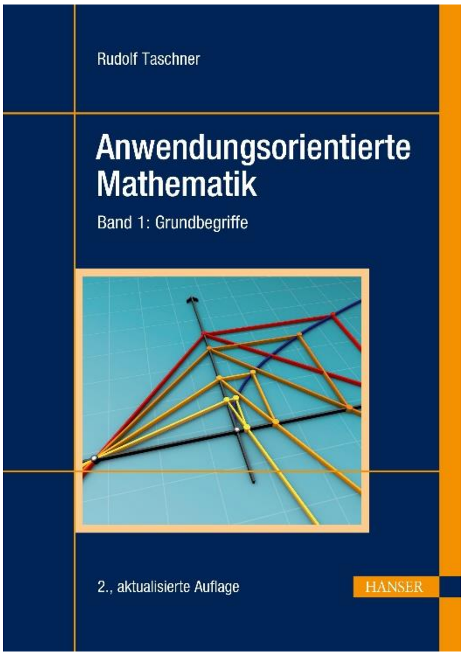
HANSER



Leseprobe

zu

Anwendungsorientierte Mathematik 1

von Rudolf Taschner

Print-ISBN: 978-3-446-47186-3
E-Book-ISBN: 978-3-446-47200-6

Weitere Informationen und Bestellungen unter

https://www.hanser-kundencenter.de/fachbuch/artikel/9783446471863

sowie im Buchhandel

Vorwort

Der Titel „anwendungsorientierte Mathematik“ ist zugleich Programm: „Anwendungsorientiert“ ist die im vorliegenden Lehrbuch dargebotene Mathematik in gleicher Weise, wie Bernard Friedman, Professor in Berkeley und Autor der glanzvollen „Lectures on Applications-Oriented Mathematics“, Mathematik verstanden hat. Als jene ganz besondere Geisteswissenschaft, die für alle unverzichtbar ist, die sich dem rationalen Erfassen der Welt und ihrer von der Vernunft geleiteten Gestaltung verschrieben haben. Sich an diese Personen zu wenden und eben diesen umfassenden Charakter der Mathematik vorzustellen, ist das vorrangige Ziel dieses auf drei Bände konzipierten Lehrbuchs.

Es handelt sich hierbei um eine Einführung in die Mathematik, welche die historische Entwicklung der zentralen mathematischen Konzepte betont und Exkurse in sprachliche Herleitungen einzelner Fachbegriffe sowie großzügige Abschweifungen in Erzählungen des geschichtlichen Umfeldes nicht scheut. Es handelt sich ferner hierbei um eine Einführung in die Mathematik, bei der nur das erklärt wird, was konstruktiv nachvollziehbar ist. Und es handelt sich hierbei um eine Einführung in die Mathematik, bei der das Augenmerk vor allem auf Themen gelegt wird, die für Anwendungen unumgänglich sind. Unnötige Abstraktheit wird vermieden. Hingegen wird die Betonung auf verständliche Anschaulichkeit, auf eingängige, vor allem historisch belegte Motivation der Begriffsbildungen, auf die Behandlung interessanter Themen und auf nachvollziehbare Beweisführungen gelegt.

Vorbilder für dieses Buch waren die bestechenden Vorlesungen und Seminare von Edmund Hlawka und Johann Cigler, sowie der Einblick in das mathematische Denken, der in der Zusammenarbeit mit Peter Gruber, Hans-Dominik Schwabl und Roman Schnabl gewonnen werden konnte. Diese eindrucksvollen Persönlichkeiten haben neben vielen anderen den Autor in seiner Sicht der Mathematik geprägt. Anlass, dieses Buch zu schreiben, ist die vom Autor an der Technischen Universität Wien zu verantwortende dreisemestrige Vorlesung „Mathematik für Studentinnen und Studenten der Elektrotechnik und Informationstechnik“. Der beeindruckend positive Zuspruch, der vonseiten der Hörerinnen und Hörer dieser Lehrveranstaltung erfolgt, bestärkt in der Zuversicht, dass die vorliegende Einführung in die Mathematik eine gute Aufnahme findet. Und dies trotz ihrer unkonventionellen Stoffanordnung und trotz ihrer zuweilen den gewohnten Rahmen verlassenden Präsentation von Definitionen und Denkmodellen. Kenner der Materie werden feststellen, dass – um nur ein paar Beispiele zu erwähnen – der Begriff der Konvergenz zwar schon von Anfang an im Zentrum steht, aber erst bei der Behandlung der unendlichen Reihen seine endgültige Fassung findet, dass die integrierbaren Funktionen keineswegs für alle Punkte eines Intervalls, sondern nur auf einer dichten Teilmenge des Intervalls definiert sein müssen, dass die gleichmäßige Stetigkeit einer über einem kompakten Intervall stetigen Funktion (wohl hier zum ersten Mal in der Lehrbuchliteratur) nach dem schönen Beweis von Brouwer auf direkte Weise begründet wird. Unkonventionelle Zugänge wie diese rechtfertigen es, die fast uferlos scheinende Lehrbuchliteratur von Einführungen in die Mathematik um ein weiteres Werk zu bereichern.

Wie der Vorlesung möge es auch dem vorliegenden, vom Verlag Hanser unter professioneller Betreuung von Christine Fritzsch und Katrin Wulst mit großer Sorgfalt herausgegebenen Buch gelingen, einerseits im Sinne der leider unvollendet gebliebenen „Einleitung in die Infinitesimalrechnung nach der genetischen Methode“ von Otto Toeplitz und andererseits im Geiste des von Luitzen Egbertus Jan Brouwer und Hermann Weyl favorisierten intuitionistischen Zugangs zur Mathematik den Leserinnen und Lesern die Faszination, die Weite und die Tragfähigkeit der Mathematik zu vermitteln. Dann darf man, trotz der gewissenhaften Korrekturarbeit von Andreas Körner und Carina Pöll, die noch immer verbliebenen Druckfehler dem Autor hoffentlich als lässliche Sünden nachsehen.

Innigst möchte ich meiner Frau Bianca und meinen Kindern Laura und Alexander danken: für ihre Nachsicht, für ihre Geduld, für ihre Zuneigung. Besonders stark und tief empfand ich sie beim Schreiben dieses Buches.

Wien, Januar 2014 *Rudolf Taschner*

Inhalt

Vorwort ... **5**

1 Zahlen ... **9**

1.1 Babylonisches Wurzelziehen ... 9
1.2 Satz des Pythagoras ... 13
1.3 Zahlen und Irrationalität ... 18
1.4 Dezimalzahlen und reelle Größen ... 24
1.5 Übungsaufgaben ... 31

2 Geometrie ... **36**

2.1 Kreis und Winkel ... 36
2.2 Länge des Kreisbogens ... 43
2.3 Punkte und Vektoren ... 51
2.4 Sinus- und Cosinustafeln ... 59
2.5 Geometrie der Ebene ... 63
2.6 Geraden in der Ebene ... 69
2.7 Karten und Punktmengen ... 77
2.8 Geometrie des Raumes ... 86
2.9 Geraden und Ebenen im Raum ... 92
2.10 Zylinder- und Kugelkoordinaten ... 98
2.11 Übungsaufgaben ... 104

3 Höhere Rechenmethoden ... **110**

3.1 Mehrdimensionale „Zahlen“ ... 110
3.2 Komplexe Ebene ... 114
3.3 Gleichungen höheren Grades ... 120
3.4 Logarithmentafeln ... 127
3.5 Natürlicher Logarithmus ... 131
3.6 Übungsaufgaben ... 138

4 Reihen und Konvergenz 141

4.1 Ägyptische Brüche 141
4.2 Bernoullis Ungleichungen 144
4.3 Reihen von Oresme und Leibniz 149
4.4 Konvergenz von Reihen 153
4.5 Vergleichsreihen 159
4.6 Übungsaufgaben 165

5 Funktion, Integral, Stetigkeit 168

5.1 Elementare Integralrechnung 168
5.2 Funktionen 176
5.3 Monotone Funktionen 185
5.4 Integrierbare Funktionen 191
5.5 Integration der Potenz 197
5.6 Stetige Funktionen 201
5.7 Stetige Erweiterung 207
5.8 Stetigkeit des Integrals 211
5.9 Gleichmäßige Stetigkeit 215
5.10 Übungsaufgaben 221

6 Regeln des Differenzierens 226

6.1 Differentiale 226
6.2 Differentiale und Geometrie 232
6.3 Differentiationsregeln 236
6.4 Abgeleitete Funktionen 243
6.5 Übungsaufgaben 249

7 Regeln des Integrierens 251

7.1 Erste wichtige Sätze 251
7.2 Elementare Integrationen 256
7.3 Logarithmus und verwandte Funktionen 261
7.4 Integration rationaler Funktionen 268
7.5 Komplexwertige Funktionen 272
7.6 Übungsaufgaben 275

Index 279

1 Zahlen

1.1 Babylonisches Wurzelziehen

Mathematik – das Wort ist sprachverwandt mit dem deutschen Begriff „munter“ – leitet sich aus dem griechischen máthema her, das „die Kenntnis“ oder „das Gelernte“ bedeutet. Hermann Weyl, der geistreichste Mathematiker der 20. Jahrhunderts, definierte Mathematik als „die Wissenschaft vom Unendlichen“. Wir werden bald erfahren, wie recht er damit hat.

