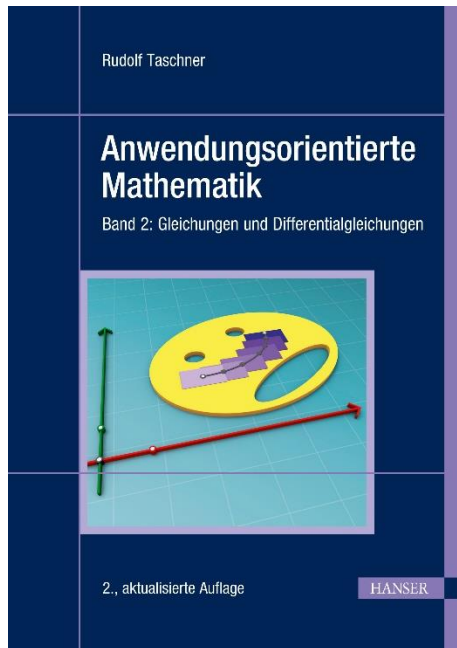


HANSER



Leseprobe

zu

Anwendungsorientierte Mathematik 2

von Rudolf Taschner

Print-ISBN: 978-3-446-47187-0

E-Book-ISBN: 978-3-446-47201-3

Weitere Informationen und Bestellungen unter

<https://www.hanser-kundencenter.de/fachbuch/artikel/9783446471870>

sowie im Buchhandel

© Carl Hanser Verlag, München

Vorwort

Gleichungen und Differentialgleichungen, die das zentrale Thema des zweiten Bandes meines Lehrbuchs über Anwendungsorientierte Mathematik bilden, werden von der Differentialrechnung im Reellen und von der Differentialrechnung im Komplexen umrahmt. Nicht alle in diesem Band vorgestellten Details müssen beim ersten Durchlesen intensiv studiert werden. Auch bei der Vorlesung für Studentinnen und Studenten der Elektro- und Informationstechnik an der Technischen Universität Wien, die dem Buch zugrunde liegt, werden einige der hier ausführlich erörterten Abschnitte nur skizzenhaft präsentiert. So kann man ohne Schaden für das Kennenlernen der wichtigsten Erkenntnisse zum Beispiel die Abschnitte 2.5, 2.10, 4.4, 4.7, 5.3, 5.6 überspringen und für eine spätere und genauere Reflexion bewahren.

Die Ziele des Lehrbuchs werden in diesem Band konsequent weiter verfolgt: Es soll eine Einführung in die Mathematik geboten werden, welche die historische Entwicklung der zentralen mathematischen Konzepte betont und Exkurse in sprachliche Herleitungen einzelner Fachbegriffe sowie großzügige Abschweifungen in Erzählungen des geschichtlichen Umfeldes nicht scheut. Es soll eine Einführung in die Mathematik geboten werden, bei der nur das erklärt wird, was konstruktiv nachvollziehbar ist. Und es soll eine Einführung in die Mathematik geboten werden, bei der das Augenmerk vor allem auf Themen gelegt wird, die für Anwendungen unumgänglich sind.

Kenner der Materie werden wie beim ersten Band feststellen, dass die Anordnung des Lehrstoffs zuweilen ungewohnt ist. So werden *vor* den linearen die nichtlinearen Gleichungssysteme behandelt, der Existenz- und Eindeigkeitssatz findet nicht im fünften Kapitel über Differentialgleichungen, sondern schon viel früher seinen angemessenen Ort, die abstrakte lineare Algebra kommt erst dann zur Sprache, wenn man bereits genug über Determinanten und Matrizen Bescheid weiß. Ich scheute auch nicht davor zurück, den Integralsatz von Cauchy in seiner Homologie- und nicht in der üblichen Homotopieversion vorzustellen. Hier halte ich mich vor allem an das glänzende Lehrbuch „Complex Analysis“ von Lars Ahlfors. Ebenso übernahm ich den von Raymond Redheffer vorgeschlagenen Zugang zum Kurvenintegral, der keine rektifizierbaren Kurven voraussetzt, sondern just jene „Kurvenstücke“, die zu Beginn des ersten Kapitels definiert sind. All dies kommt der Ästhetik besonders entgegen, die der Differentialrechnung im Komplexen eigen ist und die jeder künftige Ingenieur – weiblich wie männlich – kennenlernen soll.

Bei der Differentialrechnung im Reellen werden Experten von der Aussage überrascht sein, dass die punktweise Konvergenz einer Folge von Funktionen, die über einem Kompaktum definiert (und stetig) sind, deren gleichmäßige Konvergenz nach sich zieht. Gewöhnlich benötigt man für Aussagen dieser Art zusätzliche Voraussetzungen, wie sie zum Beispiel Ulisse Dini formulierte. Wenn man allerdings das Kontinuum so sieht wie Luitzen Egbertus Jan Brouwer und Hermann Weyl – eine Betrachtungsweise, die bereits im ersten Band dieses Buches vermittelt wurde –, erweist sich die genannte Aussage als offenkundig wahr. Einige der bekannten scheinbaren Gegenbeispiele werden in der Übungsaufgabe 1.13 ausdrücklich genannt. Wer sich darüber genauer informieren will, mag zu meinem Buch „The Continuum“ greifen. In meinem

Aufsatz „The swap of integral and limit in constructive mathematics“ kommt darüber hinaus die am Ende von Abschnitt 1.9 angedeutete Vertauschbarkeit des Integrals mit dem punktweisen Grenzwert von Funktionenfolgen zur Sprache.

Auch dieser Band wurde vom Carl Hanser Verlag unter professioneller Betreuung von Christine Fritsch und Katrin Wulst mit großer Sorgfalt herausgegeben. Ihnen gebührt ein „merci cordialement“. Und auch bei diesem Band bitte ich, trotz der gewissenhaften Korrekturarbeit von Andreas Körner und Carina Pöll, die noch immer verbliebenen Druckfehler zu verzeihen.

Wiederholen möchte ich meinen innigen Dank an meine Frau Bianca und meine Kinder Laura und Alexander: für ihre Nachsicht, für ihre Geduld, für ihre Zuneigung. Besonders stark und tief empfand ich sie beim Schreiben dieses Buches.

Wien, Mai 2014

Rudolf Taschner

Inhalt

Vorwort	5
1 Differenzieren im Reellen	11
1.1 Ebene Kurven	11
1.2 Parabel und Zykloide	18
1.3 Weitere Kurvendiskussionen	23
1.4 Extremwertberechnungen	26
1.5 Unbestimmte Ausdrücke	32
1.6 Asymptotische Berechnungen	38
1.7 Taylorsches Polynom	44
1.8 Gleichmäßige Konvergenz	49
1.9 Gleichmäßige Konvergenz und Stetigkeit	55
1.10 Differentiation eines Integrals	59
1.11 Iterierte Integrale	64
1.12 Übungsaufgaben	68
2 Nichtlineare Gleichungen	74
2.1 Halbierungs- und Newtonverfahren	74
2.2 Kontrahierende Abbildungen	77
2.3 Gleichungen mit Parameter	81
2.4 Gleichungen und Richtungsfelder	86
2.5 Existenz- und Eindeigkeitssatz	91
2.6 Zwei Gleichungen mit mehreren Variablen	97
2.7 Determinanten	102
2.8 Berechnung von Determinanten	108
2.9 Drei Gleichungen mit mehreren Variablen	114
2.10 Mehrere Gleichungen mit mehreren Variablen	118
2.11 Struktur von Gleichungssystemen	122
2.12 Übungsaufgaben	126

3	Lineare Gleichungen	133
3.1	Lineare Gleichungssysteme	133
3.2	Eliminationsverfahren	137
3.3	Lösungen linearer Gleichungssysteme	142
3.4	Matrizenrechnung.....	147
3.5	Übungsaufgaben	152
4	Vektor- und Tensorrechnung	155
4.1	Lineare Räume	155
4.2	Lineare Funktionen	161
4.3	Inhalt und Orientierung	165
4.4	Keilprodukt von Vektoren	169
4.5	Länge und Winkel	176
4.6	Quadratische Formen in zwei Variablen	182
4.7	Quadratische Formen in mehreren Variablen	187
4.8	Übungsaufgaben	193
5	Differentialgleichungen	198
5.1	Geburt der mathematischen Physik	198
5.2	Keplers Gesetze der Planetenbewegung.....	205
5.3	Geburt der Variationsrechnung	212
5.4	Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung	217
5.5	Lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung.....	220
5.6	Spezielle lineare Differentialgleichungen	225
5.7	Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten.....	231
5.8	Lineare Differentialgleichungssysteme.....	234
5.9	Gekoppelte Schwingungen.....	239
5.10	Störglieder und Resonanz	242
5.11	Resonanz bei gedämpfter Schwingung.....	246
5.12	Übungsaufgaben	249
6	Differenzieren im Komplexen	254
6.1	Holomorphe Funktionen	254
6.2	Harmonische Funktionen	258
6.3	Integrale holomorpher Funktionen.....	264
6.4	Komplexer Logarithmus	268
6.5	Einfach zusammenhängende Gebiete.....	272
6.6	Laurententwicklung holomorpher Funktionen	279

