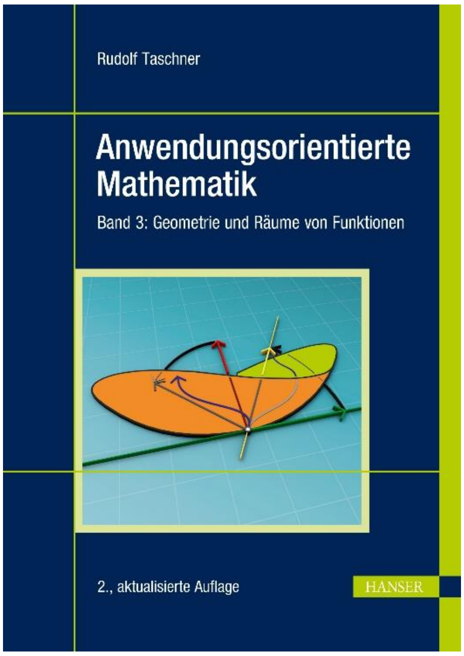
HANSER



Leseprobe

zu

Anwendungsorientierte Mathematik 3

von Rudolf Taschner

Print-ISBN: 978-3-446-47193-1
E-Book-ISBN: 978-3-446-47202-0

Weitere Informationen und Bestellungen unter

https://www.hanser-kundencenter.de/fachbuch/artikel/9783446471931

sowie im Buchhandel

Vorwort

Der dritte Band meines Lehrbuchs über Anwendungsorientierte Mathematik besteht aus zwei großen Teilen, die jeweils drei Kapitel umfassen. Der erste Teil thematisiert die Geometrie. Das Einleitungskapitel stellt die grundlegenden Rechenmethoden vor, die man gerne unter dem Namen „Vektoranalysis" zusammenfasst. Es ist von zentraler Bedeutung für alle, die Mathematik in der Physik und im Ingenieurwesen anwenden wollen. Die beiden folgenden Kapitel über Differentialgeometrie und krummlinige Koordinaten bauen darauf auf. Sie richten sich vornehmlich an jene Leserinnen und Leser, die sich für das Vermessungswesen, für die abstrakte Mechanik oder Elektrodynamik, oder aber für die Grundlagen der Allgemeinen Relativitätstheorie Einsteins interessieren. Der zweite Teil des Buches ist jenen Stoffgebieten gewidmet, die man unter dem Sammelbegriff „Höhere Analysis" subsumiert. Der Bogen spannt sich dabei vom Rechnen mit verallgemeinerten Funktionen bis hin zur Wahrscheinlichkeitsrechnung, die im Zuge der Betrachtung linearer Funktionenräume im fünften Kapitel einen angemessenen Platz findet.

Die Ziele des Lehrbuchs werden in diesem Band konsequent weiter verfolgt: Es soll eine Einführung in die Mathematik geboten werden, welche die historische Entwicklung der zentralen mathematischen Konzepte betont und Exkurse in sprachliche Herleitungen einzelner Fachbegriffe sowie großzügige Abschweifungen in Erzählungen des geschichtlichen Umfeldes nicht scheut. Es soll eine Einführung in die Mathematik geboten werden, bei der nur das erklärt wird, was konstruktiv nachvollziehbar ist. Und es soll eine Einführung in die Mathematik geboten werden, bei der das Augenmerk vor allem auf Themen gelegt wird, die für Anwendungen unumgänglich sind.

Wie bei den beiden ersten Bänden des Buches ist auch hier die Anordnung des Lehrstoffs zuweilen ungewohnt. Es kommt den an Anwendungen der Mathematik Interessierten entgegen, wenn sie schon einige Verfahren, wie zum Beispiel die Berechnung von Fourierreihen, die Integraltransformationen, deren Brauchbarkeit beim Lösen partieller Differentialgleichungen und anderes mehr kennenlernen, bevor sie – wie es hier im sechsten und abschließenden Kapitel skizziert wird – mit der dahinter liegenden abstrakten Theorie konfrontiert werden. Neben vielen anderen ausgezeichneten Klassikern der Lehrbuchliteratur habe ich mich vor allem an dem brillant verfassten Buch von Harley Flanders „Differential Forms with Applications to the Physical Sciences" und an dem beeindruckenden Buch von Robert D. Richtmyer „Principles of Advanced Mathematical Physics" orientiert. Die wohl besten Zugänge zu den Themen konnte ich einst von Edmund Hlawka, von Johann Cigler und, was die Wahrscheinlichkeitstheorie betrifft, von Karl Sigmund in deren einzigartigen Vorlesungen an der Universität Wien erfahren. In diesem Buch versuche ich, so gut ich kann, dieses wertvolle Erbe zu vermitteln. Ein weiterer Leitstern für mich ist, wie bereits im Vorwort des ersten Bandes erwähnt, die souveräne Aufbereitung des Stoffes, die Bernard Friedman in seinen „Lectures on Applications-Oriented Mathematics" gelang.