Mathematik lässt sich weit in die Vorgeschichte, bis auf Kerbzeichen urzeitlicher Nomadenstämme zurückverfolgen. Das Wort „Zahl“ stammt nämlich von der indogermanischen Sprachwurzel del, die „Kerbe“ bedeutet; unser Wort Delle rührt ebenfalls davon her, wie auch das englische Verb „to tell“, das sowohl „erzählen“ wie auch ursprünglich „zählen“ bedeutet. Ein „teller“ ist ein Bankkassier.

Und sobald Menschen sesshaft wurden, lernten sie sehr schnell die elementarsten Begriffe der Geometrie. Sie wollten wissen, wie groß der Grund ist, den sie bebauen. Ein Bauer sieht vor sich eine Strecke. Um sie messen zu können, vergleicht er sie mit einer Längeneinheit, zum Beispiel einem Klafter, der bei ausgestreckten Armen von der einen Spitze der Hand zur anderen reicht. Wenn die Strecke ein bestimmtes Vielfaches, zum Beispiel das Fünffache des Klafters, lang ist, nennt der Bauer – und auch wir wollen uns an diese Sprechweise halten – dieses Vielfache, in unserem Beispiel die Zahl 5, die Seitenlänge der Strecke. Denn er bezieht sich dabei auf die ein für allemal festgelegte Einheitsstrecke eines Klafters.

Wir nehmen an, der Bauer misst sein rechteckiges Feld ab und stellt fest: Es ist 7 lang und 1 breit. Sein Nachbar bewirtschaftet ein rechteckiges Feld, das 6 lang und 2 breit ist. Und dessen Nachbar ein quadratisches Feld, dessen Länge und Breite jeweils 4 beträgt. Dem Umfange nach sind die drei Felder gleich groß. Aber der Nachbar des Bauern erntet mehr als er, und dessen Nachbar sogar mehr als doppelt so viel wie er. Weil es nicht auf den Umfang, sondern auf den Flächeninhalt der Felder ankommt. Diesen Flächeninhalt gilt es zu berechnen.

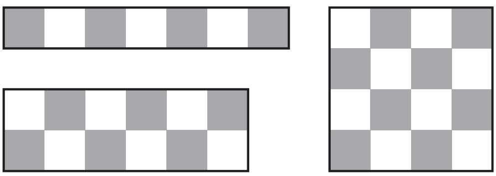


Bild 1.1 Drei rechteckige Felder: Alle drei besitzen gleichen Umfang, aber verschiedene Flächeninhalte.

Das über der Einheitsstrecke errichtete Quadrat definiert zugleich die Flächeneinheit. Wenn der Bauer sagt, dass eine bestimmte Zahl den Flächeninhalt seines rechteckigen Feldes bezeichnet, meint er, dass exakt so viele Einheitsquadrate in das Rechteck passen, wie diese Zahl angibt. So teilen Zahlen der Grund und Boden bearbeitenden Bevölkerung mit, wie groß ein Acker ist, den sie bewirtschaftet.

Ihre eigentliche Geburtsstunde erlebte die Mathematik in den Hochkulturen des alten Ägypten und des Zweistromlandes. Bereits Babylonier beherrschten ein höchst anspruchsvolles Verfahren, aus Zahlen Wurzeln zu ziehen. Sie gingen dabei folgendermaßen vor:

Wenn man die Seitenlänge eines Quadrates kennt, sei sie 1, 2, 3, 4 oder irgendeine andere Zahl, erhält man den Inhalt der Quadratfläche, indem man diese Seitenlänge mit sich selbst multipliziert: $1^2 = 1$, $2^2 = 4$, $3^2 = 9$, $4^2 = 16$, und so fort. Wie aber geht man vor, so fragten die babylonischen Gelehrten, wenn man den Inhalt der Quadratfläche kennt? Wie lässt sich daraus die Seitenlänge des Quadrates zurückermitteln? Wenn a den Inhalt der Quadratfläche symbolisiert, schreibt man, in moderner Notation, für die zugehörige Seitenlänge $\sqrt{a}$ und nennt dies die *Wurzel* von a. Das eigenartige, sich über das Symbol a erstreckende Wurzelzeichen ist ein stilisierter Kleinbuchstabe r, der das lateinische Wort radix, das „Wurzel" bedeutet, abkürzt.

Es ist klar, dass man von Quadratzahlen sofort die Wurzel „ziehen" kann: $\sqrt{1} = 1$, $\sqrt{4} = 2$, $\sqrt{9} = 3$, $\sqrt{16} = 4$, und so weiter. Wie aber berechnet man zum Beispiel $\sqrt{10}$, also die Seitenlänge jenes Quadrates, dessen Fläche den Inhalt 10 besitzt?

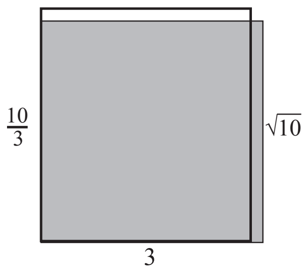


Bild 1.2 Das graue Quadrat hat 10 als Flächeninhalt und $\sqrt{10}$ als Seitenlänge. Das Rechteck mit 3 und mit 10/3 als Länge und Breite besitzt den gleichen Flächeninhalt.

Offensichtlich symbolisiert $x = 3$ die Seitenlänge eines etwas zu kleinen Quadrates, denn es ist $x^2 = 9$, eine kleinere Zahl als 10. Doch allzu weit entfernt von der wahren Lösung ist man damit nicht: Die Rechnung $4^2 = 16$ zeigt, dass $\sqrt{10}$ wohl näher bei 3 als bei 4 zu vermuten ist. Zwar hat, so der nächste Gedanke, nicht das Quadrat mit $x = 3$ als Seitenlänge den Flächeninhalt 10, wohl aber jenes Rechteck, das $x = 3$ als die eine und das $y = 10/3$ als die andere Seite besitzt. Denn in der Tat ist mit diesen Setzungen $x \cdot y = 10$. Die kürzere Rechteckseite mit der Länge $x = 3$ ist kleiner als $\sqrt{10}$, hingegen ist die längere Rechteckseite mit der Länge $y = 10/3$ größer als $\sqrt{10}$. Den wahren Wert, so vermuteten die babylonischen Gelehrten voreilig, bekommt man wohl, wenn man das arithmetische Mittel von x und y bildet, also

$$\frac{x+y}{2} = \frac{1}{2}\left(3 + \frac{10}{3}\right) = \frac{19}{6}\ .$$

Tatsächlich zeigt die Rechnung

$$\left(\frac{19}{6}\right)^2 = \frac{19^2}{6^2} = \frac{361}{36} = 10 + \frac{1}{36}\ ,$$

dass das Quadrat dieses Mittels den gewünschten Wert 10 – wenn auch nur knapp, so aber doch – verfehlt.

An dieser Stelle entwickelt ein uns namentlich nicht bekannter babylonischer Mathematiker einen sehr raffinierten Gedanken. Das gleiche Verfahren, das uns von 3 über 10/3 zu 19/6 geführt hat, kann man noch einmal zur Anwendung bringen. Das Quadrat mit $x_1 = 19/6$ als Seitenlänge hat eine geringfügig zu große Fläche. Aber jenes Rechteck, das

$$x_1 = \frac{19}{6}$$

als die eine und das

$$y_1 = \frac{10}{\frac{19}{6}} = \frac{60}{19}$$

als die andere Seite besitzt, stimmt in seiner Fläche mit dem Flächeninhalt des Quadrates überein. Denn in der Tat ist mit diesen Setzungen $x_1 \cdot y_1 = 10$. Die längere Rechteckseite mit der Länge $x_1 = 19/6$ ist ein wenig größer als $\sqrt{10}$, hingegen ist die kürzere Rechteckseite mit der Länge $y_1 = 60/19$ ein wenig kleiner als $\sqrt{10}$. Wieder liegt es nahe, das arithmetische Mittel, diesmal von x_1 und y_1, zu bilden:

$$\frac{x_1 + y_1}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{19}{6} + \frac{60}{19}\right) = \frac{721}{228}.$$

Nun scheint der wahre Wert für $\sqrt{10}$ gefunden zu sein. Allerdings wieder nur scheinbar. Denn es zeigt die Rechnung

$$\left(\frac{721}{228}\right)^2 = \frac{721^2}{228^2} = \frac{519\,841}{51\,984} = 10 + \frac{1}{51\,984}\ ,$$

dass auch diesmal der gesuchte Wert 10 – wenn auch nur haarscharf – verfehlt wurde.