6.7 Mittelwerteigenschaft und Taylorentwicklung	284
6.8 Spezielle Taylorreihen.....	288
6.9 Isolierte Singularitäten.....	292
6.10 Residuen und Residuensatz.....	296
6.11 Fourier-, Fresnel- und Mellinintegrale	299
6.12 Übungsaufgaben	304
Index.....	308

1

Differenzieren im Reellen

■ 1.1 Ebene Kurven

Die im Zeitalter des Barocks von Newton und Leibniz entdeckte Differentialrechnung stellte sich als schier unerschöpfliche Fundgrube mathematischer Erkenntnisse heraus. Die meisten der gewonnenen Einsichten waren für die damals in Entwicklung befindlichen Natur- und Ingenieurwissenschaften nicht bloß außerordentlich wertvoll, sie waren mehr als nur das: Die Differentialrechnung bildet das unverzichtbare Fundament, auf dem die exakten Wissenschaften in den auf das Barock folgenden Jahrhunderten ihre Erfolge aufbauen konnten. Es handelt sich um jene Erfolge, die den Weg der Gesellschaft in die Aufklärung und zur Moderne, in das technisch-naturwissenschaftlich geprägte Zeitalter, ebnete. Die Kapitel der beiden folgenden Bände berichten darüber.

Die Differentialrechnung erlaubt, den Begriff „Kurve“, insbesondere jenen der „Funktionskurve“, mathematisch exakt zu fassen: Wir betrachten ein offenes Intervall J auf der t -Achse. Eine *ebene Kurve* liegt vor, wenn mithilfe zweier stetiger Funktionen $f_1 : J \rightarrow \mathbb{R}$ und $f_2 : J \rightarrow \mathbb{R}$ die Abhängigkeit $x = x(t) = f_1(t)$, $y = y(t) = f_2(t)$ der Koordinaten x , y des in der x - y -Ebene variablen Punktes $X = (x, y) = X(t)$ vom Parameter t beschrieben wird.

Die beiden einfachsten Beispiele ebener Kurven sind die Gerade und der Kreis. Wenn zwei verschiedene Punkte $P = (p, q)$ und $Q = (p + a, q + b)$ vorliegen, ist durch

$$\begin{cases} x = p + at \\ y = q + bt \end{cases}$$

die durch P und Q laufende Gerade gegeben, wenn der Parameter t die als t -Achse verstandene Skala \mathbb{R} durchläuft. Wenn ein Punkt $M = (m, n)$ und eine positive Konstante r vorliegen, ist durch

$$\begin{cases} x = m + r \cos \varphi \\ y = n + r \sin \varphi \end{cases}$$

der Kreis mit Mittelpunkt M und Radius r gegeben, wenn der Parameter φ die als φ -Achse verstandene Skala \mathbb{R} durchläuft. Eine weitere Beispielgruppe von Kurven sind die Funktionskurven: Es liegt eine im offenen Intervall J definierte und stetige Funktion $f : J \rightarrow \mathbb{R}$ vor. Dann ist

$$\begin{cases} x = x \\ y = f(x) \end{cases}$$

eine etwas umständliche Beschreibung der Beziehung $y = f(x)$. Sie zeigt, dass man das Schaubild der Funktion f als ebene Kurve auffassen kann, wobei der Parameter x das Intervall J durchläuft.

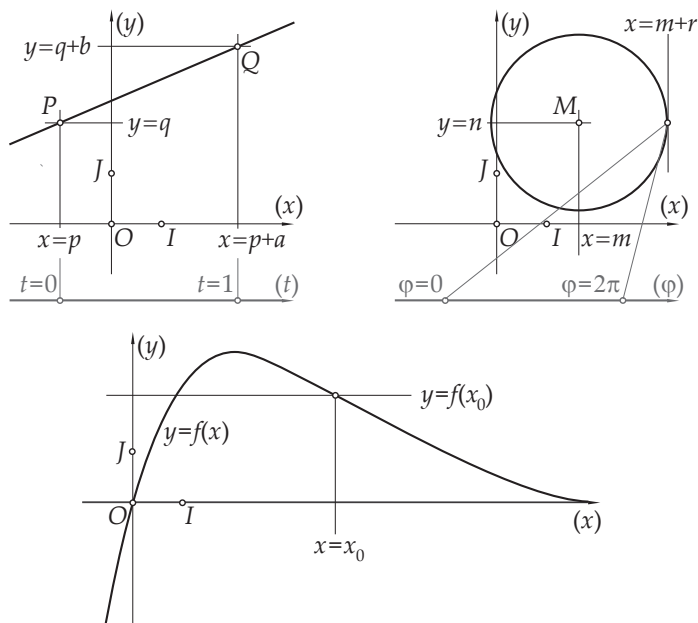


Bild 1.1 Beispiele dreier Kurven: oben links die Gerade durch die Punkte P und Q , oben rechts der Kreis mit Mittelpunkt M und Radius r , unten eine Funktionskurve

Ist durch

$$\begin{cases} x = f_1(t) \\ y = f_2(t) \end{cases}$$

eine ebene Kurve gegeben, wenn der Parameter t das offene Intervall J durchläuft, und bezeichnet $[a; b]$ ein kompaktes Teilintervall von J , nennen wir die Gesamtheit aller Punkte dieser Kurve, bei denen t aus $[a; b]$ entnommen ist, ein *Kurvenstück* dieser Kurve. Der Punkt $A = (f_1(a), f_2(a))$ heißt der *Anfangspunkt* und der Punkt $B = (f_1(b), f_2(b))$ heißt der *Endpunkt* dieses Kurvenstücks. Betrachtet man zum Beispiel bei der oben gegebenen Gerade das Kurvenstück, bei dem t das Intervall $[0; 1]$ durchläuft, erhält man die Strecke mit P als Anfangs- und mit Q als Endpunkt. Betrachtet man beim oben gegebenen Kreis das Kurvenstück, bei dem φ das Intervall $[\alpha; \beta]$ durchläuft, wobei $\beta - \alpha \leq 2\pi$ ist, erhält man einen Kreisbogen. Dessen Anfangspunkt und dessen Endpunkt sind voneinander verschieden, wenn $\beta - \alpha < 2\pi$ ist. Im Falle $\beta - \alpha = 2\pi$ stimmen der Anfangs- und Endpunkt des Kreisbogens überein. Man sagt dazu, der Kreisbogen ist *geschlossen*. Benannt nach dem im 19. Jahrhundert an der Pariser École Polytechnique lehrenden Mathematiker und Ingenieur Camille Jordan heißt eine ebene Kurve

$$\begin{cases} x = f_1(t) \\ y = f_2(t) \end{cases}$$

eine *Jordankurve*, wenn bei verschiedenen Parameterwerten die ihnen zugeordneten Kurvenpunkte stets voneinander verschieden sind. Sind zusätzlich die beiden Funktionen f_1 und f_2 an den Intervallgrenzen α und β des Parameterintervalls J stetig und gilt $f_1(\alpha) = f_1(\beta)$ sowie $f_2(\alpha) = f_2(\beta)$, spricht man von einer *geschlossenen Jordankurve*. Lässt man zum Beispiel beim

oben genannten Kreis im Bild 1.1 den Parameter φ nur das offene Intervall $]-\pi; \pi[$ durchlaufen, beschreibt der so definierte Kreis eine geschlossene Jordankurve.

