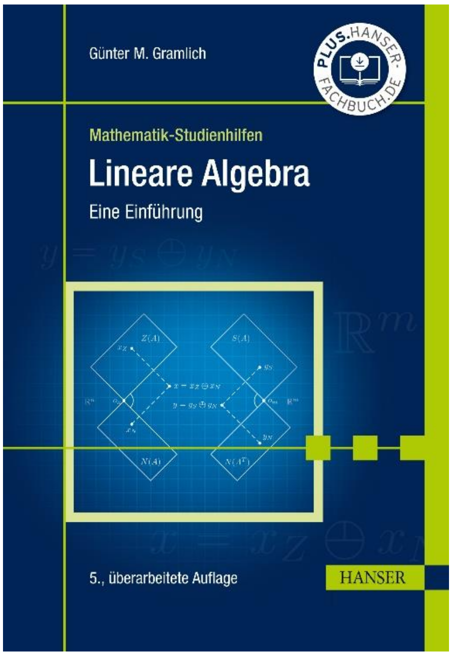
HANSER




# Leseprobe

zu

# Lineare Algebra

von Günter M. Gramlich

Print-ISBN: 978-3-446-47188-7
E-Book-ISBN: 978-3-446-47216-7

Weitere Informationen und Bestellungen unter

https://www.hanser-kundencenter.de/fachbuch/artikel/9783446471887

sowie im Buchhandel

# 1 Reelle geordnete Tupel

Wir erinnern an die Begriffe Produktmenge und geordnete Tupel. Ist $n \in \mathbb{N}$ und sind $A_1, \ldots, A_n$ Mengen, so heißt die Menge $A \times \cdots \times A_n = \{(a_1, \ldots, a_n) \mid a_1 \in A_1, \ldots, a_n \in A_n\}$ Produktmenge (kartesisches Produkt, Kreuzmenge, Mengenprodukt) der Mengen $A_1$ bis $A_n$. Die Elemente der Menge $A \times \cdots \times A_n$ heißen geordnete Tupel oder kurz Tupel. Bei Tupel kommt es auf die Reihenfolge an. Zwei Tupel $(a_1, \ldots, a_n)$ und $(b_1, \ldots, b_n)$ sind genau dann gleich, wenn $a_1 = b_1, \ldots, a_n = b_n$ gilt. Es kommt auch vor, dass Tupel als Listen bezeichnet werden.

Von besonderer Bedeutung ist nun der Fall, wenn $A_j$ für jedes $j \in \{1, \ldots, n\}$ gleich der Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ ist. In diesem Fall schreibt man für $\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$ kurz $\mathbb{R}^n$. Somit gilt

$$\mathbb{R}^n = \{(a_1, \ldots, a_n) \mid a_1 \in \mathbb{R}, \ldots, a_n \in \mathbb{R}\}.$$

Die Elemente von $\mathbb{R}^n$ sind **reelle geordnete Tupel**. Ist $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ ein reelles Tupel, so heißen die Zahlen $a_1, \ldots, a_n$ **Koordinaten** (**Einträge**, **Komponenten**) von $(a_1, \ldots, a_n)$. Je nach Wahl von $n \in \mathbb{N}$ haben diese Tupel eigene Namen: Für $n = 2$: reelles Paar oder reelles Dupel, für $n = 3$ reelles Tripel, für $n = 4$ reelles Quadrupel, für $n = 5$ reelles Quintupel, usw. Verwenden wir einen Buchstaben für ein Element aus $\mathbb{R}^n$, dann verwenden wir oft denselben Buchstaben mit einem Index, wenn die Koordinaten angezeigt werden sollen. Zwei reelle $n$-Tupel $a = (a_1, \ldots, a_n)$ und $b = (b_1, \ldots, b_n)$ sind genau dann gleich, wenn die entsprechenden Koordinaten gleich sind, also $a_j = b_j$ für alle $j = 1, 2, \ldots, n$ ist.

*Beispiel 1.1* Hier sind ein paar Elemente aus der Produktmenge $\mathbb{R}^2$: $(3, 2)$, $(1, -1)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(\pi, e)$, $(\cos(\pi/4), \sin(\pi/4))$. Bitte beachten Sie: Es ist $\{1, 2\} = \{2, 1\}$, aber $(1, 2) \neq (2, 1)$, und $\{3, 3\} = \{3\}$, aber $(3, 3) \neq (3)$. □

## 1.1 Rechnen mit reellen Tupeln

Sind $a = (a_1, \ldots, a_n)$ und $b = (b_1, \ldots, b_n)$ reelle Tupel aus $\mathbb{R}^n$, so definiert man

$$a \oplus b = (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n).$$

Dies ist die **Tupeladdition** von reellen Tupeln in $\mathbb{R}^n$. Das Symbol $\oplus$ kennzeichnet die neue Verknüpfung Addition in der Menge $\mathbb{R}^n$. Es wird nur hier in der Definition verwendet, damit der Unterschied zur gewöhnlichen Addition $+$ in den reellen Zahlen

