicher (1.1a)

$y = f(x),\ x \in D(f).$ (1.1b)

Für die Größen x und y einer Funktion (1.1b) werden folgende Namen synonym verwendet:

x **unabhängige Variable**, Urbildpunkt, **Argument**,
y **abhängige Variable**, Bildpunkt, **Funktionswert**.

Des Weiteren sind die Bezeichnungen Funktionsterm für $f(x)$ und Zuordnungsvorschrift oder Funktionsrelation für $y = f(x)$ gebräuchlich.

Hier werden nur reelle Funktionen betrachtet, und daher wird der Zusatz „reell“ künftig nicht angegeben.

Die Menge aller derjenigen Werte y, die sich für eine Funktion f aus ihrer Zuordnungsvorschrift $y = f(x)$ ergeben, wenn x den gesamten Definitionsbereich $D(f)$ durchläuft, wird **Wertebereich** genannt und mit $W(f)$ bezeichnet.

Zur Vorgabe einer Funktion gehören unbedingt die beiden Elemente „Zuordnungsvorschrift“ und „Definitionsbereich“ (siehe 1.1b)[1)]. Durch sie ist der Wertebereich eindeutig festgelegt, was jedoch nicht bedeutet, dass seine Ermittlung in jedem Falle elementar verläuft. Die Angabe des Definitionsbereiches einer Funktion ist besonders für angewandte Probleme von Bedeutung, weil die Ergebnisse wesentlich vom Definitionsbereich abhängen können.

BEISPIEL

1.2 Einfluss des Definitionsbereiches auf Eigenschaften von Funktionen

Die Funktion $y = f_1(x)$, $x \in [0, 10]$, mit $f_1(x) = (x - 3)^2 + 1$ hat wegen $(x - 3)^2 \geqq 0$ die Eigenschaft $f_1(x) \geqq 1$ für alle $x \in [0, 10]$. Dabei wird der kleinste Funktionswert für $x = 3$ angenommen: $f_1(3) = 1$.

Ändert man für f_1 den Definitionsbereich und betrachtet beispielsweise $y = f_2(x)$, $x \in [5, 10] = D(f_2)$, mit $f_2(x) = (x-3)^2 + 1$, so gilt hier $(x-3)^2 \geqq 2^2 = 4$ für alle $x \in D(f_2)$, und der kleinste Funktionswert wird für $x = 5$ angenommen:

$f_2(x) \geqq f_2(5) = 5.$ ■

Aus den Argumenten x und den Funktionswerten y einer Funktion f können geordnete Wertepaare $(x; y)$ gebildet werden, bei denen immer x an erster und y an zweiter Stelle steht. Die Wertepaare $(x; y)$ lassen sich als Punkte in einem kartesischen Koordinatensystem darstellen. Die Gesamtheit aller Punkte $(x; y)$, die man erhält, wenn x alle Werte von $D(f)$ durchläuft, bildet den **Graphen** G_f der Funktion.

BEISPIEL

1.3 Darstellung von Funktionen mittels ihres Graphen

Der Graph der Funktion $y = 0{,}5x + 1$, $-3 \leqq x \leqq 6$, ist eine Strecke (s. *Bild 1.1*). Der Graph der Funktion $y = (x - 3)^2 + 1$, $0 \leqq x \leqq 5$, ist ein Parabelabschnitt (s. *Bild 1.2*).

[1)] Ausgenommen hiervon ist der Fall, dass die Funktion nur aus endlich vielen, aufgelisteten Wertepaaren $(x_i; y_i)$, $i = 1,2,\ldots n$, besteht.

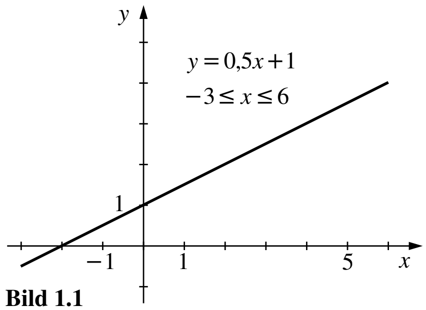

Bild 1.1

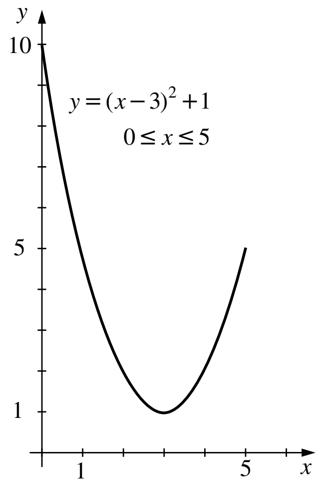

Bild 1.2 ■

Graphen von Funktionen können Strecken, Streckenzüge, Geraden, Kurven, Punktfolgen oder aus den genannten Elementen zusammengesetzt sein.

BEISPIEL

1.4 Punktfolgen und Streckenzüge als Graphen von Funktionen

Der Graph der Durchschnittskostenfunktion $k = k(P)$ aus *Tabelle 1.1* ist eine Punktfolge (s. *Bild 1.3*).