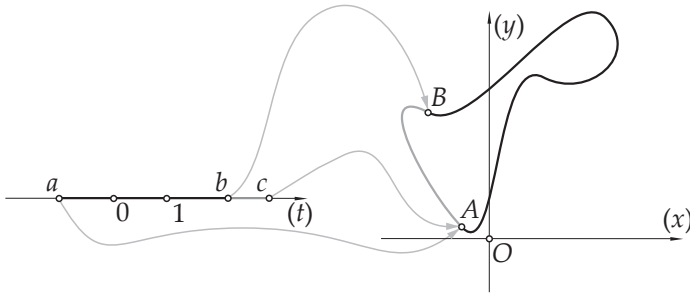


Bild 1.2 Die Kurve mit $]a; b[$ als Parameterintervall ist eine Jordankurve mit A als Anfangs- und B als Endpunkt. Die Kurve mit $]a; c[$ als Parameterintervall ist eine geschlossene Jordankurve.

Wenn bei einer ebenen Kurve

$$\begin{cases} x = f_1(t) \\ y = f_2(t) \end{cases}$$

die beiden Funktionen f_1 und f_2 stetig differenzierbar sind, sprechen wir von einer *glatten* Kurve. Denn dann kann man jedem Kurvenpunkt $X = (x, y)$ einen *Tangentenvektor*

$$dX = \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1'(t) \\ f_2'(t) \end{pmatrix} dt$$

zuweisen. Newton deutete den Parameter t als Zeit – daher auch die Bezeichnung. Denn das englische Wort für Zeit ist „time“, das lateinische Wort für Zeit ist „tempus“, und beide Wörter beginnen mit dem Buchstaben t. Newton sah den Kurvenpunkt $X = (x, y)$ als Ort eines sich entlang der Kurve bewegendem punktförmigen Körpers: Zum Zeitpunkt t nimmt er die Position $X(t) = (x(t), y(t))$ ein. Das Verhältnis des Tangentenvektors dX zum Zeitdifferential dt nennt Newton den *Geschwindigkeitsvektor*

$$\frac{dX}{dt} = \begin{pmatrix} dx/dt \\ dy/dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1'(t) \\ f_2'(t) \end{pmatrix}.$$

Newton selbst kannte die Bezeichnung von Leibniz nicht. Er sprach auch nicht von Differentialen, sondern er kürzte die Differentiation nach dem Zeitparameter t mit einem hochgestellten Punkt ab. Statt der obigen Formel schrieb er

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1'(t) \\ f_2'(t) \end{pmatrix}$$

und sprach bei \dot{x} und \dot{y} von den *Fluxionen* der *Fluents* x, y . Denn das lateinische flux ist der „Fluss“ und fluere bedeutet „fließen“. Dies ist die einzige der von Newton erfundenen Bezeichnungen, die wir übernehmen: den hochgestellten Punkt als Abkürzung für den Quotienten des Differential der genannten Variable durch das Differential des immer mit t bezeichneten Parameters. Wenn der Parameter der Kurve mit einem anderen Symbol als t bezeichnet wird, halten wir uns strikt an die Bezeichnungsweise von Leibniz.

Ob eine Kurve schnell oder langsam durchlaufen wird, spielt für ihr geometrisches Erscheinungsbild keine Rolle. Wir unterscheiden daher zwischen der *Kinematik* der Kurve, bei der wir – dem griechischen *kínein* zufolge, das „bewegen“ bedeutet – die Bewegung des Körpers entlang der Kurve im Sinne Newtons untersuchen, und der *Geometrie* der Kurve, bei der allein das Bild der Kurve zur Diskussion steht. Gehen wir allein vom geometrischen Bild aus, sind Kurven auch dann einander gleich, wenn sie verschiedenartig durchlaufen werden. Fassen wir dies genauer: Wenn zwei offene Intervalle I und J vorliegen, I als Teil der u -Achse und J als Teil der t -Achse, und wenn eine stetige und streng monoton wachsende Funktion $h : I \rightarrow J$ zusammen mit ihrer ebenfalls stetigen und streng monoton wachsenden Umkehrfunktion $H : J \rightarrow I$ die Variablen u und t gemäß $t = h(u)$ und $u = H(t)$ ineinander überführen, unterscheiden wir geometrisch nicht zwischen den beiden Kurven

$$\begin{cases} x = x(t) = f_1(t) \\ y = y(t) = f_2(t) \end{cases} \quad \text{und} \quad \begin{cases} x = x(u) = f_1(h(u)) \\ y = y(u) = f_2(h(u)) \end{cases},$$

wobei links t das Intervall J und rechts u das Intervall I durchlaufen. Das streng monotone Wachsen der Funktionen h und H verlangen wir, damit bei Kurvenstücken Anfangs- und Endpunkte als solche erhalten bleiben und nicht vertauscht werden. Kürzen wir die verketteten Funktionen $f_1 \circ h$ und $f_2 \circ h$ mit $g_1 = f_1 \circ h$ und $g_2 = f_2 \circ h$ ab, besagt die obige Formelzeile, dass wir geometrisch nicht zwischen den beiden Kurven

$$\begin{cases} x = x(u) = g_1(u) \\ y = y(u) = g_2(u) \end{cases} \quad \text{und} \quad \begin{cases} x = x(t) = g_1(H(t)) \\ y = y(t) = g_2(H(t)) \end{cases}$$

unterscheiden, wobei links u das Intervall I und rechts t das Intervall J durchlaufen. Damit ist die Symmetrie dieses Begriffs der Gleichheit von Kurven dokumentiert. Die Abbildung $t = h(u)$ beziehungsweise ihre Umkehrung $u = H(t)$, die wechselseitig I und J ineinander überführen, nennt man einen *Homöomorphismus* zwischen diesen beiden Intervallen. Das griechische *hómoios* heißt „gleichwertig“ und *morphé* ist die „Form“. Sind – was wir in Zukunft meist voraussetzen – die beiden Funktionen h und H außerdem stetig differenzierbar, spricht man von einem *Diffeomorphismus*. Dies ist ein dem Wort Homöomorphismus nachgebildetes Kunstwort, in dem das „Diffeo-“ auf die Differenzierbarkeit hinweisen soll.

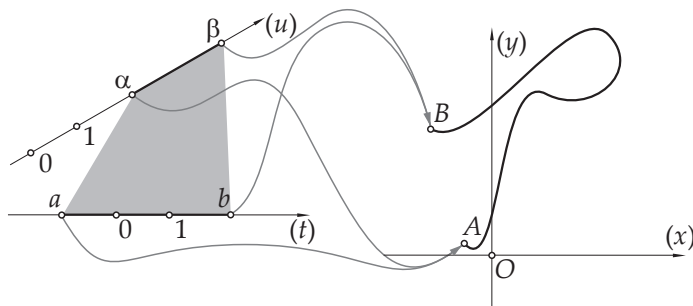


Bild 1.3 Zwischen den beiden Intervallen $[a; b]$ und $[\alpha; \beta]$ besteht ein Diffeomorphismus, der durch die graue Fläche symbolisiert wird. Beide Intervalle dienen für die gleiche Kurve als Parameterintervalle.

Ein einfaches Beispiel stellt der von $P = (p, q)$ ausgehende und durch $Q = (p + a, q + b)$ verlaufende Strahl dar, der durch

$$\begin{cases} x = x(u) = p + au \\ y = y(u) = q + bu \end{cases}$$

beschrieben wird, wenn u die positive reelle Achse $\mathbb{R}^+ =]0; \infty[$ durchläuft. Mit der Festlegung $t = \ln u$, die das Gleiche wie $u = e^t$ besagt, ist ein Diffeomorphismus zwischen der positiven u -Achse \mathbb{R}^+ und der reellen t -Achse \mathbb{R} gegeben. Darum liegt geometrisch der gleiche Strahl vor, wenn er durch

$$\begin{cases} x = x(t) = p + ae^t \\ y = y(t) = q + be^t \end{cases}$$

beschrieben wird, wobei t ganz \mathbb{R} durchläuft.

Ein zweites Beispiel ist die durch

$$\begin{cases} x = m + r \cos \omega t \\ y = n + r \sin \omega t \end{cases}$$

gegebene Kreislinie mit $M = (m, n)$ als Mittelpunkt und mit Radius r , bei dem ω eine positive Konstante bezeichnet und der Parameter t die Skala \mathbb{R} durchläuft. Der Diffeomorphismus $\varphi = \omega t$ zeigt, dass es sich geometrisch um den gleichen Kreis handelt wie jener, der oben beschrieben wurde. Deutet man t als Zeit, lautet hier der Geschwindigkeitsvektor

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r\omega \sin \omega t \\ r\omega \cos \omega t \end{pmatrix} = r\omega \begin{pmatrix} -\sin \omega t \\ \cos \omega t \end{pmatrix} = r\omega \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Dieser besitzt als Betrag $r\omega$. Den Faktor ω des Radius r nennt man die *Winkelgeschwindigkeit*: Sobald t ein Intervall der Länge $2\pi/\omega$ durchlaufen hat, wurde der Kreis vom Körper einmal umrundet. Die Richtung des Geschwindigkeitsvektors ist allerdings von der Größe der Winkelgeschwindigkeit unabhängig.