$\mathbb{R}$ deutlich wird. Statt $\oplus$ schreiben wir in Zukunft einfach $+$. Die Tupeladdition ist eine mathematische Abbildung von $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^n$ mit $(a,b) \mapsto a+b$. Das **Nulltupel** in $\mathbb{R}^n$ ist $o = (0,\dots,0)$. Das Nulltupel $o$ hat die Eigenschaft, dass es bezüglich der Addition neutral ist, denn es ist $a + o = a$, wobei $a$ irgendein Element aus $\mathbb{R}^n$ ist. Aus diesem Grund wird das Nulltupel auch **neutrales Element** oder **neutrales Tupel** der Tupeladdition genannt. Das zu $a = (a_1,\dots,a_n)$ **negative Tupel** oder **Gegentupel** ist das Tupel $-a = (-a_1,\dots,-a_n)$ und es ist $a+(-a) = o$. Das Nulltupel aus $\mathbb{R}^n$ schreiben wir auch als $o_n$, um anzudeuten, dass es $n$ Nullkoordinaten hat. Die **Tupelsubtraktion** in $\mathbb{R}^n$ lässt sich auf die reelle Tupeladdition zurückführen; es ist $a \ominus b = a + (-b)$. Statt $\ominus$ schreibt man $-$. Es ist also $a-b = (a_1-b_1,\dots,a_n-b_n)$, das heißt das Differenztupel $a-b$ erhält man durch Subtraktion der Koordinaten in $b$ von den entsprechenden Koordinaten in $a$. Die Tupelsubtraktion ist eine Abbildung von $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit $(a,b) \mapsto a-b$.

Die Multiplikation einer reellen Zahl $r$ mit einem reellen Tupel $a = (a_1,\dots,a_n) \in \mathbb{R}^n$, also $r \odot a$, ist das Tupel, das durch Multiplikation jeder Koordinate von $a$ mit $r$ gewonnen wird:

$$r \odot a = (r \cdot a_1, \dots, r \cdot a_n).$$

Man nennt es **reelle Multiplikation** (**skalare Multiplikation**). Statt $\odot$ schreibt man $\cdot$. Den Punkt zwischen einer reellen Zahl und einem Tupel lässt man oft weg, also gilt $r \cdot a = ra$. Die reelle Multiplikation ist eine Abbildung von $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit $(r,a) \mapsto ra$. Die Reihenfolge der Operationen ist $\cdot$, $+$, $-$ (Punkt vor Strich).

*Beispiel 1.2* Es sind die Tupel $a = (1,2) \in \mathbb{R}^2$ und $b = (3,-4) \in \mathbb{R}^2$ gegeben. Ferner ist $r = 2$. Bestimmen Sie das Tupel $a+b$, das Tupel $ra$ und das Tupel $a-b$.

*Lösung:* Die Summe ist $a+b = (1,2)+(3,-4) = \big(1+3, 2+(-4)\big) = (4,-2) \in \mathbb{R}^2$. Das skalare Produkt ist $ra = 2(1,2) = \big((2)(1),(2)(2)\big) = (2,4) \in \mathbb{R}^2$ und die Subtraktion ergibt $a-b = (-2,6) \in \mathbb{R}^2$. □

Für reelle Tupel lassen sich grundlegende und nützliche Rechenregeln aufstellen.

**Satz 1.1** *Es sind $n \in \mathbb{N}$, $r,s \in \mathbb{R}$, $o \in \mathbb{R}^n$ das Nulltupel und $a,b,c \in \mathbb{R}^n$. Dann gelten die folgenden acht Rechenregeln:*

*(a)* $a+b = b+a$

*(b)* $a+(b+c) = (a+b)+c$

*(c)* $a+o = a$

*(d)* $a+(-a) = o$

*(e)* $r\cdot(a+b) = (r\cdot a)+(r\cdot b)$

*(f)* $(r+s)\cdot a = (r\cdot a)+(s\cdot a)$

*(g)* $r(s\cdot a) = (rs)\cdot a$

*(h)* $1\cdot a$

Aufgrund der Vereinbarung Punkt- vor Strichrechnung dürfen wir zum Beispiel (e) auch schreiben als $r\cdot(a+b) = r\cdot a + r\cdot b$.

*Beweis:* Wir beweisen die Kommutativregel $a + b = b + a$. Sind $a = (a_1, \dots, a_n)$ und $b = (b_1, \dots, b_n)$ zwei (beliebige) Tupel aus $\mathbb{R}^n$ so gilt:

$$\begin{aligned} a + b &= (a_1, \dots, a_n) + (b_1, \dots, b_n) = (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n) \\ &= (b_1 + a_1, \dots, b_n + a_n) = (b_1, \dots, b_n) + (a_1, \dots, a_n) \\ &= b + a. \end{aligned}$$

Man erkennt: Die Kommutativregel gilt, weil sie bei den reellen Zahlen $\mathbb{R}$ gilt; die Regel überträgt sich. Die anderen sieben Rechenregeln beweist man analog. □

Wir werden später weitere Rechenregeln und Eigenschaften von reellen Tupel kennenlernen.