Wer besessen davon ist, dem wahren Wert auf die Spur zu kommen, wird das Verfahren noch einmal anzuwenden versuchen: Wir wissen, dass

$$x_2 = \frac{721}{228}$$

nur hauchdünn größer als $\sqrt{10}$ ist, dementsprechend wird

$$y_2 = \frac{10}{\frac{721}{228}} = \frac{2280}{721}$$

nur um Haaresbreite kleiner als $\sqrt{10}$ sein. Wie ist es dann mit

$$\frac{x_2 + y_2}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{721}{228} + \frac{2280}{721}\right) = \frac{1\,039\,681}{328\,776}$$

bestellt? Auch hier ist $\sqrt{10}$ nicht völlig präzise erfasst, aber wegen

$$\left(\frac{1\,039\,681}{328\,776}\right)^2 = \frac{1\,039\,681^2}{328\,776^2} = \frac{1\,080\,936\,581\,761}{108\,093\,658\,176} = 10 + \frac{1}{108\,093\,658\,176}$$

ist der Abstand zum wahren Wert $\sqrt{10}$ geradezu lächerlich gering.

Aber auch wenn man das Verfahren noch einmal, diesmal mit

$$x_3 = \frac{1\,039\,681}{328\,776}$$

als einen nur hauchdünn zu großen und mit

$$y_3 = \frac{10}{\frac{1\,039\,681}{328\,776}} = \frac{3\,287\,760}{1\,039\,681}$$

als einen nur hauchdünn zu kleinen Wert anwendet, auch der bereits dick angeschwollene Bruch

$$\frac{x_3 + y_3}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1\,039\,681}{328\,776} + \frac{3\,287\,760}{1\,039\,681}\right) = \frac{2\,161\,873\,163\,521}{683\,644\,320\,912}$$

verfehlt – wenn auch nur extrem knapp – den wahren Wert von $\sqrt{10}$.

Um die hohe Qualität des babylonischen Wurzelziehens würdigen zu können, empfiehlt es sich, die hier erhaltenen Näherungen an $\sqrt{10}$ in der modernen Schreibweise mit Dezimalpunkt und Nachkommastellen anzugeben. (Wir schreiben das „Komma" als Dezimalpunkt, um den Beistrich für Aufzählungen zur Verfügung zu haben. Trotzdem sprechen wir von „Nachkommastellen", wenn wir Stellen rechts vom Dezimalpunkt meinen.) Wir begannen mit $x = 3$ und $y = 10/3 = 3.333\ldots$ Danach erhielten wir als erstes Paar

$$x_1 = \frac{19}{6} = \mathbf{3.1}66\,666\,666\,666 \quad \text{und} \quad y_1 = \frac{60}{19} = \mathbf{3.1}57\,894\,736\,842\,.$$

Wir einigen uns dabei darauf, dass die genannten Dezimalbrüche auf zwölf Stellen nach dem Dezimalpunkt angegeben werden. Die fett gedruckten Ziffern sind jene, welche bei beiden Näherungen übereinstimmen, sodass wir bereits jetzt von $\sqrt{10} = 3.1\ldots$ ausgehen können. Das nächste Paar von Näherungen liefert

$$x_2 = \frac{721}{228} = \mathbf{3.162\,2}80\,701\,754 \quad \text{und} \quad y_2 = \frac{2280}{721} = \mathbf{3.162\,2}74\,618\,585\,,$$

woraus man $\sqrt{10} = 3.1622\ldots$ ersieht. Das nächste Paar von Näherungen liefert schließlich

$$x_3 = \frac{1\,039\,681}{328\,776} = \mathbf{3.162\,277\,660\,16}9 \quad \text{und} \quad y_3 = \frac{3\,287\,760}{1\,039\,681} = \mathbf{3.162\,277\,660\,16}7\,,$$

worin bis auf die letzte alle angegebenen Nachkommastellen übereinstimmen und man mit Fug und Recht

$$\sqrt{10} = 3.162\,277\,660\,16\ldots$$

schreiben kann. Die drei Punkte nach der zuletzt angeschriebenen Nachkommastelle bedeuten: Alle vor ihnen genannten Stellen stimmen so, wie sie angeschrieben sind; danach könnte man – wenn man wollte – noch beliebig viele weitere und genauso richtige Nachkommastellen anheften, würde man das Verfahren des babylonischen Wurzelziehens nur genügend lange vorantreiben.

Die Babylonier selbst kannten noch keine Dezimalbrüche. Sie teilten die Einheit in 60 gleich große Teile ein, die man als *Minuten* bezeichnet und mit einem Minutenstrich $'$ abkürzt. Die

Minuten selbst teilten sie ebenso in 60 gleich lange *Sekunden* ein, die man mit einem Sekundendoppelstrich $''$ bezeichnet. Um zum Beispiel einen Bruch wie 19/6 in Minuten und Sekunden umrechnen zu können, geht man folgendermaßen vor:

$$\frac{19}{6} = 3 + \frac{1}{6} = 3 + \frac{60'}{6} = 3 + 10' \, .$$

Ein wenig mühsamer ist es, den Bruch 60/19 in Minuten und Sekunden umzurechnen:

$$\frac{60}{19} = 3 + \frac{3}{19} = 3 + \frac{180'}{19} = 3 + 9' + \frac{9'}{19} = 3 + 9' + \frac{540''}{19} \approx 3 + 9' + 28'' \, ,$$

wobei in der babylonischen Schreibweise der noch verbliebene Rest von 8/19 Sekunden generös weggerundet wurde. Trennt man, wie bei den Dezimalbrüchen, den ganzzahligen Teil und die Minuten mit einem tiefgestellten Punkt, kann man die Pluszeichen weglassen und bekommt so im babylonischen Sechziger- oder Hexagesimalsystem das Paar von Näherungen

$$x_1 = \frac{19}{6} = 3.10' \quad \text{und} \quad y_2 = \frac{60}{19} = 3.09'28'' \, .$$

Die Brüche $x_2 = 721/228$ und $y_2 = 2280/721$ ergeben im Hexagesimalsystem umgerechnet (und auf Sekunden gerundet)

$$\frac{721}{228} = 3 + \frac{37}{228} = 3 + \frac{185'}{19} = 3.09' + \frac{14'}{19} = 3.09' + \frac{840''}{19} \approx 3.09'44''$$

und

$$\frac{2280}{721} = 3 + \frac{117}{721} = 3 + \frac{7020'}{721} = 3.09' + \frac{531'}{721} = 3.09' + \frac{31\,860''}{721} \approx 3.09'44'' \, .$$

Somit war aus babylonischer Sicht klar, dass $\sqrt{10} = 3.09'44''$ ist. Eine Fortführung des Verfahrens erübrigt sich aus dieser Sicht der Dinge.

Weitaus eingehender und kritischer betrachteten erst die Mathematiker des antiken Griechenland diese Berechnungen. Doch bevor wir darauf zu sprechen kommen, sei erörtert, wozu man das Wurzelziehen eigentlich benötigt.

1.2 Satz des Pythagoras

Hermann und Dorothea – die Namen der beiden sind Goethes Epos geschuldet – gehen von einem gemeinsamen Ausgangspunkt in Richtung Osten. Hermann legt drei, Dorothea vier Kilometer zurück. Es ist klar, dass sie danach einen Kilometer voneinander entfernt sind.

Hermann und Dorothea gehen von einem gemeinsamen Ausgangspunkt weg, diesmal Hermann nach Osten und Dorothea nach Westen. Hermann legt wieder drei, Dorothea wieder vier Kilometer zurück. Auch in diesem Fall ist klar, dass sie danach sieben Kilometer voneinander entfernt sind.

Hermann und Dorothea gehen von einem gemeinsamen Ausgangspunkt weg, diesmal Hermann nach Norden und Dorothea nach Osten. Hermann legt wieder drei, Dorothea wieder vier Kilometer zurück. Wie weit die beiden nun voneinander entfernt sind, ist keineswegs so unmittelbar zu erkennen wie in den beiden zuvor genannten Beispielen. Selbstverständlich könnte man auf dem Plan die Entfernung abmessen und – mögliche Messfehler dabei in Kauf nehmend – auf eine Entfernung von fünf Kilometern schließen. Aber dies hat nichts mit den simplen Rechnungen $4-3=1$ und $4+3=7$ der beiden obigen Beispiele gemein.