Ist durch $X = (x, y) = (x(t), y(t))$ eine glatte Kurve gegeben, lauten

$$dx = \dot{x} dt, \quad dy = \dot{y} dt, \quad dX = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} dt.$$

Die Länge des Tangentenvektors dX bezeichnen wir mit

$$ds = \|\dot{X}\| dt = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt$$

Den Faktor dt heben wir deshalb aus der Wurzel heraus, weil wir stets von einer „wachsenden Zeit“ t , also von $dt > 0$ ausgehen wollen. Man nennt $ds = \|dX\|$ das *Differential der Bogenlänge* der Kurve und das unbestimmte Integral

$$s = \int ds = \int \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt$$

die *Bogenlänge* der Kurve. Wenn der Parameter t seinerseits diffeomorph gemäß $t = t(u)$ von einem anderen Parameter u abhängt, kann man diese Substitution im Integral durchführen

und erhält statt der von t abhängigen Bogenlänge $s = s(t)$ nun die gleiche, jetzt aber von u abhängige Bogenlänge $s = s(u)$.

Bei der durch

$$\begin{cases} x = p + at \\ y = q + bt \end{cases}$$

gegebenen Geraden lauten $\dot{x} = a$ und $\dot{y} = b$. Folglich errechnet sich deren Bogenlänge als $s = s(t) = t\sqrt{a^2 + b^2} + s_0$ mit der Integrationskonstante s_0 . Betrachten wir die von $P = (p, q)$ zu $Q = (p + a, q + b)$ führende Strecke, entspricht diese jenem „Geradenstück“, bei dem der Parameter t das Intervall $[0; 1]$ durchläuft. Das bestimmte Integral

$$\int_0^1 ds = \sqrt{a^2 + b^2}$$

teilt uns die Länge dieser Strecke mit. Allgemein sei ein Kurvenstück einer glatten Kurve dadurch gegeben, dass der Kurvenparameter t das Teilintervall $[a; b]$ des offenen Intervalls J durchläuft. Dann definiert das Integral

$$L = \int_a^b ds = s|_{t=b} - s|_{t=a}$$

die *Länge* dieses Kurvenstücks. Betrachten wir als Beispiel den durch

$$\begin{cases} x = m + r \cos \varphi \\ y = n + r \sin \varphi \end{cases}$$

gegebenen Kreis: Hier lauten $dx = -r \sin \varphi \cdot d\varphi$, $dy = r \cos \varphi \cdot d\varphi$, also $ds = r d\varphi$. Darum ist $s = r\varphi + s_0$ mit einer Integrationskonstante s_0 . Lassen wir bei zwei Winkeln α und β mit $0 < \beta - \alpha \leq 2\pi$ den Winkel φ nur das Intervall $[\alpha; \beta]$ durchlaufen, verbleibt vom Kreis als Kurvenstück ein Kreisbogen der Länge $r(\beta - \alpha)$. Der gleiche Wert ergibt sich natürlich, wenn man den Kreis mit der Zeit t gemäß $\varphi = \omega t$ parametrisiert. Hier lautet die Bogenlänge $s = r\omega t + s_0$ und man hat zu beachten, dass bei diesem Diffeomorphismus dem Intervall $[\alpha; \beta]$ auf der φ -Achse das Intervall $[\alpha/\omega; \beta/\omega]$ auf der t -Achse entspricht.

Wenn bei einer durch $X = X(t) = (x, y)$ gegebenen glatten Kurve der Tangentenvektor dX vom Nullvektor verschieden ist, definiert man ihren *Tangenteneinheitsvektor* als

$$(dX)_0 = \frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix}$$

und ihren *Normaleneinheitsvektor* als

$$(dX)_0^\perp = \frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \begin{pmatrix} -\dot{y} \\ \dot{x} \end{pmatrix}.$$

Diese beiden Vektoren sind offenkundig allein durch die Geometrie der Kurve bestimmt und hängen nicht von der Wahl der Parametrisierung ab. Nur bei Kurvenpunkten mit $dX = 0$ existieren sie nicht. Man nennt derartige Kurvenpunkte *singulär*. Wir wollen sie im Folgenden von der Betrachtung ausschließen. Im Falle $dx \neq 0$ kann man den Tangentenanstieg $k = dy/dx$ berechnen, und im Falle $dy \neq 0$ kann man den Normalenanstieg $k_\perp = -dx/dy$ berechnen.

Kurvenpunkte mit $k = 0$ besitzen waagrechte Tangenten. Sie allein kommen als *Hoch-* oder *Tiefpunkte* der Kurve infrage, also als jene Kurvenpunkte, deren y -Koordinate einen maximalen oder minimalen Wert annimmt. Kurvenpunkte mit $k_{\perp} = 0$ besitzen senkrechte Tangenten. Sie allein kommen als *linke* oder *rechte Randpunkte* der Kurve infrage, also jene Kurvenpunkte, deren x -Koordinate einen minimalen oder maximalen Wert annimmt. Der vom Vektor i , dem Einheitsvektor in Richtung der x -Achse, und vom Vektor dX aufgespannte Winkel α heißt der *Anstiegswinkel* der Kurve. Offenkundig gilt:

$$k = \tan \alpha \quad \text{und} \quad k_{\perp} = \tan \left(\alpha + \frac{\pi}{2} \right).$$

Falls $\alpha = \alpha(t)$ stetig differenzierbar von t abhängt, erhält man $dk = (1 + k^2) d\alpha$ und daher

$$d\alpha = \frac{dk}{1 + k^2} = \frac{d\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)}{1 + \frac{\dot{y}^2}{\dot{x}^2}} = \frac{\dot{x}d\dot{y} - \dot{y}d\dot{x}}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt = \frac{\begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} \\ \ddot{x} & \ddot{y} \end{vmatrix}}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt.$$

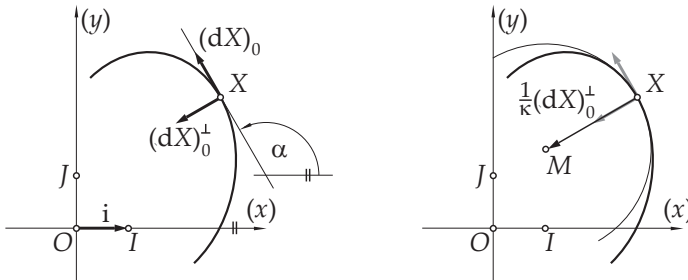


Bild 1.4 Links eine Kurve mit Tangenteneinheitsvektor, Normaleneinheitsvektor und Anstiegswinkel; rechts die Kurve mit dem Krümmungskreis und dessen Mittelpunkt

Die von der Parametrisierung unabhängige Größe

$$\kappa = \frac{d\alpha}{ds}$$

heißt die *Krümmung* der Kurve. Anhand des Kreises erkennt man, was dieser Begriff bedeutet: Geht man von

$$\begin{cases} x = m + r \cos \omega t \\ y = n + r \sin \omega t \end{cases}$$

aus, errechnen sich $\dot{x} = -r\omega \sin \omega t$, $\dot{y} = r\omega \cos \omega t$, ferner $\ddot{x} = -r\omega^2 \cos \omega t$, $\ddot{y} = -r\omega^2 \sin \omega t$ und $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = r^2\omega^2$. Folglich ist

$$d\alpha = \frac{\begin{vmatrix} -r\omega \sin \omega t & r\omega \cos \omega t \\ -r\omega^2 \cos \omega t & -r\omega^2 \sin \omega t \end{vmatrix}}{r^2\omega^2} dt = \frac{r^2\omega^3 dt}{r^2\omega^2} = \omega dt.$$

Dividiert man diesen Ausdruck durch $ds = r\omega dt$, verbleibt die Krümmung $\kappa = 1/r$. Wenn die Krümmung einer Kurve von Null verschieden ist, nennt man daher den Betrag ihres Kehrwertes den *Krümmungsradius* der Kurve.