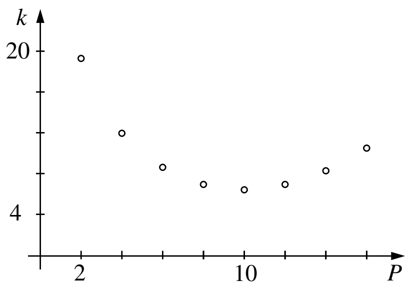

Bild 1.3

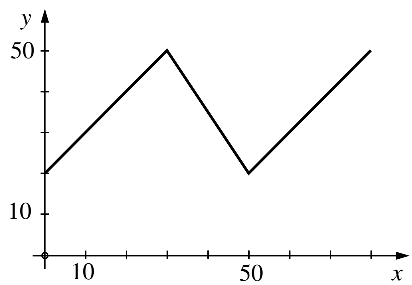

Bild 1.4

Bild 1.4 zeigt einen Streckenzug als Graphen. Er ist aus 3 Strecken zusammengesetzt. ■

Graphen von Funktionen besitzen eine charakteristische Eigenschaft: Jede Parallele zur vertikalen Achse des kartesischen Koordinatensystems schneidet den Graphen höchstens in einem Punkt. Ursache hierfür ist der Sachverhalt, dass jedem Argument x genau ein Funktionswert y zugeordnet ist. Man vergleiche hierzu die *Bilder 1.1* bis *1.4*. Deshalb muss durchaus nicht jede Kurve in einem kartesischen Koordinatensystem Graph einer Funktion sein. So stellen beispielsweise die Kurven in den *Bildern 1.5* und *1.6* keine Funktionen dar. Dagegen können

Parallelen zur horizontalen Achse des kartesischen Koordinatensystems den Graphen einer Funktion durchaus in mehr als einem Punkt schneiden. Das gilt beispielsweise für die in den *Bildern 1.2* und *1.4* dargestellten Graphen.

BEISPIEL

1.5 Kurven, die nicht Graph einer Funktion sind

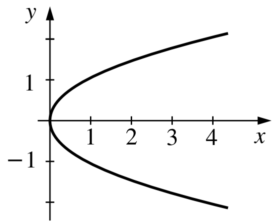

Bild 1.5

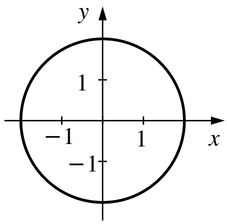

Bild 1.6 ■

Die Vorgabe von Funktionen kann auf sehr vielfältige Weise erfolgen. Genannt seien hier folgende Möglichkeiten:

M1: Wertetabelle (siehe *Tabelle 1.1*)

M2: Analytische Vorgabe in der Form $y = f(x)$, $x \in D(f)$, wobei $f(x)$ ein mathematischer Term ist (vgl. *Beispiel 1.3*).

M3: Grafische Vorgabe durch eine Kurve im kartesischen Koordinatensystem, die von Parallelen zur vertikalen Achse höchstens einmal geschnitten wird (s. *Bilder 1.1* und *1.2*).

M4: Vorgabe in zusammengesetzter Form, d. h. durch unterschiedliche Zuordnungen in verschiedenen Teilen des Definitionsbereiches. *Bild 1.4* zeigt eine zusammengesetzte Funktion. Ihre analytische Vorgabe ist durch

$$y = \begin{cases} x + 20 & \text{für } \ 0 \leqq x \leqq 30 \\ -1{,}5x + 95 & \text{für } 30 < x < 50 \\ x - 30 & \text{für } 50 \leqq x \leqq 80 \end{cases}$$

gegeben.

M5: Implizite Vorgabe durch eine Gleichung der Art $g(x, y) = 0$. Dabei muss $g(x, y)$ ein mathematischer Term sein, der jedem x aus einer gewissen Menge reeller Zahlen genau einen Wert y zuordnet.

BEISPIEL

1.6 Eine Preis-Absatz-Relation als implizite Funktion

Von zwei Produkten A und B sei bekannt, dass Produkt A einen festen Preis p_{A} erzielt, während der Preis von B mit der abgesetzten Menge sinkt. Die konkrete Preis-Mengen-Funktion sei zu $p_{\mathrm{B}}(y) = 10.000/(50 + 4y)$, $10 \leqq y \leqq 100$, ermittelt worden, wobei y die von B abgesetzte Menge angibt. Wird die von A abgesetzte Menge mit x bezeichnet, so liefert die Summe $p_{\mathrm{A}}x + p_{\mathrm{B}}(y)y$ den beim Absatz von x und y erzielten Erlös E: $p_{\mathrm{A}}x + p_{\mathrm{B}}(y)y = E$. Soll nun ein ganz bestimmter Erlös E_0 erzielt werden, so ist das mit verschiedenen Kombinationen der Absatzmengen x und y möglich. Sie müssen der Relation $p_{\mathrm{A}}x + p_{\mathrm{B}}(y)y = E_0$ oder

$$g(x,y)=0 \quad \text{mit} \quad g(x,y)=p_A x+\frac{10.000}{50+4y}y-E_0$$

genügen, wobei jeder zulässigen Absatzmenge x genau eine Absatzmenge y zugeordnet ist (s. Aufgabe 1.11). ■

1.1.2 Ein Funktionenreservoir

Funktionen, die bei der Bearbeitung ökonomischer Phänomene auftreten, besitzen in vielen Fällen einen recht einfachen Aufbau. Wir wollen sie unter der Bezeichnung „elementare Funktionen" zusammenfassen. Sie bilden das Funktionenreservoir, mit dem wir uns im Weiteren beschäftigen wollen. Ihre Bausteine sind einige wenige **Grundfunktionen**. Dazu zählen:

Potenzfunktionen

$$y=x^n,\ n\in\mathbf{N}\backslash\{0\},\quad x\in(-\infty,+\infty),\ \text{wobei } \mathbf{N}=\{0,1,2,3,\ \ldots\} \tag{1.2}$$

$$y=x^k,\ k\in\mathbf{Z},\quad x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)=\mathbf{R}\backslash\{0\}. \tag{1.3}$$

Die Graphen von Potenzfunktionen mit positivem Exponenten n sind Parabeln n-ten Grades. Sie verlaufen alle durch die Punkte $(0;0)$ und $(1;1)$. Für geradzahlige Exponenten n verlaufen die Parabeln außerdem immer durch den Punkt $(-1;1)$, für ungeradzahlige Exponenten n dagegen immer zusätzlich durch den Punkt $(-1;-1)$ (siehe *Bild 1.7*).

Die Graphen von Potenzfunktionen mit negativem Exponenten k sind Hyperbeln. Sie verlaufen alle durch den Punkt $(1;1)$. Für geradzahligen Exponenten k verlaufen die Hyperbeln außerdem immer durch den Punkt $(-1;1)$, für ungeradzahligen Exponenten k dagegen immer zusätzlich durch den Punkt $(-1;-1)$ (siehe *Bild 1.8*).

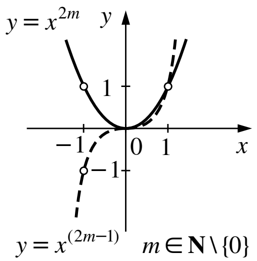

Bild 1.7

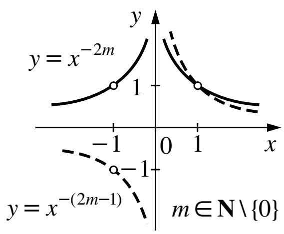

Bild 1.8

Wurzelfunktionen

$$y=x^a,\ a=\frac{p}{q},\quad p,q\in\mathbf{N}\backslash\{0\},\ a\notin\mathbf{N},\ x\in[0,+\infty). \tag{1.4}$$

Die Graphen von Wurzelfunktionen beginnen im Koordinatenursprung $(0;0)$ und verlaufen alle durch den Punkt $(1;1)$. Sie liegen ausschließlich im 1. Quadranten des kartesischen Koordinatensystems. Für die Spezialfälle $a=\frac{1}{q}$, $q\in\mathbf{N}\backslash\{0,1\}$ sind die Graphen Parabeläste; für diese Spezialfälle mit ungeraden q kann der Definitionsbereich auf ganz $\mathbf{R}$ ausgedehnt werden.

BEISPIEL

1.7 Wurzelfunktion mit dem Exponenten 0,1

Die Funktion $y = x^{0,1}$, $0 \leqq x < +\infty$, nimmt beispielsweise für $x = 2$ den Funktionswert $y = 1{,}0718$ an, den man u. a. mit einem Taschenrechner durch die Eingabenfolge 2 [y^x] 0,1 [=] erhält. ■

Potenz- und Wurzelfunktionen können zusammengefasst und auf beliebige Exponenten a verallgemeinert werden:

$$y = x^a, \quad a \in \mathbf{R},\ x \in (0, +\infty). \tag{1.5}$$

Exponentialfunktionen

$$y = a^x,\ a > 0 \quad \text{und} \quad a \neq 1,\ x \in \mathbf{R}. \tag{1.6}$$

Die Graphen von Exponentialfunktionen liegen ausnahmslos in der oberen Halbebene des kartesischen Koordinatensystems und verlaufen alle durch den Punkt (0; 1). Für ein konkretes a verläuft der entsprechende Graph darüber hinaus durch die beiden Punkte $\left(-1; \frac{1}{a}\right)$ und $(1; a)$ (s. *Bilder 1.9a, 1.9b* und vgl. Lösung zur Aufgabe 1.6).

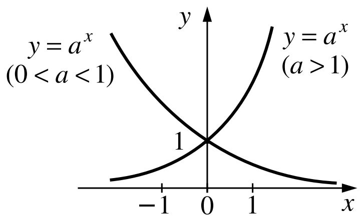

Bild 1.9a

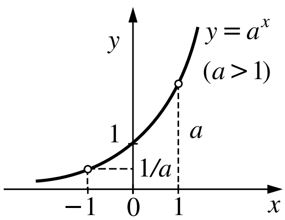

Bild 1.9b

In enger Beziehung zu den Exponentialfunktionen stehen die Logarithmusfunktionen.

Logarithmusfunktionen

$$y = \log_a x,\ a > 0 \quad \text{und} \quad a \neq 1,\ x > 0. \tag{1.7}$$

Die Graphen von Logarithmusfunktionen liegen ausnahmslos in der rechten Halbebene des kartesischen Koordinatensystems und verlaufen alle durch den Punkt (1; 0). Man erhält sie durch Spiegelung der Graphen entsprechender Exponentialfunktionen an der Geraden $y = x$. Daher verläuft auch für ein konkretes a der zugehörige Graph der Logarithmusfunktion durch die beiden Punkte $\left(\frac{1}{a}; -1\right)$ und $(a; 1)$ (s. *Bilder 1.10a, 1.10b* und vgl. Lösung zur Aufgabe 1.7).