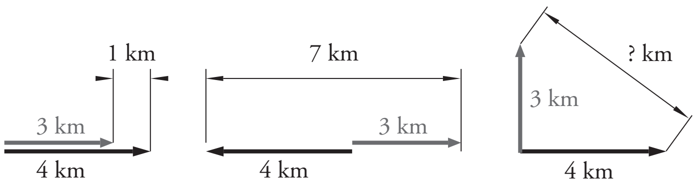


Bild 1.3 Die Wanderungen von Hermann und Dorothea an den drei Tagen. Wie weit die beiden nach Erreichen ihrer Ziele voneinander entfernt sind, teilt bei den beiden ersten Tagen die Skizze unmittelbar mit.

Offenkundig beruht der qualitative Unterschied des dritten zu den beiden zuvor genannten Beispielen darin, dass in diesem dritten Beispiel der geradlinige, von West nach Ost verlaufende, eindimensionale Weg verlassen wurde. Hermann und Dorothea „erobern" im dritten Beispiel gleichsam die zweidimensionale Ebene. Und es war wohl eine der beeindruckendsten Erkenntnisse, die möglicherweise schon ägyptische, sicher aber babylonische Gelehrte gewonnen haben, dass man aus der Tatsache, dass die West-Ost-Richtung zur Süd-Nord-Richtung einen rechten Winkel einschließt, folgern kann: Die Entfernung von fünf Kilometern, welche Hermann und Dorothea im dritten Beispiel nach ihrer Wanderung besitzen, lässt sich ebenso durch eine Rechnung bestimmen, wie die beiden zuvor genannten Entfernungen von einem und von sieben Kilometer.

Ausgangspunkt, um diese Erkenntnis gewinnen zu können, war die Einsicht, dass eine Multiplikation, wie zum Beispiel drei mal vier, mehr bedeutet als eine vereinfachte Darstellung einer mehrfach durchzuführenden Addition mit dem gleichen Summanden. Drei mal vier ist nicht nur ein dreifaches Addieren der Zahl vier, drei mal vier stellt zugleich den Flächeninhalt eines Rechtecks dar, dessen eine Seite drei und dessen andere Seite vier Längeneinheiten lang sind.

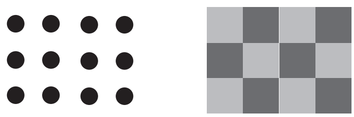


Bild 1.4 Das Produkt von drei mit vier ist einerseits als Punktmuster erfassbar, andererseits als Flächeninhalt eines Rechtecks.

Dass man im Produkt $a \cdot b$, einfacher oft ohne Multiplikationspunkt als ab geschrieben, den Flächeninhalt des Rechtecks mit den Seitenlängen a und b erkennen kann, erlaubt ein unmittelbares Verstehen von Rechengesetzen: Des *kommutativen* Rechengesetzes $ab = ba$, weil man das Rechteck um einen rechten Winkel drehen kann, ohne dass es dabei seinen Flächeninhalt ändert. Des *distributiven* Rechengesetzes $a(b+c) = ab + ac$, weil man auf der rechten Seite der Formel zwei Rechtecke mit den Längen b und c sieht, welche die gleiche Höhe a besitzen, und sich auf der linken Seite der Formel diese beiden Rechtecke zu einem Rechteck mit der Länge $b+c$ zusammengeschoben vorstellt. Und des *assoziativen* Rechengesetzes

$a \cdot bc = ab \cdot c = abc$, weil das Produkt dreier Zahlen dem Rauminhalt eines Quaders mit diesen drei Zahlen als Längen seiner Kanten entspricht.

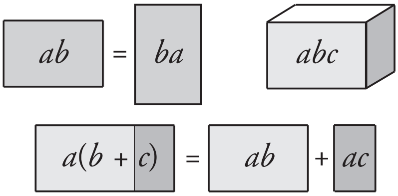


Bild 1.5 Das kommutative Rechengesetz links oben, das assoziative Rechengesetz rechts oben und das distributive Rechengesetz unten anschaulich verdeutlicht

Ein Wort zur Bezeichnung der Multiplikation sei noch verloren: Wenn man konkrete Zahlen miteinander multipliziert, kann man sowohl den Multiplikationspunkt wie auch das Multiplikationskreuz schreiben: $3 \cdot 4 = 3 \times 4 = 12$. Insbesondere im angloSächsischen Bereich ist das Multiplikationskreuz noch gang und gäbe, und dies aus zwei Gründen: Erstens weil eine Verwechslung mit dem Dezimalpunkt dadurch ausgeschlossen wird, und zweitens – wobei dieser Grund der wirklich triftige sein dürfte – weil der Multiplikationspunkt eine Erfindung des deutschen Gelehrten Gottfried Wilhelm Leibniz ist, den Englands höchst bewundertes Genie Sir Isaac Newton mit unstillbarem Ingrimm bekämpfte: Newton vermutete – wie wir heute wissen: zu Unrecht –, Leibniz hätte ihm die Erfindung der Differential- und Integralrechnung gestohlen. Doch zurück zur Bezeichnung der Multiplikation: Denkt man sich Buchstaben, welche Zahlen symbolisieren, miteinander multipliziert, ist vom Gebrauch des Multiplikationskreuzes abzuraten, denn eine Verwechslung mit dem häufig verwendeten Symbol x ist zu befürchten. Bei Buchstaben eignet sich der Multiplikationspunkt besser, oder man fügt die Buchstaben gleich eng aneinander. Diese Schreibweise erinnert überdies an die Konvention, dass die Multiplikation stärker bindet als die Addition. Unvoreingenommen weiß man bei einer Rechnung wie $a + bc + d$ (gar wenn man sie als $a + b \cdot c + d$ oder als $a + b \times c + d$ schreibt) nicht, in welcher Reihenfolge sie auszuführen sei. Würde man sie von links nach rechts lesen, müsste man zuerst a und b addieren, danach die Summe mit c multiplizieren und schließlich zu diesem Produkt d addieren. Aber man hat sich von alters her darauf geeinigt, zuerst das Produkt bc zu berechnen und danach zu diesem sowohl a als auch d zu addieren. Bekanntlich kann man mithilfe von Klammern jede andere Vorgangsweise regeln, zum Beispiel die oben genannte (und der Konvention widersprechende) als $(a + b)\,c + d$. Allein aufgrund dieser Konvention brauchen wir das distributive Rechengesetz nicht schwerfällig als $a\,(b + c) = (ab) + (ac)$ zu schreiben, sondern mit zwei Klammern weniger. Wie man überhaupt im Formelumgang Geübte daran erkennt, dass sie unnötige Klammern vermeiden. So haben wir zum Beispiel durch die Schreibweise $a \cdot bc = ab \cdot c$ beim assoziativen Rechengesetz elegant ohne Klammern zum Ausdruck gebracht, dass wir eigentlich $a\,(bc) = (ab)\,c$ meinten.

Wenden wir uns wieder der geometrischen Bedeutung der Multiplikation als Flächeninhalt zu: Wenn sich die Länge eines Quadrates aus der Summe zweier mit a und b symbolisierten Zahlen zusammensetzt, beträgt sein Flächeninhalt $(a + b)^2$. Aus der linken Skizze in Bild 1.6, in der das Quadrat in zwei kleinere Quadrate mit den Seitenlängen a und b sowie in zwei gleich große Rechtecke mit a und b als Länge und Breite zerfällt, erkennt man unmittelbar die Gültigkeit der berühmten Formel

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

In der mittleren Skizze von Bild 1.6 denken wir uns beide Rechtecke jeweils entlang einer Diagonale aufgeschnitten; sie zerfallen in vier rechtwinklige Dreiecke, welche die Kathetenlängen a und b besitzen. (Die Katheten – das griechische Wort káthetos bedeutet „das Herabgelassene“, „das Senkblei“ – sind die beiden Dreiecksseiten, die den rechten Winkel einschließen. Die dritte und längste Dreiecksseite heißt die Hypotenuse, hergeleitet aus den griechischen Wörtern hypó, das „unten“ bedeutet, und teínein, das „sich erstrecken“ bedeutet. Die Länge der Hypotenuse bezeichnen wir mit c.) Wir bemerken, dass die beiden Dreieckswinkel, welche die Katheten mit der Hypotenuse einschließen, einander zu einem rechten Winkel ergänzen. Nun verschieben wir die vier Dreiecke in dem großen Quadrat so, dass ihre Hypotenusen im Inneren des großen Quadrates ein dazu schräg gedrehtes, kleineres Quadrat aufspannen, wie es die rechte Skizze von Bild 1.6 zeigt. Dessen Flächeninhalt beträgt c^2.