Jener Punkt M , den man gemäß der Formel

$$M = X + \frac{1}{\kappa} (dX)_0^\perp$$

erhält, ist der Mittelpunkt eines Kreises mit dem Krümmungsradius als Radius, der im Kurvenpunkt X nicht nur die gleiche Tangente, sondern auch die gleiche Krümmung wie die Kurve besitzt. Man nennt diesen Kreis den *Krümmungskreis* der Kurve. Kurvenpunkte mit maximalem beziehungsweise mit minimalem Krümmungsradius nennt man *Scheitel* oder *Scheitelpunkte* der Kurve. Kurvenpunkte, bei denen die Krümmung verschwindet, besitzen keinen Krümmungskreis. Bei ihnen schmiegt sich die Tangente besonders gut an die Kurve, und daher nennen wir diese Punkte *Tangentenschmiegepunkte*. Je nachdem, ob die Tangente im Tangentenschmiegepunkt die Kurve durchsetzt oder aber (jedenfalls in der Nähe des Tangentenschmiegepunktes) begrenzt, nennt man den Tangentenschmiegepunkt einen *Wendepunkt* oder einen *Flachpunkt* der Kurve.

■ 1.2 Parabel und Zykloide

Als erstes Beispiel betrachten wir die bei einem konstanten positiven p durch

$$y^2 = 2px$$

beschriebene Kurve, die den Namen *Parabel* trägt. Apollonius von Perge hat sie so genannt, weil der Flächeninhalt des Rechtecks mit x als Breite und $2p$ als Höhe mit jenem des Quadrats mit y als Seitenlänge übereinstimmt. Denn das griechische *parabolé*, wörtlich „das daneben Gehende“ steht für den „Vergleich“ und das „Gleichnis“; *paráallein* heißt „nebeneinander stellen“. Setzt man die Variable y als Kurvenparameter fest, errechnet sich x als $x = y^2/2p$. Ausführlich angeschrieben besitzt daher die Parabel die Parameterdarstellung

$$\begin{cases} x = \frac{y^2}{2p} \\ y = y, \end{cases}$$

wobei y die y -Achse \mathbb{R} durchläuft. Offenkundig ändert sich $x = x(y)$ nicht, wenn man y durch $-y$ ersetzt. Die Parabel ist folglich zur x -Achse symmetrisch. Und weil bei $y \neq 0$ die Variable x positiv ist, erweist sich der Ursprung $O = (0, 0)$ als linker Randpunkt der Parabel. Tatsächlich ergibt die Differentiation von $y^2 = 2px$ die Differentialgleichung $2ydy = 2pdx$, vereinfacht: $ydy = pdx$. Darum errechnet sich für Parabelpunkte (x, y) , die vom Ursprung verschieden sind, der Parabelanstieg als $k = dy/dx = p/y$. Greift man einen vom Ursprung verschiedenen Parabelpunkt (x_0, y_0) heraus, besitzt in ihm die Tangente den Anstieg $k_0 = p/y_0$ und die Geradengleichung der Tangente kann als

$$y = \frac{p}{y_0}x + c$$

angesetzt werden. Die Konstante c gewinnt man, indem man für x und y die Koordinaten x_0 und y_0 des Punktes einsetzt: Aus $y_0^2 = px_0 + cy_0$ und der Tatsache, dass (x_0, y_0) auf der Parabel

liegt, also $y_0^2 = 2px_0$ zutrifft, erhält man $cy_0 = px_0$. Folglich lautet die Gleichung der Parabeltangente durch den Parabelpunkt (x_0, y_0) so: $y_0y = p(x + x_0)$. Die Tatsache, dass diese Tangente die x -Achse an der Stelle $(-x_0, 0)$ schneidet, erlaubt eine sehr schnell durchzuführende Tangentenkonstruktion.

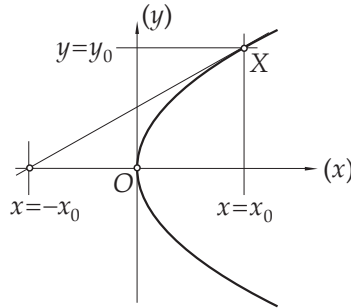


Bild 1.5 Parabel mit Tangente an einem Parabelpunkt

Das Differential der Bogenlänge s der Parabel errechnet sich als

$$ds = \sqrt{\frac{y^2}{p^2} + 1} \cdot dy.$$

Führen wir $t = t(y) = y/p$ als neuen, zu y diffeomorphen Parameter ein, erspart man sich unter der Wurzel den Bruch und bekommt wegen $dy = pdt$ für das Differential der Bogenlänge $ds = p\sqrt{t^2 + 1} dt$. Um hieraus die Bogenlänge selbst berechnen zu können, führen wir als zu t diffeomorphen Parameter nun $u = u(t) = \operatorname{arsinh} t$ ein. Denn bei $t = t(u) = \sinh u$ gilt $t^2 + 1 = \sinh^2 u + 1 = \cosh^2 u$, und die Wurzel davon lautet einfach nur $\cosh u$. Allerdings ist $dt = d(\sinh u) = \cosh u \cdot du$ zu bedenken, sodass sich die Bogenlänge aus einer partiellen Integration folgendermaßen errechnet:

$$\begin{aligned} s &= p \int \sqrt{t^2 + 1} dt = p \int \cosh^2 u \cdot du = p \int \cosh u \cdot d(\sinh u) = \\ &= p \cosh u \cdot \sinh u - p \int \sinh u \cdot d(\cosh u) = p \cosh u \cdot \sinh u - p \int \sinh^2 u \cdot du = \\ &= p \cosh u \cdot \sinh u + p \int (1 - \cosh^2 u) du = p \cosh u \cdot \sinh u + pu - p \int \cosh^2 u du = \\ &= p \cosh u \cdot \sinh u + pu - (s - 2s_0), \end{aligned}$$

wobei $-2s_0$ für die Integrationskonstante steht. Addiert man nämlich in dieser Gleichung auf beiden Seiten s und dividiert man danach durch 2, erhält man

$$s = \frac{p}{2}(u + \cosh u \cdot \sinh u) + s_0, \quad \text{wobei } x = \frac{p}{2} \sinh^2 u, \quad y = p \sinh u \text{ gilt.}$$

Schließlich berechnen wir das Differential des Anstiegswinkels $\alpha = \arctan k$ aus der bereits bekannten Formel $k = p/y$:

$$d\alpha = \frac{dk}{1+k^2} = \frac{-pdy}{y^2} = \frac{-p}{y^2 + p^2} dy.$$

Die Krümmung der Parabel lautet daher:

$$\kappa = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{\frac{-p}{y^2 + p^2} dy}{\frac{1}{p} \sqrt{y^2 + p^2} dy} = \frac{-p^2}{(y^2 + p^2)^{3/2}}.$$

Offenkundig ist κ an der Stelle $y = 0$, also im Ursprung $O = (0, 0)$ am kleinsten. Daher ist dieser Punkt der Scheitel der Parabel und der Radius des Krümmungskreises im Scheitel beträgt $(p^2)^{3/2} / p^2 = p$. Der Mittelpunkt des Scheitelkrümmungskreises ist offenkundig der Punkt $(p, 0)$. Allgemein findet man den Mittelpunkt M des zum Parabelpunkt X gehörenden Krümmungskreises wegen

$$(dX)_0^\perp = \frac{1}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} \begin{pmatrix} -dy \\ dx \end{pmatrix} = \frac{p}{\sqrt{y^2 + p^2}} \frac{1}{dy} \begin{pmatrix} -dy \\ (y/p) dy \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{y^2 + p^2}} \begin{pmatrix} -p \\ y \end{pmatrix}$$

aufgrund der folgenden Rechnung:

$$\begin{aligned} M &= X + \frac{1}{\kappa} (dX)_0^\perp = (x, y) + \frac{(y^2 + p^2)^{3/2}}{p^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{y^2 + p^2}} \begin{pmatrix} p \\ -y \end{pmatrix} = (x, y) + \left(\frac{y^2}{p^2} + 1 \right) \begin{pmatrix} p \\ -y \end{pmatrix} = \\ &= \left(p + x + \frac{y^2}{p}, \frac{-y^3}{p^2} \right) = \left(p + \frac{y^2}{2p} + \frac{y^2}{p}, \frac{-y^3}{p^2} \right) = (p, 0) + \begin{pmatrix} 3y^2/2p \\ -y^3/p^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Führt man noch einmal $t = y/p$ als einen zu y diffeomorphen Parameter ein und vergisst man die bisherige Bedeutung von x und y als Koordinaten eines Parabelpunktes, erhält man die Kurve, welche die Krümmungskreismittelpunkte der Parabel trägt, in der Darstellung

$$\begin{cases} x = p + \frac{3p}{2} t^2 \\ y = -pt^3. \end{cases}$$

Sie heißt *neilsche Parabel*, benannt nach dem im 17. Jahrhundert lebenden Mitbegründer der Royal Society William Neile. Bildet man einerseits $(x - p)^3$ und andererseits y^2 erkennt man, dass die parameterfreie Gleichung

$$(x - p)^3 = \frac{27p}{8} y^2$$

die obige neilsche Parabel beschreibt.