Gegeben sind die reellen Tupel $a_1$, $a_2$, …, $a_r$ aus $\mathbb{R}^n$ und reelle Zahlen $s_1$, $s_2$, …, $s_r$. Dann heißt das reelle Tupel

$$s_1 a_1 + s_2 a_2 + \cdots + s_r a_r$$

**Linearkombination** (**lineare Kombination**) von $a_1$, $a_2$, …, $a_r$. Die reellen Zahlen $s_j$ heißen **Koeffizienten**. Das reelle Tupel $a$ ist eine Linearkombination der reellen Tupel $a_1$, $a_2$, …, $a_r$, wenn gilt $a = s_1 a_1 + s_2 a_2 + \cdots + s_r a_r$ für irgendwelche reelle Zahlen $s_1, s_2, \dots, s_r$.

*Beispiel 1.3* Für $(2, -3, 4, 5)$ und $(0, 2, 7, -1)$ aus $\mathbb{R}^4$ ist

$$2(2, -3, 4, 5) + (-1)(0, 2, 7, -1) = (4, -8, 1, 11)$$

eine Linearkombination mit den Koeffizienten 2 und $-1$. □

Gegeben sind $r \in \mathbb{N}$ und reelle Tupel $a_1$, $a_2$, …, $a_r$ aus $\mathbb{R}^n$. Dann heißt die Menge aller Linearkombinationen

$$\{s_1 a_1 + s_2 a_2 + \cdots + s_r a_r \mid s_1, s_2, \dots, s_r \in \mathbb{R}\}$$

**lineare Hülle** der Tupel $a_1$, $a_2$, …, $a_r$. Man schreibt $\mathrm{Lin}(a_1, a_2, \dots, a_r)$ für diese Menge.

*Beispiel 1.4* Für $(2, 1)$ aus $\mathbb{R}^2$ ist $\mathrm{Lin}(2, 1) = \{s(2, 1) \mid s \in \mathbb{R}\}$ die Menge der Linearkombinationen des Tupels $(2, 1)$. Zum Beispiel sind $(4, 2) \in \mathrm{Lin}(2, 1)$ und $(-8, -4) \in \mathrm{Lin}(2, 1)$, aber $(1, 1) \notin \mathrm{Lin}(2, 1)$. □

**Satz 1.2** *Sind $r \in \mathbb{N}$ und reelle Tupel $a_1$, $a_2$, …, $a_r$ aus $\mathbb{R}^n$ gegeben. Dann ist die lineare Hülle $\mathrm{Lin}(a_1, a_2, \dots, a_r)$ eine Teilmenge von $\mathbb{R}^n$, es ist also $\mathrm{Lin}(a_1, a_2, \dots, a_r) \subseteq \mathbb{R}^n$.*

*Beweis:* Sind $a_1$, $a_2$, …, $a_r$ aus $\mathbb{R}^n$, dann auch jedes Vielfache und auch die Summe. □

## 1.2 Visualisierungen von reellen Tupeln

Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ können wir uns als Punkte auf einer Geraden vorstellen. Hierzu legt man fest, wo 0 und 1 liegen, dann entspricht jeder reellen Zahl $x \in \mathbb{R}$ ein Punkt auf dieser Geraden. (Zwischen $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^1$ besteht nur ein formaler Unterschied.) Ganz ähnlich können wir uns reelle Zahlenpaare $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ als Punkte in einer Ebene vorstellen. Die waagrechte Gerade spielt dabei die Rolle von $\mathbb{R} \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$, die senkrechte Gerade die von $\{0\} \times \mathbb{R}$, siehe Bild 1.1. Zur Veranschaulichung von $\mathbb{R}^3$ zeichnet man ähnlich wie

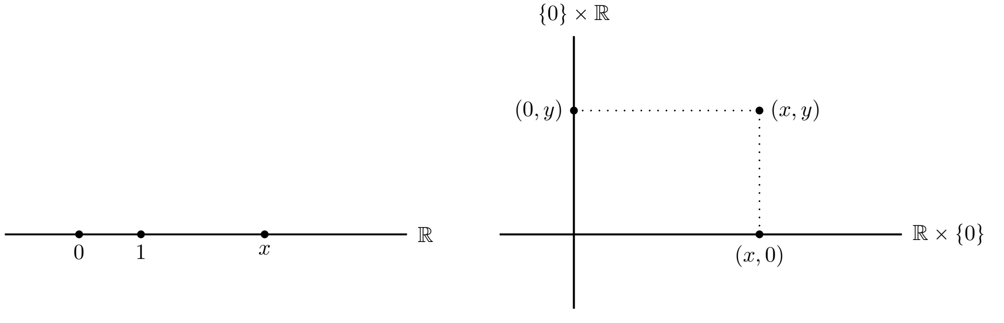



Bild 1.1: Die Menge $\mathbb{R}$ (links) und die Menge $\mathbb{R}^2$ (rechts) visualisiert.

bei $\mathbb{R}^2$ sie *Achsen* $\mathbb{R} \times \{0\} \times \{0\}$, $\{0\} \times \mathbb{R} \times \{0\}$ und $\{0\} \times \{0\} \times \mathbb{R}$, aber zweckmäßiger nur halb, sonst wird das Bild unübersichtlich.