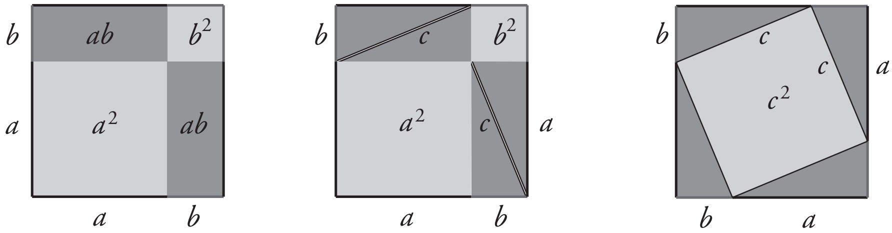


Bild 1.6 Links der Beweis der Formel $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$, in der Mitte die beiden Rechtecke in vier rechtwinklige Dreiecke aufgeschnitten und rechts die Dreiecke so versetzt, dass sich daraus der Satz des Pythagoras ergibt

Wenn man bedenkt, dass die Gleichheit

$$c^2 + 2ab = (a+b)^2$$

besteht, und wenn man von der daraus folgenden Formel

$$c^2 + 2ab = a^2 + b^2 + 2ab$$

von beiden Seiten die zwei Rechtecksflächeninhalte $2ab$ subtrahiert, gewinnt man

$$c^2 = a^2 + b^2 \,,$$

den sogenannten

Lehrsatz des Pythagoras: Das Quadrat über der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks besitzt den gleichen Flächeninhalt wie die Summe der Flächeninhalte der Quadrate über den Katheten.

Hieraus ergibt sich die Antwort auf die Frage, wie weit Hermann von Dorothea entfernt ist, wenn die beiden von einem gemeinsamen Ausgangspunkt gestartet sind, Hermann drei Kilometer nach Norden und Dorothea vier Kilometer nach Osten: Die Rechnung $3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2$ belegt, dass sie tatsächlich exakt fünf Kilometer voneinander entfernt sein müssen.

Wahrscheinlich hatten schon ägyptische Vermessungsbeamte in grauer Vorzeit gewusst, dass ein Dreieck mit den Seitenlängen 3, 4 und 5 dazu dient, einen rechten Winkel zu schlagen.

Diesen benötigten sie, um nach den jährlichen Überflutungen des Landes durch den Nil rechteckige Felder abgrenzen und den Bauern zuteilen zu können. Wahrscheinlich spannten sie zu diesem Zweck eine geschlossene Schnur, auf der sie in gleichen Abständen zwölf Knoten geknüpft hatten, so zu einem Dreieck, dass die drei Seiten jeweils 3, 4 und 5 Strecken von einem Knoten zum nächsten lang sind. Wenn man dies durchführt, ist jener Winkel, welcher der längsten Dreiecksseite gegenüberliegt, ein exakt rechter Winkel.

Es ist uns nicht bekannt, ob die Ägypter wirklich begriffen, dass es sich bei dieser Konstruktion um einen genauen rechten Winkel handelt, oder ob sie dies bloß vermuteten, oder ob sie sich mit der Erfahrung begnügten, dass mit dieser Konstruktion ein rechter Winkel für ihre Feldvermessungen hinreichend präzise zur Verfügung steht. Es ist aber gewiss, dass sowohl babylonische Mathematiker wie auch Gelehrte anderer sehr früher Hochkulturen, lange vor bzw. unabhängig von Pythagoras, *beweisen* konnten, dass ein Dreieck mit Seitenlängen, die mit a, b, c symbolisiert werden, genau dann ein rechtwinkliges Dreieck ist, wenn $c^2 = a^2 + b^2$ zutrifft. Eine typische Aufgabe aus einem babylonischen Rechenbuch lautet: „Ein ursprünglich an einer senkrechten Wand gelehnter 30 Fuß langer Balken ist von oben 6 Fuß herabgerutscht. Wie weit hat er sich dabei waagrecht am Boden von der Wand entfernt?“

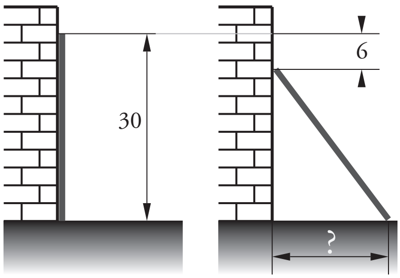


Bild 1.7 Illustration der Aufgabe aus dem babylonischen Lehrbuch: Links lehnt der Balken senkrecht an der Wand, rechts ist er um 6 Fuß von oben herabgerutscht.

Gleich darauf wird die Antwort gegeben: „6 von 30 abgezogen: 24 siehst du.“ Der Autor der Aufgabe weist damit auf das rechtwinklige Dreieck hin, welches 30 Fuß – die Länge des Balkens – als längste Seite und 24 Fuß – der senkrechte Abstand des Balkens vom Boden – als eine weitere Seite besitzt. Wir sehen ein rechtwinkliges Dreieck mit $c = 30$ als Länge der Hypotenuse und mit $b = 24$ als Länge einer Kathete. Bezeichnet a die Länge der noch unbekannten Kathete, ergibt sich aus $30^2 = a^2 + 24^2$, also aus $900 = a^2 + 576$ zunächst $a^2 = 900 - 576 = 324$. Die mit Tabellen der Quadratzahlen ausgestatteten babylonischen Schulkinder finden sofort $18^2 = 324$ heraus. Genau diese Lösung steht auch im Rechenbuch: „18 Fuß am Boden hat er sich entfernt.“ Die Kinder werden sogar noch zu einer Kontrollrechnung gezwungen, denn der pedantische Rechenbuchverfasser fragt im Anschluss: „Wenn sich der Balken 18 Fuß am Boden entfernt hat, wie viel ist er herabgekommen?“

Dass den babylonischen Gelehrten ein Beweis des pythagoreischen Satzes zur Verfügung gestanden sein muss, erkennt man aus der Tatsache, dass sie wussten: Ein Dreieck, bei dem die Seiten 12 709, 13 500 und 18 541 Längeneinheiten lang sind, stellt ein rechtwinkliges Dreieck dar. Selbst wenn man sich auf die Längeneinheit Millimeter einigt, hätte dieses Dreieck bei einer Zeichnung die gewaltigen Ausmaße von fast 20 Meter – es ist völlig undenkbar, dass dieses Wissen der Babylonier aus experimenteller Überprüfung gewonnen wurde. So genau kann kein Mensch zeichnen.

Und die babylonischen Gelehrten erkannten zugleich, dass man zur Längenberechnung der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks oft die Methode des Wurzelziehens benötigt: Das rechtwinklige Dreieck zum Beispiel, dessen Katheten eine und drei Längeneinheiten lang sind, besitzt wegen $1^2 + 3^2 = 1 + 9 = 10$ eine Hypotenuse, die $\sqrt{10}$ Längeneinheiten lang sein müsste.

Diese letzte Bemerkung führt uns zu Pythagoras und jenen Rechnungen, die aus seiner Feder stammen.

1.3 Zahlen und Irrationalität

Pythagoras von Samos gehört jenen Denkern an, welche die griechische Philosophie begründeten, lange vor dem großen attischen Philosophen Sokrates, und die man deshalb „Vorsokratiker“ nennt. Zur Zeit des Pythagoras, etwa 500 v. Chr., konnten diese ersten Denker ohne Rücksicht auf Vorbilder oder Autoritäten ungehindert kühne Thesen verkünden. Es waren allesamt Thesen gegen den Aberglauben. Denn einer Sache waren sich alle Vorsokratiker sicher: Die von Homer und von Hesiod geschilderte Götterwelt ist Illusion. Es gibt sie nicht: den nach allem was weiblich ist gierenden Göttervater Zeus, die ihn eifersüchtig verfolgende Hera, die aus dem Schaum des Meeres geborene Aphrodite, die aus dem Kopf des Zeus entsprungene, ewig jungfräuliche Athene, den dunklen, die Unterwelt beherrschenden Hades und seine in seinem Schattenreich verzweifelt hausende Persephone, all diese und noch viele andere Gottheiten und Halbgötter, sie alle sind Produkte überspannter Phantasien. Sie sind glatter Schwindel. Modern gesprochen: Homer und Hesiod haben in den Augen der Vorsokratiker das erfunden, was man heute Soap-Operas nennt. Am Olymp, jenem Berg, auf dem die Götter hausen, spielen sich Intrigen, Tragödien und Komödien sonder Zahl ab, die – wie bei Soap-Operas üblich – kein Ende finden. Denn der einzige Unterschied, so hören wir von den einfallsreichen Dichtern, zwischen Menschen und Göttern ist, dass jene sterblich sind, diese aber nicht sterben können.