Die neilsche Parabel ist zur x -Achse symmetrisch und sie besitzt $(p, 0)$ als linken Randpunkt. Weil bei ihr wegen

$$\begin{cases} dx = 3pt dt \\ dy = -3pt^2 dt \end{cases}$$

beide Differentiale dx und dy für $t = 0$ verschwinden, handelt es sich bei diesem Randpunkt um einen singulären Punkt. In der Tat sieht man ihn in Bild 1.6 als eine Spitze. Im Übrigen stimmt der Anstieg $dy/dx = -t$ der neilschen Parabel mit dem entgegengesetzten Parameter überein: Wenn t das Intervall $]-\infty; \infty[$ von links nach rechts durchläuft, zieht sich die neilsche

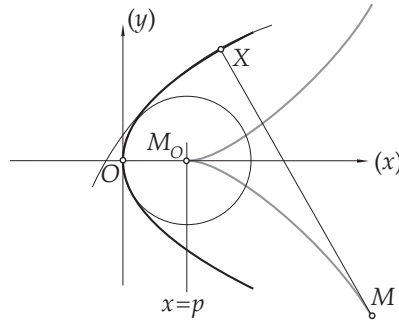


Bild 1.6 Parabel mit Scheitelkrümmungskreis, Krümmungskreis an einem Parabelpunkt und mit der neilschen Parabel als Trägerin der Mittelpunkte der Krümmungskreise

Parabel von oben steil herab, verliert an Anstieg bis sie in der Spitze $(p, 0)$ abflacht, wonach sie zunehmend steil in die Tiefe sinkt.

In einem zweiten Beispiel betrachten wir die durch

$$\begin{cases} x = \varphi - \sin \varphi \\ y = 1 - \cos \varphi \end{cases}$$

gegebene Kurve. Sie heißt *Zykloide* und ist das Beispiel einer *Rollkurve*. Die griechischen Wörter $\kappa\acute{\upsilon}\kappa\lambda\omicron\varsigma$ und $\epsilon\iota\delta\acute{\epsilon}\varsigma$ bedeuten „Kreis“ und „ähnlich“. Das Bild 1.7 zeigt, wie die Kurve die Bahn eines Punktes am Rand eines Kreises vom Radius 1 verfolgt, wenn dieser Kreis entlang der x -Achse abrollt. In jenem Augenblick, da der Kreismittelpunkt die y -Achse bei $(0, 1)$ durchläuft, fällt dabei dieser Punkt mit dem Ursprung zusammen. Natürlich ist hier wichtig, dass der Winkel φ im Bogenmaß gemessen wird. Die Zykloide ist periodisch mit Periode 2π . Es genügt daher, sie für Winkel φ mit $0 \leq \varphi < 2\pi$ zu untersuchen. Es lauten die Differentiale der Zykloidenkoordinaten und das Differential ds der Bogenlänge folgendermaßen:

$$\begin{cases} dx = (1 - \cos \varphi) d\varphi \\ dy = \sin \varphi \cdot d\varphi, \end{cases}$$

$$ds = \sqrt{(1 - \cos \varphi)^2 + \sin^2 \varphi} \cdot d\varphi = \sqrt{2 - 2 \cos \varphi} \cdot d\varphi = 2 \sin \frac{\varphi}{2} \cdot d\varphi.$$

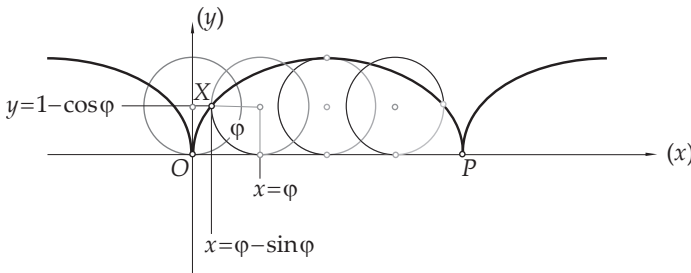


Bild 1.7 Zykloide mit dem Kreis, der entlang der x -Achse abrollt und dadurch die Kurve erzeugt

Index

- Abbildung, gebrochen lineare, 306
Abbildung, kontrahierende, 78
Abel, Niels Henrik, 106
Abschätzung, cauchysche, 287
absolute Zeit, 199
absoluter Raum, 199
Abstand, 78
allgemeine Lösung, 146, 220
allgemeine lineare Gruppe, 152
alternierende Gruppe, 107
Amplitude, 204
analytisch, 255
Anfangsbedingung, 86
Anfangspunkt, 12, 273
Anordnung, gerade, 103
Anordnung, ungerade, 103
Anstiegswinkel, 17
antikommutatives Rechengesetz, 166, 169
Aphel, 210
Apollonius von Perge, 18, 206
Approximation, quadratische, 45
Archimedes, 206
Arcussinusreihe, 291
Arcustangensreihe, 291
Aristarch von Samos, 206
Aristoteles, 198
assoziatives Rechengesetz, 170, 174
Asymptote, 35
Ausdruck, unbestimmter, 32, 33
Axiom, erstes newtonsches, 200
Axiom, zweites newtonsches, 200
- babylonisches Wurzelziehen, 74
Banach, Stefan, 78
Basis, 156
Bernoulli, Daniel, 227
Bernoulli, Jakob, 213–219
Bernoulli, Johann, 32, 34, 212, 213, 217, 227
bernoullische Differentialgleichung, 249
- Beschleunigungsfeld, 200
beschränkte Funktion, 287
Bessel, Friedrich Wilhelm, 227
Besselfunktion, 227
besselsche Differentialgleichung, 226
Beziehung, asymptotische, 35
Bilinearform, 188
Binomialkoeffizient, 289
binomische Formel, 289
binomische Funktion, 288
binomische Reihe, 289
Bivektor, 169
Bogenlänge, 15
Bolzano, Bernard, 130
Brachistochrone, 212
de Brahe, Tycho, 205
Bremsbeschleunigung, 201
Brennpunkt, 206
Brouwer, Luitzen Egbertus Jan, 54
- Casorati, Felice, 295
Cauchy, Augustin Louis, 279
Cauchy, Louis-Augustin, 180, 255, 256, 266, 281–285, 287, 290, 296, 297, 305, 314
Cauchy-Riemannsche Differentialgleichung, 259
Cauchy-Schwarzsche Ungleichung, 176
cauchysche Abschätzung, 287
cauchysche Integralformel, 282
cauchyscher Integralsatz, 279
Cayley, Arthur, 126, 137, 138, 148
charakteristische Gleichung, 186, 189, 231
du Châtelet, Émilie, 203, 204, 212, 215, 232, 239
Cramer, Gabriel, 102, 168
cramersche Regel, 168
- Dämpfung, 246
Determinante, 102, 186, 189
diagonalisieren, 190