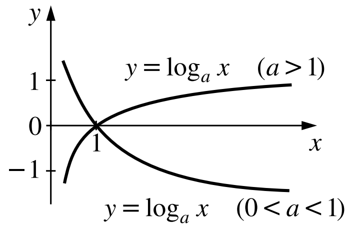

Bild 1.10a

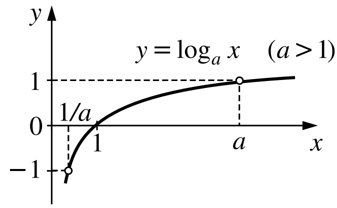

Bild 1.10b

Für die Werte $a = \mathrm{e}$ (e die Eulersche Zahl, $\mathrm{e} \approx 2{,}718\,28$ – natürliche Wachstumskonstante), $a = 2$ und $a = 10$ ergeben sich spezielle Logarithmusfunktionen:

$$y = \log_{\mathrm{e}} x = \ln x, \qquad x > 0, \tag{1.7a}$$

$$y = \log_2 x = \mathrm{ld}\, x, \qquad x > 0, \quad \text{und} \tag{1.7b}$$

$$y = \log_{10} x = \lg x, \qquad x > 0. \tag{1.7c}$$

In älteren Tafelwerken sind $\ln x$ und $\lg x$ noch tabelliert. Heute sind auf einschlägigen Taschenrechnern entsprechende Funktionstasten vorhanden.

Trigonometrische Funktionen (Winkelfunktionen)

$$y = \sin x, \qquad x \in \mathbf{R}, \tag{1.8a}$$

$$y = \cos x, \qquad x \in \mathbf{R}, \tag{1.8b}$$

$$y = \tan x, \qquad x \in \mathbf{R} \text{ und } x \neq \frac{\pi}{2} \pm k\pi,\ k \in \mathbf{N}, \tag{1.9}$$

$$y = \cot x, \qquad x \in \mathbf{R} \text{ und } x \neq \pm k\pi,\ k \in \mathbf{N}. \tag{1.10}$$

Die *Bilder 1.11* und *1.12* zeigen Teile der Graphen von $y = \sin x$ und $y = \cos x$.

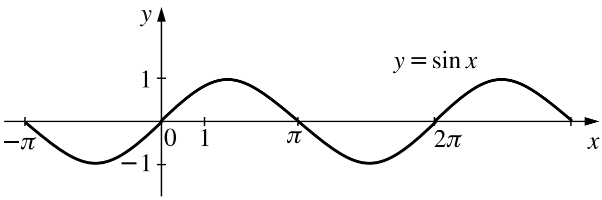

Bild 1.11

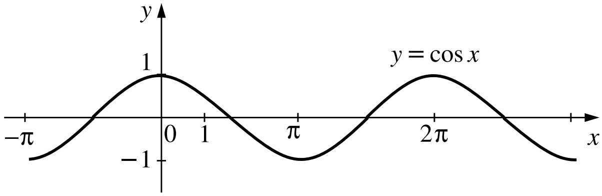

Bild 1.12

Von den trigonometrischen Funktionen können insbesondere $y = \sin x$ und $y = \cos x$ bei der Untersuchung von Saisonschwankungen und Konjunkturerscheinungen von Bedeutung sein.

Als letzte Gruppe der Grundfunktionen seien die Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen, die sogenannten **Arkusfunktionen**, hier erwähnt.

> Werden die Grundfunktionen durch Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division[1)] und/oder Verkettung miteinander verknüpft, so ergeben sich neue Funktionen. Werden auf sie ebenfalls uneingeschränkt die genannten Verknüpfungen angewandt, so ergibt sich ein unerschöpfliches Reservoir von Funktionen. Jede auf diese Weise gebildete Funktion wollen wir **elementare Funktion** nennen.

Die Verknüpfungen Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division[1)] zweier Funktionen setzen voraus, dass beide Funktionen den gleichen Definitionsbereich haben. Sie bestehen dann einfach in der Ausführung der entsprechenden algebraischen Operationen mit den Funktionswerten.

BEISPIELE elementarer Funktionen:

1.8 Mit $y=3-5x+7x^2-9x^3$, $x\in\mathbf{R}$, ist eine Summe bzw. Differenz von Potenzfunktionen gegeben. Allgemein spricht man bei Summen bzw. Differenzen von Potenzfunktionen von **Linearkombinationen** von Potenzfunktionen. Sie werden kurz **Polynome** genannt.

1.9 Mit $y=(1+x^2)(1-x^2)$, $x\in\mathbf{R}$, ist das Produkt einer Summe und einer Differenz von Potenzfunktionen, d. h. das Produkt zweier Polynome gegeben.

1.10 Mit $y=(1+x^2)/(1-x^2)$, $x\in\mathbf{R}$ und $x\neq\pm 1$, ist der Quotient zweier Polynome und damit ein Beispiel für rationale Funktionen gegeben. ■

Die **Verkettung** zweier Funktionen g und h zu einer neuen Funktion f besteht darin, die Funktionswerte $g(x)$ als Argumente der Funktion h einzusetzen:

$$f(x)=h\,(g(x))\,,\quad x\in D(f)=D(g). \tag{1.11}$$

Der Term $h\,(g(x))$ ist nur sinnvoll, wenn der Funktionswert $g(x)$ zum Definitionsbereich von h gehört. Deshalb erfordert die Bildung der verketteten Funktion (1.11) die Bedingung $W(g)\subseteq D(h)$ als Voraussetzung. Gegebenenfalls muss der Definitionsbereich von g entsprechend eingeschränkt werden (s. *Beispiel 1.11*). Damit ist auch klar, dass man die Reihenfolge bei der Verkettung zweier Funktionen einhalten muss. Im Falle der verketteten Funktion (1.11) nennt man g die **innere Funktion** und h die **äußere Funktion**.