Somit können wir uns die Menge $\mathbb{R}^2$ als Punkte in der Ebene vorstellen. Jede Menge von reellen Zahlenpaaren kann also als Menge von Punkten der Ebene aufgefasst werden. Umgekehrt kann man jeder Punktmenge der Ebene (geometrische Figur) als Menge von reellen Zahlenpaaren auffassen und rechnerisch behandeln. Das ist der Grundgedanke der *Analytischen Geometrie.*

In Bild 1.2 haben wir die Addition zweier reeller Paare und in Bild 1.2 die Multiplikation eines reellen Paares mit einer reellen Zahl dargestellt. Durch die Addition entsteht ein Parallelogramm mit den Eckpunkten zu den Paaren $(0, 0)$, $(a_1, a_2)$, $(b_1, b_2)$ und $(a_1 + b_1, a_2 + b_2)$. Durch die reelle Multiplikation wird der Punkt zu $(a_1, a_2)$ mit der reellen Zahl $r$ gestreckt (gestaucht).

Ist $o_2 \neq a \in \mathbb{R}^2$, so entsprechen den reellen Paaren $ra$ mit $r \in \mathbb{R}$ die Punkte auf der Geraden in der Ebene, die durch die Punkte zu $o_2$ und $a$ geht. Der linearen Hülle $\mathrm{Lin}(a)$ entspricht eine Ursprungsgerade in der Ebene, siehe Bild 1.3 links. Sind $o_2 \neq a \in \mathbb{R}^2$, $o_2 \neq b \in \mathbb{R}^2$ und ist $a$ kein reelles Vielfaches von $b$, so entsprechen den reellen Paaren $ra + sb$ mit $r, s \in \mathbb{R}$ alle Punkte der Ebene. Der linearen Hülle $\mathrm{Lin}(a, b)$ entspricht also die ganze Ebene.

Ist $o_3 \neq a \in \mathbb{R}^3$, so entsprechen den reellen Tripeln $ra$ mit $r \in \mathbb{R}$ die Punkte auf der Geraden im Raum, die durch die Punkte zu $o_3$ und $a$ geht. Der linearen Hülle $\mathrm{Lin}(a)$

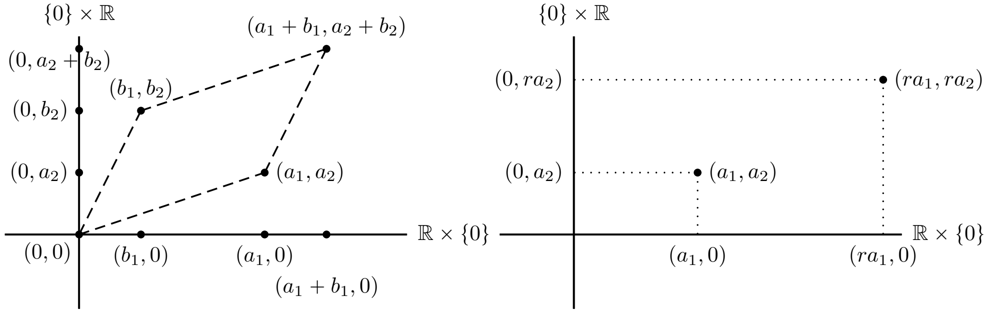



Bild 1.2: Addition (links) und reelle Multiplikation (rechts) in $\mathbb{R}^2$ visualisiert.

entspricht eine Ursprungsgerade im Raum. Ist $o_3 \neq a, b \in \mathbb{R}^3$ und ist $a$ kein reelles Vielfaches von $b$, so entsprechen den reellen Tripeln $ra + sb$ mit $r, s \in \mathbb{R}$ die Punkte auf der Ebene im Raum, die durch die drei Punkte zu $o_3$, $a$ und $b$ geht. Der linearen Hülle $\mathrm{Lin}(a, b)$ entspricht eine Ursprungsebene im Raum.

Eine andere Möglichkeit ein reelles Tupel zu visualisieren besteht darin, dass wir eine gerichtete Strecke (Pfeil) vom Koordinatenursprung zum Punkt zeichnen. In diesem Fall haben die Punkte auf der gerichteten Strecke keine spezielle Bedeutung, siehe Bild 1.3 (rechts).