- Diagonalmatrix, 142, 190
 Diffeomorphismus, 14
 Differential der Bogenlänge, 15
 Differentialgleichung, 86
 Differentialgleichung, bernoullische, 249
 Differentialgleichung, besselsche, 226
 Differentialgleichung, Cauchy-Riemannsche, 259
 Differentialgleichung, eulersche, 251
 Differentialgleichung, homogene lineare, 219
 Differentialgleichung, hypergeometrische, 227
 Differentialgleichung, inhomogene lineare, 219
 Differentialgleichung, laplacesche, 259
 Differentialgleichung, legendresche, 229
 Differentialgleichung, lineare, 217, 221
 Differentialgleichung, riccatische, 250
 Differentialgleichung, vom Typ der trennbaren Variablen, 127
 Differentialgleichungen, entkoppelte, 241
 Differentialgleichungssystem, lineares, 234
 Differentialoperator, 221
 Differentiationsregel eines Parameterintegrals, 60
 Dilatation, 306
 Dimension, 155
 distributives Rechengesetz, 170, 175
 Drehung, 163
 Dreiecksungleichung, 78

 ebene Kurve, 11
 Eigenfrequenz, 245
 Eigenvektor, 184, 188
 Eigenwert, 184, 188
 Eigenwertgleichung, 186, 189, 238
 eindimensionale Zelle, 273
 einfach zusammenhängend, 272
 Einheitsmatrix, 150
 Einheitsvektor, 176
 Eliminationsverfahren, 137
 Ellipse, 206
 Endpunkt, 12, 273
 entgegengesetzter Vektor, 155
 entkoppelte Differentialgleichungen, 241
 Entwicklungspunkt, 285
 Entwicklungssatz von Laplace, 113, 175

 Erdbeschleunigung, 201
 Erregerfrequenz, 245
 erstes newtonsches Axiom, 200
 erweiterte Koeffizientenmatrix, 139
 euklidisch, 176
 Euler, Leonhard, 64, 215, 227, 251
 euler-poissonsches Integral, 64
 eulersche Differentialgleichung, 251
 eulersche Formel, 232
 eulersche Gleichung, 215
 Existenz- und Eindeutigkeitsatz, 93
 explizite Funktion, 85
 Extremale, 214

 Faktorielle, 38
 Fakultät, 38
 Fehlerintegral, 64
 Fehlstand, 104, 172
 de Fermat, Pierre, 213
 Fixpunkt, 78
 Fixpunktgleichung, 78
 Flächeninhalt, orientierter, 165
 Flachpunkt, 18
 Fluente, 13
 Fluxion, 13
 Formel, binomische, 289
 Formel, eulersche, 232
 Fourier, Joseph, 301
 Fourierintegral, 301
 freier Fall, 200
 Frequenz, 204
 Fresnel, Augustin Jean, 301
 Fresnelintegral, 301
 Fundamentalgröße, metrische, 177
 Fundamentalmatrix, metrische, 177
 Fundamentalsatz der Algebra, 131, 287
 Fundamentalsystem, 223
 Funktion, analytische, 255
 Funktion, beschränkte, 287
 Funktion, binomische, 288
 Funktion, explizite, 85
 Funktion, ganze, 287
 Funktion, harmonische, 259
 Funktion, holomorphe, 255
 Funktion, implizite, 85
 Funktion, konforme, 256
 Funktion, lineare, 161

- Funktionalgleichung des Arcustangens, 42
Funktionskurve, 11
- Galilei, Galileo, 23, 198, 200, 212
Galois, Évariste, 106
ganze Funktion, 287
Gauß, Carl Friedrich, 64, 137, 139–141, 144, 227, 229, 255
gaußsches Fehlerintegral, 64
gebrochen lineare Abbildung, 306
genaue Dimension, 155
gerade Anordnung, 103
gerade Permutation, 107
geschlossene Jordankurve, 12
geschlossene Kette, 276
geschlossene Kurve, 12
Geschwindigkeitsvektor, 13
glatte Kurve, 13
gleichmäßige Konvergenz, 52
Gleichung, charakteristische, 186, 189, 231
Gleichung, eulersche, 215
Gleichung, lagrangesche, 215
Gleichungssystem, homogenes, 146
Gleichungssystem, inhomogenes, 146
Gleichungssystem, lineares, 133
Gleichungssystem, reguläres, 124, 141
Gleichungssystem, singuläres, 124, 141
Graßmann, Hermann, 169–172
Grad, 107
graduiertes kommutatives Rechengesetz, 175
Gram, Jørgen Pedersen, 180
Grenzfunktion, 51
große Halbachse, 206
Gruppe, 106, 152
Gruppe, allgemeine lineare, 152
Gruppe, alternierende, 107
Gruppe, orthogonale, 182
Gruppe, spezielle lineare, 168
Gruppe, spezielle orthogonale, 182
Gruppe, symmetrische, 107
- Halbachse, große, 206
Halbierungsverfahren, 75
Halbwertszeit, 246
harmonisch, 259
harmonisch konjugiert, 260
harmonischer Oszillator, 204
Hauptbedingung, 27
Hauptsatz über gleichmäßige Konvergenz, 55
Hauptteil einer Laurentreihe, 293
Hauptzweig des Logarithmus, 270
hebbare Singularität, 293
Hochpunkt, 17
holomorph, 255
holomorpher Teil einer Laurentreihe, 293
Homöomorphismus, 14
homogene lineare Differentialgleichung, 219
homogenes Gleichungssystem, 146
Hooke, Robert, 202, 203
de l'Hospital, Guillaume François Antoine, 34, 102, 213
Huygens, Christiaan, 23
hypergeometrische Differentialgleichung, 227
hypergeometrische Funktion, 229
- Identität, 105
implizite Funktion, 85
indefinit, 185, 193
Index, 271
Inertialsystem, 199
Inhalt, orientierter, 166
inhomogene lineare Differentialgleichung, 219
inhomogenes Gleichungssystem, 146
inneres Produkt, 176
Integral, entlang einer Kette, 275
Integral, entlang einer Zelle, 275
Integral, entlang eines Kurvenstücks, 267
Integral, fouriersches, 301
Integral, fresnelsches, 301
Integral, iteriertes, 65
Integral, mellinsches, 302
Integralformel von Cauchy, 282
Integralgleichung, 89
Integralsatz von Cauchy, 279
Integralsinus, 62
Invariante, 186, 189
inverse Matrix, 151
inverse Permutation, 106
Inversion, 306
isolierte Singularität, 281
iterierter Logarithmus, 35

- jacobische Matrix, 114, 119
 Jordan, Camille, 12, 276, 299
 Jordankurve, 12
 Jordankurve, geschlossene, 12
 jordansche Ungleichung, 300
 jordansches Lemma, 299

 Keilprodukt, 169, 173
 Keim, 82, 265
 Kepler, Johannes, 126, 205, 206, 208
 Keplergleichung, 126
 keplersche Gesetze, 205, 206
 Kern, 146
 Kette, 273
 Kette, geschlossene, 276
 Kinematik, 14
 Koeffizientenmatrix, 134
 Koeffizientenmatrix, erweiterte, 139
 Kombinatorik, 105
 Komponente, 156, 157
 konform, 256
 konjugiert harmonisch, 260
 kontrahierende Abbildung, 78
 Kontraktion, 78
 Konvergenz, gleichmäßige, 52
 Konvergenz, punktweise, 51
 Konvergenzradius, 285
 Kopernikus, Nikolaus, 206
 Krümmung, 17
 Krümmungskreis, 18
 Krümmungsradius, 17
 Kramp, Christian, 39
 Kreisfrequenz, 204
 Kurve, ebene, 11
 Kurve, glatte, 13
 Kurvenintegral, 267
 Kurvenintegralformel, 280
 Kurvenstück, 12

 Länge, 16, 176
 Lösung, allgemeine, 146, 220
 Lösung, partikuläre, 220
 Lösung, spezielle, 146, 220
 Lösungskeim, 82, 265
 Lösungszweig, 82
 Lagrange, Joseph-Louis, 106, 215, 219
 Lagrangefunktion, 215
 lagrangesche Gleichung, 215
 lagrangescher Multiplikator, 28
 Laplace, Pierre Simon, 112, 180, 259
 Laplaceoperator, 259
 laplacesche Differentialgleichung, 259
 laplacescher Entwicklungssatz, 113
 Laurent, Pierre Alphonse, 284
 Laurentkoeffizient, 284
 Laurentreihe, 284
 Lebesgue, Henri, 58
 Legendre, Adrien Marie, 229
 Legendrepolynom, 230
 legendresche Differentialgleichung, 229
 Leibniz, Gottfried Wilhelm, 11, 13, 34, 42, 59–62, 64–66, 100, 102, 105, 212–214, 285
 Lemma von Jordan, 299
 Levi-Civita, Tullio, 172
 linear abhängig, 158
 linear unabhängig, 158
 lineare Differentialgleichung, 217, 221
 lineare Funktion, 161
 linearer Raum, 146, 155
 lineares Differentialgleichungssystem, 234
 lineares Gleichungssystem, 133
 Linearisierungsformel, 44
 Linearkombination, 156
 Liouville, Joseph, 287
 Lipschitz, Rudolf, 92
 Lipschitzbedingung, 92
 Loch, 272
 Logarithmus, iterierter, 35
 logistisches Wachstum, 128
 lokale Maximumstelle, 185
 lokale Minimumstelle, 185

m-dimensionaler Vektorraum, 155, 156
 Möbius, August Ferdinand, 306
 Möbiusfunktion, 306
 Möbiustransformation, 306
 Machin, John, 42, 44
 Majorantensatz für gleichmäßige Konvergenz, 57
 Matrix, 112, 137
 Matrix, inverse, 151
 Matrix, jacobische, 114, 119
 Matrix, orthogonale, 182