BEISPIEL

1.11 Verkettete Funktion

Die Funktion $y=\sqrt{(x-1)(x^2+1)}$, $x\geqq 1$, kann als Verkettung der inneren Funktion $g(x)=(x-1)(x^2+1)$, $x\geqq 1$, und der äußeren Funktion $h(g)=\sqrt{g}$, $g\geqq 0$, aufgefasst werden. Da die innere Funktion eine elementare Funktion, die äußere sogar eine Grundfunktion darstellen, gehört die gegebene verkettete Funktion ebenfalls zu den

---

[1)] Bei der Division zweier Funktionen muss natürlich der Divisor von null verschieden sein.

Sachwortverzeichnis

A
Ableitung 53
– an der Stelle 48
– einer Umkehrfunktion 53
–, linksseitige 53
–, partielle 172
–, rechtsseitige 53
Absatz, gewinnmaximierender 135
Absatzmenge, Berechnung der gewinnextremalen 123
–, gewinnmaximierende 111, 131, 135
Abschreibung 434
–, arithmetisch-progressive 438
–, degressive, in Staffelbeträgen 439
–, digitale 437
–, geometrisch-degressive 436, 439
–, lineare 435, 439
–, progressive 438
absoluter Term 276
Abzinsungsfaktor 372
AfA 435
AIBD-Methode 389
Aktivität 357
AMOROSO-ROBINSON-Relation 95
Anfangswert 31
Annuität 408
Annuitätendarlehen 408
Annuitätenschuld 429
Annuitätentilgung 408, 410
Äquivalenz 382
Argument 14
Arkusfunktion 20
atan2 162
Aufgeld 426
Aufzinsungsfaktor 372
Ausstattungsgrad 21
Austauschschritt 290, 334

B
barrier functions 461
Barriere-Methode 461
Barwert 369, 382 f.
Basis-Inverse 341
Basislösung 292
–, degeneriert 294
Basislösung (BL), zulässige (ZBL) 334
Basisvariable 295
Basisvariable (BV) 334
Betrag einer komplexen Zahl 161
Betriebsminimum 103
Betriebsoptimum 99
Bilanzgleichung 267
Bildpunkt 14
BLAND-Regel 340
Bogenlänge 213
Buchwert 435
Bundesschatzbrief 387

C
Call 444
charakteristische Gleichung 316
charakteristisches Polynom 316
COURNOTscher Punkt 133
CPM 476
CPM-Netzplan 477

D
DANTZIG-Regel 342
Definitionsbereich 13, 169
degeneriert 328
Degressionsbetrag 437
Determinante einer Matrix 311
Diagonalmatrix 234
Differenzenquotient 47
Differenzial 57
–, Interpretation 58
–, totales 180
Differenziation, implizite 182
differenzierbar 48, 53
–, linksseitig 53
–, rechtsseitig 53
DIRICHLET-Funktion 45
Disagio 418
Diskontierungsfaktor 372
Doppelindex 230
Doppelintegral, Polarkoordinaten 225

Dreiecksmatrix, obere 234
–, untere 234
duales Problem (D) 348
Dualität 348
Dualitätssatz, schwacher 350
–, starker 350
Duration 391
Durchschnittsertrag 73
Durchschnittsfunktion 94
Durchschnittskosten 99
Durchschnittskostenfunktion 30

E
Eckpunkt 327
Effektivverzinsung 386, 431
Effektivzins, anfänglicher 431
Eigenvektor 305, 315
Eigenwert 315
Eigenwertgleichung 316
Einflussgröße 29
Einheitsmatrix 234
Einheitsvektor 234
elastisch 85
Elastizität 82
– der Kosten bezüglich des Outputs 84
– des Absatzes bezüglich des Preises 84
– des Outputs bezüglich des Inputs 84
– gleich 1 82
–, Interpretation 83
Ellipsoid-Methode 320
Endkapital 369
entartet 328
Entartung 341
Entwicklungsgleichung 32
Ereignis 476
erlaubter Bereich 362
Erlösfunktion 30
Ersatzrente 400
Ertragsentwicklung, Phasen 73
Ertragsgesetz, klassisches 30, 71 f.
–, Schwelle 99
ertragsgesetzliche Produktionsfunktion 73
EULER
–, Formel 162
Exponentialfunktion 18, 31
Extrema, für Kostenfunktionen 98
Extremalstrahl 331, 343
Extremum 61
–, lokal 185
Extremwertaufgabe, ökonomischen Inhalts 98