Die Soap-Opera von Zeus und seiner Sippe ist Lug und Trug. Wer den Olymp besteigt, entdeckt am Gipfel keine unsterblichen Götter, nur tote Steine. So fanden sich die ersten Philosophen in einem von Göttern entleerten, dunklen und riesigen Kosmos wieder, den sie nicht mit Mythen zu füllen, sondern mit ihrem Denken zu erfassen trachteten. In diesem Sinne können wir das Wort des Vorsokratikers Heraklit von Ephesos verstehen, der seine Schüler zu sich lockte, indem er ihnen stolz auf sich zeigend von der Spitze eines Hügels aus zurief: „Kommt her, auch hier wohnen die Götter!“

Was ist das Fundament des Kosmos? Auf diese Frage gab jeder der Vorsokratiker eine jeweils andere, aber gerade ihm und seinen Getreuen überzeugend klingende Antwort: Für Heraklit war es das Feuer, das Symbol des ewigen Wandels, dem der Kosmos unterworfen ist. Aus der Sicht der modernen Physik gar nicht so naiv gedacht, wenn man das Wort „Feuer“ durch den ihm verwandten Begriff „Energie“ ersetzt. Für Anaximenes von Milet war es die Luft, die manchmal ätherisch dünn, manchmal komprimiert sein kann, zuweilen sogar so verdichtet, dass wir sie als flüssig, gar als fest empfinden. Für Thales von Milet war es das Wasser – verständlich, wenn man bedenkt, dass man in Griechenland von vielen Anhöhen aus das Meer am Horizont sieht und erspäht, wie es sich dort mit dem helleren Blau des Himmels trifft. Auch der Himmel scheint für Thales aus Wasser zu bestehen, das zuweilen als Regen aus den Wolken auf die Erde fällt. An den Quellen erkennt man, dass auch aus der Erde Wasser hervorsprudelt, und sogar der Körper des Menschen besteht zum Großteil aus Wasser.

Seine Zeitgenossen hatte Thales dadurch beeindruckt, dass er erfolgreich eine Sonnenfinsternis, der Legende nach jene Sonnenfinsternis, die sich am 28. Mai 585 v. Chr. ereignete, voraussagte. Dies gelang ihm durch Rechnungen, die er von Astronomen im Zweistromland gelernt haben dürfte. Er muss mit seiner Prognose einen ungeheuren Eindruck erzielt haben. Man stelle sich vor: Thales verkündet feierlich am 27. Mai dieses Jahres, dass am nächsten Tag für ein paar Minuten sich der Himmel verfinstern, Dämmerung hereinbrechen und die Sonnenscheibe verschwinden werde – und tatsächlich sehen zur angekündigten Stunde die, zum Teil noch dem Aberglauben an die griechischen Götter verfallenen Leute, dass die Prophezeiung des Thales zutrifft. Dieser Mann, so werden die meisten überzeugt gewesen sein, besitzt übernatürliche Geisteskräfte.

Pythagoras von Samos, der Thales als Lehrer hatte, wusste hingegen, dass es nicht übernatürliche Geisteskräfte, sondern bloße Rechnungen waren, die diese sichere Vorhersage erlaubten. Wie alle anderen Vorsokratiker ist er von der Gewissheit getragen, dass wir nicht dem irrationalen Gutdünken der homerischen Götter ausgeliefert sind, dass das Universum keine Bühne einer Soap-Opera, kein wildes Chaos ist, sondern ein geordneter Kosmos, den man verstehen kann. Nun – so können wir vermuten – stellt Pythagoras die naheliegende und zugleich alles entscheidende Frage: *Wie gelingt es überhaupt, zu verstehen?* Was sind gleichsam die „Atome des Verstehens“? Wo setzt Verstehen an? Was ist so einfach und klar, dass sich jede weitere Erläuterung erübrigt? Wie lauten die *Axiome,* die zu bezweifeln sinnlos ist, weil es an ihnen nichts mehr zu zweifeln gibt?

Pythagoras meint, diese Frage beantworten zu können: Nichts, so glaubt er zu erkennen, ist elementarer als das Zählen. Denn wenn man einmal das Zählen begriffen hat, das mit 1 anhebt und durch ständiges Hinzufügen von 1 von jeder Zahl zur nächsten gelangt, ist es einfach unvorstellbar, anders zu zählen als auf diese Weise. Zählen ist eine Tätigkeit, bei der Menschen über alle denkbaren Verschiedenheiten hinweg in völlig gleichartiger Weise vorgehen. Ja man ist sich sogar einig, dass – sollte der extrem unwahrscheinliche Fall eines Funkkontaktes mit intelligenten Wesen eines fremden Planetensystems zustande kommen – dieser Kontakt über das allen denkenden Wesen gemeinsame Zählen erfolgen müsste. Nur wenn wir erkennen, welche Zahlen einem Sachverhalt zugrunde liegen, haben wir ihn völlig begriffen. Etwas wirklich zu verstehen bedeutet: es so gut zu begreifen, wie man das Zählen begreift.

Man kann das Zählen mit dem Erklimmen einer bis in den Himmel reichenden Jakobsleiter vergleichen. Das erste Buch der Bibel, übersetzt in der Sprache Luthers, erzählt davon: „Jakob zog aus von Beer-Seba und reiste gen Haran und kam an einen Ort, da blieb er über Nacht. Denn die Sonne war untergegangen. Und er nahm einen Stein des Orts und legte ihn zu seinen Häupten und legte sich an dem Ort schlafen. Und ihm träumte. Und siehe, eine Leiter stand auf der Erde, die rührte mit der Spitze an den Himmel. Und siehe, die Engel Gottes stiegen daran auf und nieder.“

Wenn ein Engel weiß, dass er auf die erste Sprosse der Leiter steigen kann, und wenn der Engel weiß, dass er von jeder Sprosse auf die nächste steigen kann, dann kann der Engel beliebig hoch Richtung Himmel klettern. Der französische Universalgelehrte Blaise Pascal dürfte dieses Bild der Himmelsleiter vor seinen Augen gehabt haben, als er feststellte: Weiß man von einem Sachverhalt, dass er für die Zahl 1 zutrifft, und ist von diesem Sachverhalt gesichert, dass er, sobald er für eine Zahl zutrifft, auch für die ihr nachfolgende, um 1 größere Zahl zutrifft, dann stimmt dieser Sachverhalt für jede Zahl. Man nennt diese Einsicht Pascals das *Prinzip*

Index

A
abgeschlossene Menge, 85
abgeschlossenes Intervall, 185
Ableitung
– partielle, 230
Ableitungsfunktion, 245
Abschnitt, 74
absolut konvergent, 156
Absolutbetrag, 112
absolute Differenz, 27
absoluter Fehler, 249
Abstand, 204
Abul-Wafa, 63
Achse
– imaginäre, 114
– reelle, 114
Additivität, 196
d'Alembert, Jean le Rond, 161
allgemeine Potenz, 137
alternierende harmonische Reihe, 150
alternierende Reihe, 151
Ampère, André-Marie, 113
Anaximenes, 18
Ankathete, 41
Anstieg, 74
Anstiegswinkel, 74
Anteil
– gerader, 263
– linearer, 237
– nichtlinearer, 237
– ungerader, 263
antikommutatives Gesetz, 90
Apollonius von Perge, 264
Archimedes, 43, 44, 46–48, 50, 51, 81, 106, 121, 138, 141–143, 197, 198, 236, 264, 267
archimedische Spirale, 81
Arcus
– des Cosinus, 49
– des Sinus, 49
– des Tangens, 273
Area
– des Cosinus hyperbolicus, 265
– des Sinus hyperbolicus, 265
– des Tangens hyperbolicus, 265
Argument, 116
Argumentbereich, 177
Argumentwert, 176
Aristoteles, 23
arithmetisches Mittel, 33
arithmetisch-geometrisches Mittel, 35
Aryabhata, 40
assoziatives Gesetz, 14
assoziatives Rechengesetz, 53, 54
Atlas, 83
Aufriss, 86
Aufrissebene, 86
äußeres Produkt, 90
Avogadro, Amadeo, 228
Axiom, 19, 37
Azimut, 101