- Matrix, symmetrische, 178
Matrix, transponierte, 177
Matrizenprodukt, 148
Maximumprinzip, 306
Maximumstelle, 185
Mellin, Hjalmar, 302
Mellinintegral, 302
Mercator, Nikolaus, 40
Mercatorreihe, 290
metrische Fundamentalgröße, 177
metrische Fundamentalmatrix, 177
mindestens m -dimensional, 155, 156
Minimumstelle, 185
Minor, 112
Mittelwerteigenschaft, 285
Multiplikationssatz, 167
Multiplikator, lagrangescher, 28
- nach unendlich divergent, 272
Nebenbedingung, 27
negativ definit, 185, 193
negativ semidefinit, 193
Neile, William, 20
neilsche Parabel, 20
Newton, Sir Isaac, 11, 13, 39, 42, 76, 198, 199, 203, 205–208, 212, 213, 256
Newtonformel, 76
nirgends konstant, 130
Normaleneinheitsvektor, 16
Normalkoordinate, 241
normalstehend, 177
normierter Vektor, 180
nulldimensionaler Vektorraum, 155
Nullstelle, 291
Nullvektor, 155
- Ordnung einer Polstelle, 294
orientierter Flächeninhalt, 165
orientierter Inhalt, 166
Orientierung, 169
orthogonal, 177
orthogonale Gruppe, 182
orthogonale Matrix, 182
Orthonormalbasis, 180
oskulieren, 25
Oszillator, harmonischer, 204
- Parabel, 18
Parabel, neilsche, 20
Parameter, 59
Parameterintegral, 59
partikuläre Lösung, 220
Pascal, Blaise, 23, 213
Perihel, 210
Periodendauer, 204
Permutation, 105
Permutation, gerade, 107
Permutation, inverse, 106
Permutation, ungerade, 107
Phase, 204
Picard, Émile, 295
Platon, 39
Pochhammer, Leo August, 276
Poisson, Denis, 64
Polstelle, 294
Polynom, taylorsches, 46
positiv definit, 176, 185, 193
positiv semidefinit, 193
Potential, 204
Potenzreihe, 285
Produkt, inneres, 176
Produkt, skalares, 176
Ptolemäus, Claudius, 206
punktweise Konvergenz, 51
- quadratische Approximation, 45
quadratische Form, 183, 187
- Räuber-Beute-System, 252
Rand, 274
Randbedingung, 213
Randpunkt, 17
Rang, 124, 141
Raphson, Joseph, 76
Rechengesetz, antikommutatives, 166, 169
Rechengesetz, assoziatives, 170, 174
Rechengesetz, distributives, 170, 175
Rechengesetz, graduiertes kommutatives, 175
Regel von de l'Hospital, 34
Regel von Sarrus, 105
regulär, 124
reguläres Gleichungssystem, 141
Reihe, binomische, 289

- Rekursion, 226
 Residuensatz, 297
 Residuum, 296
 Resonanz, 245
 Restglied, 40, 46
 Riccati, Jacopo Francesco, 250
 riccatische Differentialgleichung, 250
 Ricci-Cubastro, Gregorio, 172
 Richtungsfeld, 86
 Riemann, Bernhard, 255, 294
 Personne de Roberval, Gilles, 23
 Rollkurve, 21
 Rudolf II., 205
 Ruhepotential, 204
- Sarrus, Pierre Frédéric, 105
 Sattelpunkt, 30, 185
 Satz über implizite Funktionen, 85
 Satz von Liouville, 287
 Satz von Riemann, 294
 Satz von Schwarz, 67
 Satz von Weierstraß, 290
 Scheitel, 18
 Scheitelpunkt, 18
 Scherung, 165
 Schmidt, Erhard, 180
 Schwarz, Hermann Amandus, 65
 schwingendes System, 204
 semidefinit, negativ, 193
 semidefinit, positiv, 193
 Simpson, Thomson, 76
 singular, 16, 124
 singuläres Gleichungssystem, 141
 Singularität, hebbare, 293
 Singularität, isolierte, 281
 Singularität, wesentliche, 295
 skalares Produkt, 176
 Sommerfeld, Arnold, 207
 spezielle Lösung, 146, 220
 spezielle lineare Gruppe, 168
 spezielle orthogonale Gruppe, 182
 Spur, 186, 189, 275
 Störglied, 219
 Stürzung, 306
 Standardbasis, 157
 stationäre Stelle, 182
 Stolz, Otto, 72
- Streckung, 306
 Stufe eines Tensors, 172
 Summensatz des Tangens, 42
 Superpositionsprinzip, 145, 221
 Sylvester, James Joseph, 126, 137, 138, 148
 symmetrisch, 78, 176
 symmetrische Gruppe, 107
 symmetrische Matrix, 178
 System von Gleichungssystemen, 149
- Tangenteneinheitsvektor, 16
 Tangentenschmiegepunkt, 18
 Tangentenvektor, 13
 Taylor, Brook, 44
 Taylorreihe, 286
 taylorsches Polynom, 46
 Tensor, 172
 Tiefpunkt, 17
 Torricelli, Evangelista, 23
 Trägheitsgesetz, 198
 Translation, 306
 transponieren, 138
 transponierte Matrix, 177
- Umlaufzahl, 271
 unabhängige Variable, 124
 unbeschränkte
 Zusammenhangskomponente, 275
 unbestimmter Ausdruck, 32, 33
 unendlichdimensionaler Vektorraum, 157
 ungerade Anordnung, 103
 ungerade Permutation, 107
 Ungleichung, jordansche, 300
 Ungleichung, von Cauchy und Schwarz, 176
- Variable, unabhängige, 124
 Variation der Konstante, 219, 264
 Variationsrechnung, 213, 215
 Vektor, 155
 Vektor, entgegengesetzter, 155
 Vektor, normierter, 180
 Vektorraum, 155
 Vektorraum, euklidischer, 176
 Vektorraum, m -dimensionaler, 155, 156
 Vektorraum, nulldimensionaler, 155
 Vektorraum, unendlichdimensionaler, 157
 Vergilius Maro, Publius, 42

- Verschiebung, [306](#)
- Vertauschung, [107](#)
- Vertauschungsregel für iterierte Integrale, [65](#)
- Vielfachheit einer Nullstelle, [291](#)
- vollständige Menge, [79](#)
- Voltaire, eigentl. Arouet, François-Marie, [206](#)
- Volterra, Vito, [89](#)
- Volumen, [165](#)

- Wachstum, logistisches, [128](#)
- Wallenstein, eigentl. von Waldstein, Albrecht, [206](#)
- Weierstraß, Karl, [56](#), [65](#), [72](#), [255](#), [290](#), [295](#)
- Weierstraßscher Majorantensatz, [57](#)
- Wendepunkt, [18](#)
- wesentliche Singularität, [295](#)
- Windungszahl, [271](#)
- Winkel, [176](#)
- Winkelgeschwindigkeit, [15](#), [204](#)

- Wirtinger, Wilhelm, [255](#)
- Wirtingerableitung, [255](#)
- Hoëné-Wronski, Josef-Maria, [223](#)
- Wronskideterminante, [223](#)
- Wurzelziehen, babylonisches, [74](#)

- Zelle, [273](#)
- Zusammenhang, einfacher, [272](#)
- Zusammenhangskomponente, [275](#)
- Zusammenhangskomponente, unbeschränkte, [275](#)
- Zweig, [82](#)
- zweimal stetig differenzierbar, [44](#)
- zweite Ableitungsfunktion, [44](#)
- zweites newtonsches Axiom, [200](#)
- Zykloide, [21](#), [217](#)
- Zykloidenbogensegment, [22](#)
- Zyklus, [276](#)