F
Fahrstrahl, tangentialer 113
Faktorgröße 29
FALKsches Rechenschema 242
FAT 478
Fehlerfortpflanzung, GAUSSsche 190
–, linear 190
–, quadratisch 190
FET 478
Folge 38
– konvergiert, strebt 37
Fundamentalsystem von Lösungen 291
Funktion 13, 169
–, äußere 20
–, beschränkt 22
–, charakteristische 45
–, eineindeutig 25
–, elementare 17, 20
–, implizite 16
–, innere 20
–, integrierbar 206
–, kleinster und größter Wert 63
–, konkav 23
–, konvex 23 f.
–, linksgekrümmt 23
–, linksseitig stetig 44
–, monoton fallend 22
–, monoton wachsend 22
–, nach oben beschränkt 22
–, nach unten beschränkt 22
–, rechtsgekrümmt 23
–, rechtsseitig stetig 44
–, Stamm- 195
–, stetig 44
–, stetig an der Stelle 44
–, stetig im Intervall 44
–, streng konkav 23
–, streng konvex 23
–, streng monoton fallend 22
–, streng monoton wachsend 22
–, trigonometrische 19
Funktionsrelation 14
Funktionsterm 14
Funktionswert 14
–, größter 45
–, kleinster 45
Futtermittelmischung 230

G
GANTT-Chart 480
GAUSSsche Zahlenebene 160

GAUSSscher Algorithmus 256
GAUSS-NEWTON-Verfahren 183
GAUSSscher Algorithmus, Endform 333
Gegenwartswert 382 f.
Gesetz vom abnehmenden Ertragszuwachs 71
gewinnextremaler Pfad 120
–, Gleichung 125
Gewinnextremum, grafische Ermittlung 123
Gewinnfunktion 30
Gewinngrenze 69, 111, 130
Gewinnlinse 113, 130
gewinnmaximale Menge, zulässige 136
gewinnmaximierende Menge, zulässige 138
Gewinnmaximum bei vollständiger Konkurrenz 111
–, grafische Ermittlung 122
– im Falle des Angebotsmonopols 130
Gewinnschwelle 69, 111, 130
Gewinnzone 111, 130
Gleichgewichtspreis 67
Gleichungssystem 275
–, lineares algebraisches 275
Gradient 173
Gradientenmethode 459
Graphen 14
greatest change 342
Grenzerlös 78
Grenzfunktion 81
–, Interpretation 82
Grenzgewinn 78
Grenzkosten 78, 99
Grenzpreis 130
Grenzprodukt 59
Grenzproduktivität 59, 72
Grenzwert 37
– der Funktion 41
– der Funktion, linksseitiger 42
– der Funktion, rechtsseitiger 42
Grundfunktion 17

H

Halbebene 324
Halbraum 324
Hauptdiagonale 234
Hauptsatz der Integralrechnung 207
HESSE-Matrix 177, 452
homogener Zusammenhang 88
homogenes lineares Gleichungssystem 316
Homogenitätsgrad 88 f.
Homogenitätsregel 50

I

imaginäre Einheit 159
Imaginärteil 160
implizite Differenziation 182
Innere-Punkt-Methode 320
Input 267
Inputelastizität des Outputs 84
Input-Output-Koeffizient 268
Input-Output-Modell 266
Input-Output-Tabelle 230
Integral, bestimmtes 206
–, unbestimmtes 196
Integrale, uneigentliche 209
Integrand 196
Integration nach Partialbruchzerlegung 198
– nach Substitution 197
–, partielle 197
– von Differenzen 197
– von Summen 197
Integrationskonstante 196
integrierbar 206
Inverse 246
Investition 384
ISMA-Methode 389
Iteration, heuristische 67
Iterationsverfahren 395

J

JACOBI-Matrix 183, 186, 225, 451

K

Kalkulationszinssatz 384
Kandidaten für relative Extrempunkte 447
kanonische Form, zulässige 334
Kapitalisierungsfaktor 399
Kapitalwert 384
Kapitalwertmethode 384
Karenzzeit 398
Kaufoption 444
Kehrmatrix 246
KEPLERsche Fassregel zur numerischen Integration 220
Kettenregel 51, 181
KKT-Bedingung 455
KKT-Methode 454
KKT-Theorie 454
Koeffizientenmatrix 276
komplementäre Variable 352
komplementärer Schlupf 353
komplexe Zahlen 160
–, algebraische Form 161

–, Differenz 164
–, exponentielle Form 162
–, kartesische Form 161
–, Produkt 165
–, Quotient 167
–, Summe 164
–, trigonometrische Form 162
konjugiert komplex 161
Konsumfunktion 30
Konsumquote 78
Konvergenzbereich einer Potenzreihe 151
Konvergenzradius einer Potenzreihe 151
konvex 452
Konvexität 452
–, strenge 24
Konvexkombination 326
Kosten, durchschnittliche variable 103
–, fixe 103
–, variable 103
Kostenelastizität 84
Kostenentwicklung, vier Phasen 104
Kostenfunktion 21, 29 f.
–, ertragsgesetzliche 21
–, ertragsgesetzliche vom Polynomtyp 108
–, neoklassische 27
Kreditrechnung 408
Kreuzprodukt 312
kritisch 477
kritischer Weg 478
Krümmungsverhalten 24
Kundenwanderung 230, 263
Kurs 425
Kursrechnung 424