B
Bachmann, Paul, 237
Basis, 129
– des natürlichen Logarithmus, 134
Basler Problem, 158
bedingt konvergent, 156
Bernoulli, Jakob, 144, 145, 147–149, 155, 158, 168, 172
Bernoulli, Johann, 149, 158, 168, 172
Bernoulli, Nikolaus, 149
bernoullische Ungleichung, 145, 146, 199
Berührpunkt, 186
– uneigentlicher, 186
beschränkte Funktion, 212
bestimmtes Integral, 254
Betrag, 27, 112, 113, 116
bijektiv, 105
Bildbereich, 177
Binärziffer, 61

Binom, 268
binomische Formel für Kuben, 121
binomische Formel für Quadrate, 15
Bogenmaß, 48
Bogenminute, 37
Bogensekunde, 37
Bolzano, Bernard, 217
Bombelli, Raffaele, 125, 126
Breitenkreis, 100, 102
Brouwer, Luitzen Egbertus Jan, 220
Bruchbestandteil, 135
Bruchzahl, 141
Bürgi, Jost, 129–131, 136, 179

C
Cantor, Georg, 218
Cardano, Hieronimo, 123–125, 127
cardanosche Formel, 124
cartesisches Koordinatensystem, 66, 89
Castrensis, Robertus, 40
casus irreducibilis, 125
Cauchy, Augustin-Louis, 154, 160–164, 201, 204, 207, 226, 245–247
cauchysches Konvergenzkriterium, 154
Ceulen, Ludolph van, 51
Cosinus hyperbolicus, 263
Cosinusfunktion, 179
Cosinussatz, 108
Cosinustafel, 59
Cotangens, 42
Cremonensis, Gerardus, 40

D
Definitionsbereich, 177
delisches Problem, 126
Descartes, René, 64
Determinante, 75
Dezimalpunkt, 12
Dezimalzahl, 25
dicht, 27, 186
Differential, 229
Differentialgleichung, 230
Differentialquotient, 230
Differentiation, 230
– der Wurzel, 240
– des Kehrwerts, 239
– des Tangens, 242
– einer Konstanten, 238
Differentiationsregel
– für Arcusfunktionen, 267
– für Areafunktionen, 267
– für Cosinus, 236
– für Exponentialfunktion, 263
– für Sinus, 236
Differenzenquotient, 244
differenzierbar, 245, 247
Diskriminante
– der kubischen Gleichung, 124
– der quadratischen Gleichung, 120
distributives Gesetz, 14
distributives Rechengesetz, 54, 56
divergent, 156
Drehstreckung, 117
Dreiecksungleichung, 204
Dreieckszahl, 20
Durchschnitt, 83

E
Ebene, 94
Ebenenbüschel, 97
einfache Nullstelle, 269
Einheitspunkt, 64, 87
Einheitsvektor, 57
Einheitswurzel, 119
Einstein, Albert, 142
entgegengesetzte Größe, 113, 115
entgegengesetzter Vektor, 53
entgegengesetzter Winkel, 37
erhabener Winkel, 37
erste Mediane, 179
Erweiterung, 178
Erzeugende, 100, 102
Eudoxos, 43
Euklid, 37, 104
Euler, Leonhard, 149, 159, 274, 277
eulersche Formel, 274
eulersche Konstante, 278
eulersche Substitution, 276
eulersche Summenformel, 277
Exponent, 129
Exponentialfunktion, 179

F
Faraday, Michael, 113

Fehler, absoluter, 249
Fehler, prozentualer, 249
Fehler, relativer, 249
feinere Zerlegung, 193
de Fermat, Pierre, 64
Ferrari, Lodovico, 123
Ferro, Scipione del, 123
Fior, Antonio Maria, 123
Formel
– binomische für Kuben, 121
– binomische für Quadrate, 15
– eulersche, 274
– für den doppelten Winkel, 58
– für den halben Winkel, 45
– von Cardano, 124
– von Heron, 109
Funktion, 176
– abgeleitete, 245
– beschränkte, 212
– differenzierbare, 245, 247
– gerade, 181
– gleichmäßig stetige, 216
– integrierbare, 194
– komplexe, 178
– periodische, 181
– rationale, 268
– reelle, 178
– rein quadratische, 183
– stetig differenzierbare, 246, 247
– stetige, 203
– ungerade, 181
– verkettete, 178
Funktionsgraph, 179
Funktionskurve, 179
Funktionswert, 176

G
ganze Zahl, 25
ganzzahliger Teil, 134
Gauß, Carl Friedrich, 35, 113, 114, 116, 118, 119, 125, 134
Gaußklammer, 134, 223
Gay-Lussac, Joseph Louis, 227
Gebiet, 82
Gegenkathete, 41
genauer Bildbereich, 177
geometrische Reihe, 148
geometrische Summe, 144
geometrisches Mittel, 33
Gerade, 69, 92
gerade Funktion, 181
gerade Zahl, 25
gerader Anteil, 263
Gesetz
– antikommutatives, 90
– assoziatives, 14
– distributives, 14
– kommutatives, 14
gestreckter Winkel, 37
Gibbs, Josiah Willard, 90
gleichmäßig stetig, 216
Gleichung, 72
– kubische, 122
– quadratische, 120
– reine, 119
Gleichungssystem, 70
von Goethe, Johann Wolfgang, 13
Grad, 36, 268
Graßmann, Hermann, 51, 52, 54, 114
Graph, 179
Grenzwert
– linksseitiger, 210
– rechtsseitiger, 210
gröbere Zerlegung, 193
Größe
– entgegengesetzte, 113, 115
– komplexe, 113
– konjugierte, 113, 115
– reelle, 30
Grundriss, 86
Grundrissebene, 86

H
halboffenes Intervall, 185
Hamilton, Sir William Rowan, 110–113, 125
harmonische Reihe, 149
harmonisches Mittel, 33
Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, 251
Heaviside, Oliver, 188
Heavisidefunktion, 188
Heraklit, 18
Heron, 109
Hesiod, 18

Hipparch, 37, 59
Hippasos, 23, 24
Hippokrates, 43
Höhensatz, 104
Homer, 18
Horizontalkomponente, 57
de l’Hôpital, Guillaume François Antoine, 158
Hudde, Jan, 123
Hyperbel, 264
Hypotenuse, 16
Hypsikles, 37

I
imaginäre Achse, 114
Imaginärteil, 115
Induktion, vollständige, 20
infinitesimal, 229
inkommensurabel, 23
inneres Produkt, 67, 89
Integral, 172
– bestimmtes, 254
– unbestimmtes, 252
– uneigentliches, 214
– uneigentliches erster Art, 214
– uneigentliches zweiter Art, 214
Integration
– durch Substitution, 258
– partielle, 260
Integrationsgrenze, 195
Integrationskonstante, 253
Integrationsregel
– für Cosinus, 257
– für Exponentialfunktion, 263
– für Kehrwertfunktion, 263
– für Sinus, 257
Integrationsvariable, 195
integrierbar, 194
Intervall, 185
– abgeschlossenes, 185
– halboffenes, 185
– offenes, 185
– uneigentliches, 185
Iverson, Kenneth Eugene, 134

J
Jacobi, Carl Gustav, 230
Jones, William, 49
Joseph II., 131

K
Karte, 80
Kathete, 16
Kathetensatz, 104
Kegel, 102
Kehrwert, 112, 114
Kehrwertfunktion, 177
Kepler, Johannes, 130
Kettenregel, 247
Koeffizient, 268
Koeffizient des linearen Glieds, 120, 122
Komma, 12
kommutatives Gesetz, 14
kommutatives Rechengesetz, 53
kompakte Menge, 85
Kompaktheitsargument, 221
Kompaktum, 85
komplementärer Winkel, 41
Komplementmenge, 85
komplexe Ebene, 114
komplexe Funktion, 178
komplexe Größe, 113
komplexe Zahl, 113
Komponente, 65, 88
kongruent, 216
konjugierte Größe, 113, 115
Konstante, 71
konstantes Glied, 120, 122
konvergent, 154
Konvergenzkriterium von Cauchy, 154
Koordinate, 64, 88
Koordinatenachse, 63
Koordinatensystem, 64
Kreis, 36
Kreisgleichung, 79
Kreuzprodukt, 90
Kreuzriss, 87
Kreuzrissebene, 86
kubische Gleichung, 122
Kugel, 102
Kugelkoordinate, 101

L
Lagrange, Joseph-Louis, 246
Landau, Edmund, 237

Landau-Symbol, 237, 243
Länge, 53
Laufindex, 153
Leibniz, Gottfried Wilhelm, 15, 118, 125, 148, 150–153, 155, 157–159, 166, 168, 170–172, 176, 193, 195, 197, 201, 226, 229, 232–235, 237, 238, 244, 245, 252
lineare Verzinsung, 145
linearer Anteil, 237
linksseitiger Grenzwert, 210
Logarithmentafel, 129
Logarithmus, 129
– natürlicher, 133, 136
Logarithmusfunktion, 179
Lösung
– partikuläre, 119
– spezielle, 119
Luther, Martin, 19, 128