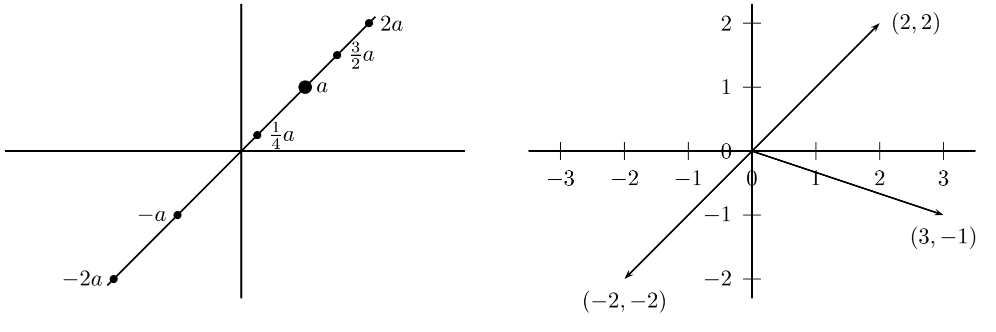



Bild 1.3: $\mathrm{Lin}(a)$ visualisiert (links). $(2, 2)$, $(-2, -2)$, $(3, -1)$ als Pfeil visualisiert (rechts).

## 1.3 Weitere Bemerkungen und Hinweise

Bitte beachten Sie, dass wir das Pluszeichen (Summenzeichen, Additionszeichen) $+$ in zwei verschiedenen Bedeutungen verwendet haben und auch noch verwenden werden: reelle Zahl plus reelle Zahl, reelles Tupel plus reelles Tupel. Bitte beachten Sie, dass wir das Malzeichen (Produktzeichen, Multiplikationszeichen) $\cdot$ in zwei verschiedenen

Bedeutungen verwendet haben und auch noch verwenden werden: reelle Zahl mal reelle Zahl, reelle Zahl mal reelles Tupel.

Oft wird ein reelles geordnetes Tupel reeller Vektor genannt. In moderner Mathematik ist ein Vektor ein Element eines Vektorraumes. Vektorräume werden wir in Kapitel 4 studieren. In Kapitel 4 werden wir zeigen, dass die Menge $\mathbb{R}^n$ mit den beiden gewöhnlichen Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ aus diesem Kapitel ein reeller Vektorraum ist. Dann ist es gerechtfertigt eine reelles geordnetes Tupel einen reellen Vektor aus $\mathbb{R}^n$ zu nennen. In Kapitel 4 werden wir noch mehr sehen: Die Menge $\mathbb{R}^n$ ist ein reeller Vektorraum der Dimension $n$, ja noch mehr, er ist der Prototyp der reellen Vektorräume der Dimension $n$.

Es ist $M$ eine beliebige Menge. Jede Abbildung $\phi : M \times M \to M$ heißt *innere Verknüpfung auf $M$*. Somit ist die Tupeladdition eine innere Verknüpfung auf $\mathbb{R}^n$. Es sind $M$, $N$ beliebige Mengen mit $M \neq N$. Jede Abbildung $\phi : N \times M \to M$ heißt *äußere Verknüpfung von $M$ mit $N$*. Somit ist die reelle Multiplikation eine äußere Verknüpfung von $\mathbb{R}^n$ mit $\mathbb{R}$.

Bitte beachten Sie: Bilder haben oft nur eine symbolische Bedeutung; sie geben die Situation stark vereinfacht wieder. Trotzdem sind solche Bilder als Denk- und Anschauungshilfe nicht zu verachten.

Jetzt möchte ich Ihnen noch ein paar Literaturhinweise geben. Zur Linearen Algebra gibt es viele Bücher, zumal in fast jedem Buch über Mathematik ein Kapitel zur Linearen Algebra enthalten ist. Tiefer gehende theoretische Ergebnisse, weitere Anwendungen, Modelle und Aufgaben zur Linearen Algebra finden Sie in [5, 4, 6, 10, 12, 15, 16, 20, 21, 22]. Die Renner unter den deutschsprachigen Büchern sind [3, 7, 11, 15]. Doch jetzt viel Erfolg bei den Aufgaben!

## 1.4 Aufgaben

**1.1** Kreuzen Sie die wahre(n) Aussage(n) an. Es ist $n \in \mathbb{N}$. Dann besteht $\mathbb{R}^n$ aus

- ☐ $n$ reellen Zahlen.
- ☐ $n$-Tupeln reeller Zahlen.
- ☐ $n$-Tupeln natürlicher Zahlen.
- ☐ Keine Aussage ist wahr.

*Lösung:*

| | | | |
|---|---|---|---|
| | × | | |

(Spaltenweise)

**1.2** Kreuzen Sie die wahre(n) Aussage(n) an. Es ist $\mathrm{Lin}((1,0),(0,1))$ gleich

- ☐ $\mathbb{R}^2$.
- ☐ $\{r(1,0) \mid r \in \mathbb{R}\}$.
- ☐ $\{r(0,1) \mid r \in \mathbb{R}\}$.
- ☐ $\{r(1,0) + r(0,1) \mid r \in \mathbb{R}\}$.
- ☐ $\{r_1(1,0) + r_2(0,1) \mid r_1, r_2 \in \mathbb{R}\}$.