L

LAGRANGE-Funktion 192, 448, 455
LAGRANGE-Multiplikator 192 f., 448
Länge einer Kurve 213
LEIBNIZ-Kriterium für Reihen 147
Leibrente 392
Leistungsabschreibung 438
Leistungsverflechtung 228
LEONTIEF-Koeffizient 268
LEONTIEF-Modell 268
LGS 275
L'HOSPITALsche Regel 142
Line Search-Problem 458
lineares algebraisches Gleichungssystem 275
–, allgemeine Lösung 287
–, Basislösung 292
–, Fundamentalsystem von Lösungen 291
–, gestaffelt 278
–, homogenes 276
–, inhomogenes 276
–, kanonische Normalform 281
–, Koeffizienten 275
–, nichttriviale Lösung 278
–, Normalform 275
–, spezielle Lösung 288
–, triviale Lösung 278
–, Zahl der Freiheitsgrade 283
lineares Optimierungsproblem 331
lineares Programm 331
Linearität 40
Linearitätsregel 50
Linearitätsrelation 276
Linearkombination 20, 40
–, konvexe 238
– von Funktionen 42
linksgekrümmt 24
Logarithmusfunktion 18
LP-Problem 331
LP-Solver 363

M

MACLAURINsche Reihe 153, 162
Mantelfläche eines Rotationskörpers 214
Marktanteil 263
–, Vektor 264
Marktaufteilung, stationäre 264
Markträumungsbedingung 67
Marktzinssatz 383
Materialverbrauchsnorm 229
Materialverflechtung 229
Matrix 232
–, Differenz 237
–, elementare Umformung 253
–, Elemente 232
–, gleiche 236
–, inverse 246
–, Ordnung 233
–, quadratische 233
–, Rang 261
–, regulär 247, 312
–, singulär 247
–, Spalte 232
–, Summe 237
–, symmetrische 235
–, transponierte 235
–, Typ 232

–, verkettbar 241
–, verknüpfbar 241
–, verträglich 241
–, Zeile 232
maximaler Fluss 474
Maximum 61
–, absolutes 61
–, lokales 185
–, relatives 61
max-NLP 454
Methode des steilsten Abstiegs 459
Minimum 61
–, absolutes 61
–, lokales 185
–, relatives 61
min-NLP 454
Mischungsproblem 322
Mittelwertsatz der Integralrechnung 206
Modellbildung 357
Monopol 110
MPM-Netzplan 477

N

N 17
Näherungsformel für den Zuwachs 57
Nebenbedingung 322
Nebendiagonale 234
Nettobarwert 384
Netzplantechnik 476
Netzwerk 361
Netzwerkproblem 474
Netzwerk-Simplex-Algorithmus 471
NEWTON-RAPHSON mit Ridging 459
NEWTON-RAPHSON-Verfahren 459
Newton-Verfahren 395
–, eindimensionales 450
–, mehrdimensionales 451
– NEWTON-Verfahren 68
Nichtbasisvariable 295
Nichtbasisvariable (NBV) 334
nichtlineare Optimierung 446
nichtlineares Optimierungsproblem 446
nichtlineares Programm 446
Nichtnegativitätsbedingung 322
NLP-Problem 446
–, grafisch 457
Nominalzinssatz 409
Norm (Länge) des Vektors 245
Normalform 333
Nullfolge 38
Nullmatrix 233
Nullvektor 234
numerische Integration 219
Nutzungsdauer 435

O

Oberfläche eines Rotationskörpers 214
ökonomische Interpretation 356
Operations Research 320
Opportunitätskosten 356
Opportunitätszinssatz 384
Optimierung, nichtlineare 446
Optimierungsproblem, lineares 331
–, nichtlineares 446
–, quadratisches 469
Option 444
Output 266
Outputelastizität der Kosten 84
Outputnorm, vollständige 306

P

Parameter, frei wählbar 289
Parameter Estimate 471
partielle Ableitung 172
penalty functions 461
Penalty-Methode 461
PERT 476
PERT-Methode 482
Phase II 339
Pivotelement 254, 335
Pivotspalte 254
Pivotzeile 254
Polyeder, konvexes 325
Polynom 20, 31
Polypol 110
Polytop, konvexes 325
Portfolio-Problem 457, 468
positiv definit 452
positiv semi-definit 452
Potenzfunktion 17
Potenzreihe 150
Preis-Absatz-Funktion 25, 30
Preisangabenverordnung (PAngV) 389
Preiselastizität des Absatzes 84
Preiszone 116
primales Problem (P) 348
Problem, duales 348
–, primales 348
Produktionselastizität 84
Produktionsfunktion 29 f.
Produktionsplanung 321

Produktionstheorie, neoklassische 30
Produktmatrix 241
Produktregel 50
Programm, lineares 331
–, nichtlineares 446
Prohibitivpreis 130, 135, 139
Prozedur, ASSIGN 473
–, CPM 479
–, GANTT 480
–, IML 484
–, LP 464
–, NETFLOW 475
–, NLP 467
–, Optmodel 485
–, TRANS 472
Prozentannuität 412
Punkt, zulässiger 326
Put 444

Q
quadratisches Optimierungsproblem 469
Quotientenkriterium für Potenzreihen 151
– für Reihen 147
Quotientenregel 51