M
Majorantenreihe, 160
Mann, Thomas, 198
Marcellus, 43
Maria Theresia, 131
Mathematik, 9
Maximum, 218
Maxwell, James Clerk, 113
Mediane, 179
mehrfache Nullstelle, 270
Menge, 82
– abgeschlossene, 85
– kompakte, 85
– offene, 81
– symmetrische, 263
– zusammenhängende, 82
Meridian, 102
Minute, 12
Mittel
– arithmetisches, 33
– arithmetisch-geometrisches, 35
– geometrisches, 33
– harmonisches, 33
Mittelpunkt, 106
Mittelwertsatz, 256
de Moivre, Abraham, 118, 125, 158
Möndchen des Hippokrates, 43
Monom, 268
monoton fallend, 187
monoton nicht fallend, 187
monoton nicht wachsend, 187
monoton wachsend, 187
Musil, Robert, 125

N
Nachkommaanteil, 135
Nachkommastelle, 12
nächstkleinere ganze Zahl, 223
natürliche Zahl, 26
natürlicher Logarithmus, 133, 136
del Nave, Hannibal, 123
negative Zahl, 25
Neper, John, 131–136, 138, 179
Newton, Sir Isaac, 15, 100, 110, 118, 158, 201, 226, 229, 232, 233, 235, 237, 238, 245, 247
nichtlinearer Anteil, 237
normal, 37
Normalform
– der kubischen Gleichung, 122
– der quadratischen Gleichung, 120
Normalkomponente, 57
Normalvektor, 57
Normalvektorgleichung, 72, 95
Nullstelle, 269
– einfache, 269
– mehrfache, 270
Nullvektor, 53
Nullwinkel, 41

O
Obersumme, 191
offene Menge, 81
offenes Intervall, 185
Öffnungswinkel, 102
Ordner, 87
Oresme, Nicole, 149, 150, 155, 162
Orientierung, 90
orthogonal, 37

P
Pacioli, Luca, 123
parallel, 38
Parallelenaxiom, 38
Parallelkoordinatensystem, 66
Parameter, 70

Parameterdarstellung, 70, 93, 94
Partialbruch, 269
Partialbruchzerlegung, 165, 269
Partialsumme, 150, 153
partielle Ableitung, 230
partielle Integration, 260
partikuläre Lösung, 119
Pascal, Blaise, 19
Periode, 181
periodische Funktion, 181
Peripheriewinkel, 39
Peripheriewinkelsatz, 39
von Peuerbach, Georg, 63
Phase, 116
Plücker, Julius, 249
Polarform, 116
Polarkoordinate, 77
Polarwinkel, 101
Polynom, 268
Polynomfunktion, 268
positive Zahl, 25
Potenzregel, 239, 240
– bei der Integration, 257
Pringsheim, Alfred, 197–200, 257
Pringsheim, Katja, 198
Produktintegration, 259
Produktregel, 238
– bei der Integration, 259
projizierend, 94
prosthaphäretisch, 128
prozentualer Fehler, 249
Ptolemäus, Claudius, 59, 63
Pythagoras, 16, 18–22, 30, 41, 66, 67, 79, 104, 137, 201, 202, 233
pythagoreisches Komma, 137
pythagoreisches Tripel, 21

Q

quadratische Gleichung, 120
quadratische Resolvente, 124
Quadratzahl, 21
Quaternion, 110
– entgegengesetztes, 112
– konjugiertes, 112
Quotientenregel, 240
Quotiententest, 161

R

rationale Funktion, 268
rationale Zahl, 177
Realteil, 115
Rechengesetz
– assoziatives, 53, 54
– distributives, 54, 56
– kommutatives, 53
rechte Handregel, 90
rechter Winkel, 37
rechtsseitiger Grenzwert, 210
reelle Achse, 114
reelle Funktion, 178
reelle Größe, 30
reelle Zahl, 30
Regiomontanus, Johannes, 63
Reihe, 153
– absolut konvergente, 156
– alternierende, 151
– alternierende harmonische, 150
– bedingt konvergente, 156
– divergente, 156
– geometrische, 148
– harmonische, 149
– konvergente, 154
Reihenrest, 155
rein quadratische Funktion, 183
reine Gleichung, 119
relativer Fehler, 249
Richtungsvektor, 69, 92, 94
Riemann, Bernhard, 193–197
Ries, Adam, 127
Rolle, Michel, 256

S

de Saint-Vincent, Grégoire, 262
Satz
– des Pythagoras, 16
– über die Beschränktheit des Integrals, 212
– vom endlichen Zuwachs, 254
– vom Maximum, 218
– vom unbestimmten Integral, 253
– von der Integrierbarkeit stetiger Funktionen, 219
– von der konstanten Funktion, 252
– von der Nullstelle, 217
– von Leibniz über alternierende Reihen, 152

– von Thales, 39
– von Viète, 121
– von Weierstraß, 220
Schaubild, 179
Scheitel, 37
Schenkel, 37
Schnittpunkt, 75
Schranke, 212
schwach monoton fallend, 187
schwach monoton wachsend, 187
Schwerpunkt, 106
Sehne, 38
Sekante, 235
Sekunde, 13
Sinus, 40
Sinus hyperbolicus, 263
Sinusfunktion, 179
Sinussatz, 108
Sinustafel, 59
Skala, 24
Skalar, 25
skalares Produkt, 67, 89
Skalarteil, 110
Sokrates, 18
spezielle Lösung, 119
spitzer Winkel, 37
Spur, 96
Stammfunktion, 213, 251
stetig, 203
stetig differenzierbar, 246, 247
Stifel, Michael, 128, 129, 131, 136, 179
Strahl, 37
streng monoton fallend, 187
streng monoton wachsend, 187
stumpfer Winkel, 37
Substitution
– eulersche, 276
– weierstraßsche, 276
Summe, 154
– geometrische, 144
Summenformel der geometrischen Reihe, 155
Summenregel, 238
– bei der Integration, 256
Summensatz
– des Tangens, 108
– für Cosinus, 58
– für Sinus, 58
supplementärer Winkel, 37
Supremum, 218
symmetrisch, 204
symmetrische Menge, 263

T
Tangens, 42
Tangens hyperbolicus, 264
Tangente, 42
Tartaglia, Nicolo, 123
Teilsumme, 150
Thales, 18, 19, 40
triangulum characteristicum, 235

U
Ulug Beg, 63
Umkehrfunktion, 179
unbestimmtes Integral, 252
uneigentlicher Berührpunkt, 186
uneigentliches Integral, 214
– erster Art, 214
– zweiter Art, 214
uneigentliches Intervall, 185
unendlich, 143
ungerade Funktion, 181
ungerade Zahl, 25
ungerader Anteil, 263
Ungleichung
– bernoullische, 145, 146, 199
Untersumme, 192
Ursprung, 64, 87

V
Variable, 70
– abhängige, 71
– unabhängige, 71
von Vega, Georg, 131
Vektor, 51
– entgegengesetzter, 53
Vektorprodukt, 90
Vektorteil, 110
Vereinigung, 84
verkettete Funktion, 178
Vielfachheit, 270
Viète, François, 23, 120, 121, 124
voller Winkel, 41

Vollkegel, 102
Vollkugel, 102
vollständige Induktion, 20
Vollzylinder, 100

W
Wallis, John, 143
Weierstraß, Karl, 220, 221, 226
weierstraßsche Substitution, 276
Wertetabelle, 179
Weyl, Hermann, 9
Winkel, 37, 56
– entgegengesetzter, 37
– erhabener, 37
– gestreckter, 37
– komplementärer, 41
– rechter, 37
– spitzer, 37
– stumpfer, 37
– supplementärer, 37
– voller, 41
Winkelfeld, 37
Wurzel, 10, 119
Wurzelfunktion, 177
Wurzeltest, 161

Z
Zahl, 9
– ganze, 25
– gerade, 25
– komplexe, 113
– nächstkleinere ganze, 223
– natürliche, 26
– negative, 25
– positive, 25
– rationale, 177
– reelle, 30
– ungerade, 25
Zahlengerade, 24
Zentriwinkel, 39
Zerlegung, 187
– feinere, 193
– gröbere, 193
Zinseszins, 145
Zinsfaktor, 145
zusammenhängende Menge, 82
zweite Mediane, 179
Zwischenpunkt, 194
Zwischensumme, 194
Zylinder, 99
Zylinderkoordinate, 99