☐ $\{r_1(1,0) + r_2(2,0) \mid r_1, r_2 \in \mathbb{R}\}$.

☐ $\{r_1(2,0) + r_2(0,-2) \mid r_1, r_2 \in \mathbb{R}\}$.

☐ $\{r_1(0,0) + r_2(1,0) + r_3(0,1) \mid r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{R}\}$.

☐ Keine Aussage ist wahr.

*Lösung:*

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| × | | | | × | | × | × | |

**1.3** Kreuzen Sie die wahre(n) Aussage(n) an. Der Menge $\mathrm{Lin}((1,1),(2,2))$ entspricht geometrisch

☐ eine Strecke.

☐ eine Gerade.

☐ eine Halbgerade.

☐ ein Kreis.

☐ eine Ellipse.

☐ eine Ebene.

☐ einem Parallelogramm.

☐ Keine Aussage ist wahr.

*Lösung:*

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | × | | | | | | |

(Spaltenweise)

**1.4** Gegeben sind $a = (2,1)$ und $b = (-1,1)$ aus $\mathbb{R}^2$. Bestimmen Sie $a + b$ und visualisieren Sie die reellen Zahlenpaare.

*Lösung:* Es ist $a + b = (2,1) + (-1,1) = (1,2)$. Für eine Visualisierung siehe Bild 1.4 (links).

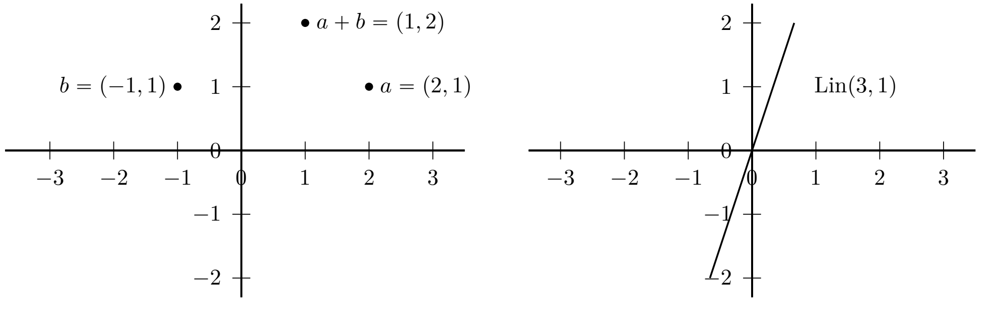



Bild 1.4: Zu Aufgabe 1.4 (links) und Aufgabe 1.5 (rechts).

**1.5** Geben Sie die Menge $\mathrm{Lin}(1,3) \subset \mathbb{R}^2$ an. Welcher geometrischen Figur entspricht diese Menge?

*Lösung:* Es ist $\mathrm{Lin}(1,3) = \{r(1,3) \mid r \in \mathbb{R}\}$. Die dazugehörige geometrische Figur ist eine Ursprungsgerade mit der Steigung 3 in der Ebene. Siehe Bild 1.4 (rechts).

**1.6** Gegeben sind $a = (-1, 2)$ und $b = (-3, -1)$ aus $\mathbb{R}^2$. Berechnen Sie $a + b$ und $a - 2b$.

*Lösung:* Es ist $a + b = (-1, 2) + (-3, -1) = (-1 - 3, 2 - 1) = (-4, 1)$ und $a - 2b = (-1, 2) - 2(-3, -1) = (-1, 2) - (-6, -2) = (-1 + 6, 2 + 2) = (5, 4)$.

**1.7** Es sind $u = (1, -1, 0, 2) \in \mathbb{R}^4$, $v = (-1, 2, 1, 0) \in \mathbb{R}^4$ und $r = 2 \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie $u + v$, $ru$ und $u - v$.

*Lösung:* Es sind $u + v = (1, -1, 0, 2) + (-1, 2, 1, 0) = (1 + (-1), (-1) + 2, 0 + 1, 2 + 0) = (0, 1, 1, 2)$, $ru = 2(1, -1, 0, 2) = (2, -2, 0, 4)$ und $u - v = (2, -3, -1, 2)$.

**1.8** Gegeben sind $a = (1, -3, 2, 4)$ und $b = (3, 5, -1, -2)$ aus $\mathbb{R}^4$. Berechnen Sie $a + b$, $5a$ und $2a - 3b$.

*Lösung:* Es ist $a + b = (1 + 3, -3 + 5, 2 - 1, 4 - 2) = (4, 2, 1, 2)$, $5a = ((5)(1), (5)(-3), (5)(2), (5)(4)) = (5, -15, 10, 20)$ und $2a - 3b = (2, -6, 4, 8) + (-9, -15, 3, 6) = (-7, -21, 7, 14)$.