R
Randminimum 108
Ratenkredit 421
Ratentilgung 408, 410
Reagibilität 79
–, detaillierte Klassifizierung 85
–, gewinnmaximierender Absatz 139
–, Klassen 85
–, Klassifizierung 80
–, maximaler Gewinn 139
–, Messgrößen 80
Reagibilitätsgrad der Kosten 92
Reagibilitätsvergleich 80
Realteil 160
Rechenzeile 254
Rechteckregel zur numerischen Integration 219
rechtsgekrümmt 24
Regel von SARRUS 312
Reihe, alternierende 146
–, arithmetische 146
–, divergente 146
–, geometrische 146
–, harmonische 146
–, konvergente 145
–, MACLAURINsche 153
–, Potenz- 150
–, TAYLOR 157
–, unendliche 145
Rendite 374, 442
Renditerechnung 424
Rente 392
–, abgebrochene 398
–, aufgeschobene 398
–, ewige 399
–, nachschüssige 392
–, unterbrochene 398
–, vorschüssige 392, 396
Rentenbarwert 393, 397
Rentenbarwertfaktor, nachschüssiger 394
Rentenendwert 393, 397
Rentenendwertfaktor, nachschüssiger 394
Rentenrechnung 392
Ressource 357
Restglied 158
Restriktion, eigentliche 322
Restschuld 408
Restwert 435
Richtungsableitung 173
Risiko 442
Risiko-Rendite-Diagramm 443

S
SAS 447, 463
SAS/GRAPH 463
SAS/OR 463
SAS-Programm 464
SAT 478
Sättigungsprozess 32
Sättigungswert 21
Schattenpreis 356
Scheinvorgang 476
Schlupfvariable 332
schwacher Dualitätssatz 350
Sekantenverfahren 428
Sensitivitätsanalyse 362
SET 478
Simplex-Algorithmus 320
–, dualer 351, 353
–, Grundlage 446
–, Phase 0 348
–, Phase I 346
–, Phase II 339 f., 346
–, Phase III 353
Simplex-Kurztableau, Rechenregeln 338

Simplex-Tableau 335
–, Kurzform 336
–, Langform 335
SIMPSON-Regel zur numerischen Integration 220
Skalarprodukt 240
Sollzinssatz 409
Spaltenindex 232
Spaltenvektor 232
Sparquote 78
Sparziel 394
Spatprodukt 312
Stammfunktion 195
Standard-Maximum-Problem 332
starker Dualitätssatz 350
steepest edge 342
Steepest unit ascent 340
Stetigkeit 44, 171
–, Wesen 46
streng konkav 64, 452
streng konvex 64, 452
streng monoton fallend 61
streng monoton wachsend 61
Ströme 230
Stromgröße 229
Strukturvariablen 326, 332
Stückkosten 99
Stücknotiz 425
Stufenproduktion 229, 307
– mit Verzweigungen 270
Summenregel 50
Systemmatrix 276
–, erweiterte 276

T
Tangentenregel zur numerischen Integration 220
Tangentialebene 179
TAYLOR
–, Polynom 157
–, Reihe 157
–, Satz von 157
Tilgung 408
Tilgungsplan 408 f., 418
Tilgungsrate 408
Tilgungsrechnung 408
Tilgungssatz, anfänglicher 412
totales Differenzial 180
Transport 230
Transportproblem 323, 359, 471
Trapezform 281
Trapezregel zur numerischen Integration 220
TURGOT-Funktion 73
Typ einer Matrix 232

U
überproportional 81, 85
Überproportionalität 89
–, abnehmende 86
–, zunehmende 86
Umformung, elementare 253
Umkehrfunktion 26
Umsatzrentabilität 91
unelastisch 85
unendliche Reihe 145
Ungleichung 323
unterproportional 81, 85
Unterproportionalität 89
–, abnehmende 86
–, zunehmende 86
Urbildpunkt 14

V
Variable, abhängige 14
–, unabhängige 14
Vektor der Marktanteile 264
–, Komponenten 232
–, linear abhängig 258
–, linear unabhängig 258
–, Linearkombination 238
–, Linearkombination, konvexe 238
–, Norm (Länge) 245
–, summierender 234
Vektorprodukt 312
Vektorraum 259
Vergleichskriterium für Reihen 146
Verkaufsoption 444
Verkettung 20
Verzinsung, antizipative 375
–, dekursive 375
–, einfache 369
–, exponentielle 372
–, gemischte 377
–, jährliche 372
–, nachschüssige 375
–, stetige 380
–, unterjährige 378, 405
–, vorschüssige 375
Verzweigung 270
volkswirtschaftliche Verflechtung 230, 266
Volumen eines Rotationskörpers 214
– eines zylindrischen Körpers 221
Vorgang 476

W
Wachstum, exponentielles 31
–, gebremstes 32
–, lineares 31
Wachstumsfunktion, logistische 21, 33
Wachstumskonstante, natürliche 19
Wachstumsrate 31
Wanderungsmatrix 264
Wanderungszahl 263
Wartezeit 398
Wendepunkt 64
Wertebereich 14, 169
Wertepaar 14
Wertzuwachs p. a. 387
Winkelfunktion 19
Wirkungsgröße 29
Wurzelfunktion 17
Wurzelkriterium für Potenzreihen 151
– für Reihen 147

Z
Zahlen, komplexe 160
Zahlenfolge 38
Zahlungstermin, mittlerer 390
Zeilenindex 232
Zeilenvektor 232
Zeitrente 392
Zielfunktion 322
Zielgröße 29
Zins 369
–, effektiver 386
Zinsbindung 419
Zinsdivisor 372
Zinseszinsen 369, 372
Zinsfuß 369
Zinskapitalisierungszeitpunkt 369
Zinssatz 369
–, interner 384
Zinsschuld 425
Zinstage 370
Zinsteiler 372
Zinszahl 372
zulässiger Punkt 326
Zuordnungsproblem 473
Zuordnungsvorschrift 14
Zuschreibungsabschreibung 439
Zuwachs 23, 47
– der Funktionswerte 47
Zwischenwertsatz 46