**1.9** Geben Sie die Mengen $\mathrm{Lin}((1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0)) \subseteq \mathbb{R}^4$ und $\mathrm{Lin}((1, 0, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 0, 1)) \subseteq \mathbb{R}^5$ an.

*Lösung:* Es ist $\mathrm{Lin}((1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0)) = \{(r, s, 0, 0) \mid r, s \in \mathbb{R}\}$ und $\mathrm{Lin}((1, 0, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 0, 1)) = \mathbb{R}^5$.

**1.10** Es ist $o = (0, 0, 0, 0) \in \mathbb{R}^4$. Beweisen Sie die Rechenregel $a + o = a$ für alle $a \in \mathbb{R}^4$.

*Lösung:* Es ist $a + o = (a_1, a_2, a_3, a_4) + (0, 0, 0, 0) = (a_1 + 0, a_2 + 0, a_3 + 0, a_4 + 0) = (a_1, a_2, a_3, a_4) = a$ für jedes $a = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ aus $\mathbb{R}^4$. (Bitte beachten Sie. Wir haben im Beweis außer der Definition der Tupeladdition aus diesem Kapitel die Rechenregel $r + 0 = r$ für jede reelle Zahl $r$ verwendet haben. Außerdem ist das Zeichen $+$ in zweifacher Bedeutung verwendet worden, als Tupeladdition in $\mathbb{R}^4$ und als gewöhnliche Addition zweier reeller Zahl.)

## Sie sollten nun mit folgenden Begriffen umgehen können

Tupel, $\mathbb{R}^n$, Linearkombination, lineare Hülle.

# 2 Reelle Matrizen

Es sind $m$ und $n$ aus $\mathbb{N}$. Ein $n$-Tupel von $m$-Tupeln von Elementen aus $\mathbb{R}$

$$\big((a_{11},\ldots,a_{m1}),\ldots,(a_{1n},\ldots,a_{mn})\big) \in \underbrace{\mathbb{R}^m \times \cdots \times \mathbb{R}^m}_{n}$$

geschrieben in der Form

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

heißt **reelle Matrix der Ordnung** $(m,n)$. Die reellen Zahlen $a_{ij}$ sind die **Einträge** oder **Komponenten** der Matrix. Das reelle $n$-Tupel $(a_{i1},\ldots,a_{in}) \in \mathbb{R}^n$ ist die ***i*-te Zeile** der Matrix für $i = 1 : m$ und das reelle $m$-Tupel $(a_{1j},\ldots,a_{mj}) \in \mathbb{R}^m$ ist die ***j*-te Spalte** der Matrix für $j = 1 : n$. Der erste Index $i$ von $a_{ij}$ wird **Zeilenindex** und der zweite Index $j$ wird **Spaltenindex** genannt. Der Matrixeintrag $a_{ij}$ steht in der $i$-ten Zeile und $j$-ten Spalte. Die natürliche Zahl $m$ gibt die Anzahl der Zeilen und die natürliche Zahl $n$ gibt die Anzahl der Spalten der Matrix an.

*Beispiel 2.1* Die reelle Matrix $\big((1,7),(\sqrt{2},-3),(-2,\pi)\big) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ geschrieben in der Form

$$\begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} & -2 \\ 7 & -3 & \pi \end{bmatrix}$$

hat $m = 2$ Zeilen, $n = 3$ Spalten und $2 \cdot 3 = 6$ Einträge. Es ist $a_{11} = 1$, $a_{12} = \sqrt{2}$, $a_{13} = -2$, $a_{21} = 7$, $a_{22} = -3$ und $a_{23} = \pi$. Zum Beispiel ist $(1,\sqrt{2},-2)$ die erste Zeile und $(-2,\pi)$ die dritte Spalte der Matrix. Die Ordnung der Matrix ist $(2,3)$. □

Die Matrixeinträge $a_{ij}$ sind in diesem Buch fast immer reelle Zahlen, also $a_{ij} \in \mathbb{R}$ (oder natürlich Variablen, die für reelle Zahlen stehen). Gelegentlich ist es jedoch erforderlich, für die Matrixeinträge auch andere mathematische Objekte zuzulassen, zum Beispiel komplexe Zahlen, Funktionsterme oder Matrizen selbst.

Matrizen bezeichnen wir gewöhnlich mit großen lateinischen Buchstaben, zum Beispiel $A$, $B$, $C$, usw. Ist $A$ eine reelle Matrix der Ordnung $(m,n)$, so schreiben wir dafür auch

$[a_{ij}]$ mit $i = 1 : m$ und $j = 1 : n$. Die Menge aller reellen $(m, n)$-Matrizen bezeichnen wir mit $\mathbb{R}^{m\times n}$; es gilt also

$$\mathbb{R}^{m\times n} = \{[a_{ij}] \mid a_{ij} \in \mathbb{R},\ i = 1 : m \text{ und } j = 1 : n\}.$$

*Beispiel 2.2* Konstruieren Sie die Matrix $A = [a_{ij}]$ mit $a_{ij} = 3i - j^2$ für $i = 1 : 2$ und $j = 1 : 3$.

*Lösung:* Ist $a_{ij} = 3i - j^2$, dann ist $a_{11} = (3)(1) - 1^2 = 3 - 1 = 2$, $a_{12} = -1$, $a_{13} = -6$, $a_{21} = 5$, $a_{22} = 2$ und $a_{23} = -3$. Also ist

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -6 \\ 5 & 2 & -3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}.$$

□

**Satz 2.1** *Sind $A = [a_{ij}]$ und $B = [b_{ij}]$ aus $\mathbb{R}^{m\times n}$, so gilt $A = B$ genau dann, wenn $a_{ij} = b_{ij}$ für $i = 1, 2, \ldots, m$ und $j = 1, 2, \ldots, n$ ist.*

*Beweis:* Aus der Mengenlehre ist bekannt, dass zwei $n$-Tupel genau dann gleich sind, wenn ihre entsprechenden Koordinaten (Komponenten) gleich sind. Damit gelten folgende Überlegungen. Es ist $A = B$ genau dann, wenn

$$\big((a_{11}, \ldots, a_{m1}), \ldots, (a_{1n}, \ldots, a_{mn})\big) = \big((b_{11}, \ldots, b_{m1}), \ldots, (b_{1n}, \ldots, b_{mn})\big)$$

genau dann, wenn $(a_{1j}, \ldots, a_{mj}) = (b_{1j}, \ldots, b_{mj})$ für $j = 1 : n$ genau dann, wenn $a_{ij} = b_{ij}$ für $i = 1 : m$, $j = 1 : n$. □

*Beispiel 2.3* Die beiden Matrizen

$$\begin{bmatrix} 1 & x \\ y & -2 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

sind genau dann gleich, wenn $x = -1$ und $y = 2$ ist. □

Besteht eine Matrix aus einer einzigen Spalte, so heißt sie **Spaltenmatrix**, analog wird eine Matrix mit nur einer Zeile als **Zeilenmatrix** bezeichnet. Eine $(1, 1)$-Matrix ist sowohl Zeilen- als auch Spaltenmatrix und damit einfach eine reelle Zahl; man schreibt dann statt $[a]$ auch einfach $a$ (Abschnitt 2.3). Für Spaltenmatrizen verwenden wir auch kleine lateinische Buchstaben $a$, $u$, $v$, $x$, $y$, usw. Da es nicht notwendig ist, ihre Einträge doppelt zu indizieren, können wir die Spaltenmatrix $a$ mit $m$ Einträgen auch als

$$a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$$

schreiben. Mit $\mathbb{R}^{m\times 1}$ bezeichnet man die Menge der Spaltenmatrizen mit $m$ reellen Einträgen, und mit $\mathbb{R}^{1\times n}$ die Menge der Zeilenmatrizen mit $n$ reellen Einträgen.

## 2.1 Spezielle Matrizen

Vertauscht man Zeilen und Spalten einer Matrix $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m\times n}$, so erhält man die **transponierte Matrix** $A^T \in \mathbb{R}^{n\times m}$ mit $n$ Zeilen und $m$ Spalten: $A^T = [a_{ji}]$. Hierbei ist $i = 1 : m$ und $j = 1 : n$.

*Beispiel 2.4* Die Matrix

$$a = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 1} \quad \text{ist eine Spaltenmatrix und} \quad a^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times 2}$$

ist ihre Transponierte, sie ist eine Zeilenmatrix. Die Transponierte der Matrix

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2} \quad \text{ist die Matrix} \quad B^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}.$$

□

Eine Matrix $A$ mit $n$ Zeilen und $n$ Spalten heißt **quadratische Matrix der Ordnung** $n$. Ist eine quadratische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gegeben, dann bilden die Einträge $a_{11}$, $a_{22}$, $\ldots$, $a_{nn}$ die **Hauptdiagonale** von $A$.

Die Matrix

$$O_{mn} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n},$$

deren sämtliche Einträge Null sind, heißt **Nullmatrix**. Für die Nullmatrix aus $\mathbb{R}^{n\times n}$ schreibt man statt $O_{nn}$ oft kurz $O_n$. Die Indizes kann man auch weglassen, wenn die Größe klar ist.

Eine Matrix $D = [d_{ij}] \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ist eine **Diagonalmatrix**, wenn $d_{ij} = 0$ für $i \neq j$ gilt. Ist $n = m$, so hat eine Diagonalmatrix die folgende Struktur

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & & & \\ & d_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_{nn} \end{bmatrix}.$$

Vereinbarung: Schreiben wir in einer Matrix die Einträge nicht explizit, so steht dafür die Zahl Null.