Auch Kenner der Materie werden an der einen oder anderen Stelle Ungewohntes finden: Den originellen Differentialrechnungsvorlesungen Ciglers verdanke ich eine raffinierte Herleitung der sogenannten Transformationsformel mehrdimensionaler Integrale; der Satz von Stokes umgeht elegant die sonst von Vortragenden gefürchtete Umständlichkeit bei der Beweisführung. Dass man vollständige Räume quadratisch integrierbarer Funktionen mit verallgemeinerten Funktionen konkret und einsichtig beschreiben kann, hat Richtmyer hervorgehoben. Somit zeigt sich, dass die von Riemann entworfene, den Prinzipien des Konstruktivismus gehorchende Integrationstheorie auch bei der Betrachtung von Hilberträumen vollständig ausreicht. Und die abstrakte Darstellung von Atlanten differenzierbarer Mannigfaltigkeiten gelingt wohl dann am besten, wenn man vorher konkrete Kartenentwürfe des Globus studiert. Die Veranschaulichung durch ansprechende Abbildungen ist hier von hohem Nutzen. Ich bin meinem Kollegen Hans Havlicek, Grandseigneur der Darstellenden Geometrie an der Technischen Universität Wien, sehr dankbar, dass er mir dafür einige seiner ausgefeilten Kartenentwürfe freigiebigst zur Verfügung gestellt hat.

Auch dieser Band wurde vom Carl Hanser Verlag unter professioneller Betreuung von Christine Fritzsch und Katrin Wulst mit großer Sorgfalt herausgegeben. Ihnen sei noch einmal herzlichst Dank gesagt. Und auch bei diesem Band bitte ich, trotz der gewissenhaften Korrekturarbeit von Andreas Körner und Carina Pöll, die noch immer verbliebenen Druckfehler zu verzeihen.
Im Vorwort seines wunderbaren Buches „The Mathematical Foundations of Quantum Mechanics“ schrieb George W. Mackey: „If the reader thinks a sign should be changed he is probably right. Perhaps there are more serious errors here and there.“ Die gleichen Worte möchte ich den Leserinnen und Lesern dieses Buches mit auf dem Weg geben.

Mein innigstes„Magnas gratias vobis ago“ möchte ich schließlich meiner Frau Bianca und meinen Kindern Laura und Alexander aussprechen: für ihre Nachsicht, für ihre Geduld, für ihre Zuneigung. Besonders stark und tief empfand ich sie beim Schreiben dieses Buches.

Wien, September 2014 *Rudolf Taschner*

Inhalt

1 Kalkül mit Differentialformen

1.1 Zellen und Ketten

„Kalkül“ stammt von dem lateinischen calculus, das „Steinchen“ bedeutet, weil die Römer mit kleinen Steinen ihre einfachen Rechnungen durchführten. „Kalkül“ bedeutet „Rechenmethode“. Dieses Kapitel stellt den Kalkül mit „Differentialformen“ vor, grob gesprochen: den Kalkül mit formalen Ausdrücken, in denen Differentiale aufscheinen. Es ist ein Kalkül, dessen Fundamente Leibniz und Newton gelegt hatten, weshalb die Differentialrechnung im Englischen „calculus“ heißt. Der Kalkül mit Differentialformen wurde bis hin zum Beginn des 20. Jahrhunderts von den maßgebenden Mathematikern ihrer Zeit, vor allem aber von Naturwissenschaftern und Ingenieuren zum Zwecke seiner vielfältigen Anwendungen so weit ausgebaut, wie es im Folgenden beschrieben wird. Ansätze dieses Kalküls haben wir bereits im Kapitel über Differentialrechnung im Komplexen kennengelernt.

Im Zuge der Vorbereitung zum Beweis des Integralsatzes von Cauchy sind wir den Begriffen der „Zelle“ und der „Kette“ in der komplexen Ebene begegnet: Eine eindimensionale Zelle Σ war damals eine achsenparallele Strecke, die zwei komplexe Größen verbindet, wobei diese entweder gleiche Imaginärteile oder gleiche Realteile besitzen. Und eine Kette Λ war damals die Summe $c_1\Sigma_1 + \ldots + c_n\Sigma_n$ derartiger Zellen $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_n$, die mit ganzzahligen Vielfachheiten $c_1, \ldots, c_n$ multipliziert sind. Dasselbe wollen wir nun für den dreidimensionalen Raum wiederholen:

In diesem Raum befindet sich ein Koordinatensystem mit drei Achsen, die in Richtung von Vektoren weisen, die linear unabhängig sind. Am einfachsten ist es, sich die drei Richtungsvektoren der Achsen als Einheitsvektoren vorzustellen, die zueinander paarweise orthogonal sind. Dann spannen die nach vorne laufende x-Achse und die nach rechts laufende y-Achse die Grundrissebene auf. Die y-Achse und die nach oben laufende z-Achse spannen die Aufrissebene auf, und die z-Achse spannt zusammen mit der x-Achse die Kreuzrissebene auf. In diesem Raum bezeichnen $P = (p, q, r)$ und $Q = (p + a, q + b, r + c)$ zwei Punkte. Vorausgesetzt wird dabei, von allen drei reellen Größen a, b, c stehe fest, ob sie entweder mit Null übereinstimmen, oder aber ob sie größer als Null sind. Jedenfalls befindet sich der Punkt Q, falls er nicht mit P zusammenfällt, entweder in Richtung der x-Achse *vor* P oder in Richtung der y-Achse *rechts von* P oder in Richtung der z-Achse *oberhalb von* P. (Dabei schließt das Wort „oder“ nichts aus: der Punkt Q kann gleichzeitig vor P, rechts von P und auch oberhalb von P geortet sein.) Für zwei derartige Punkte bezeichnet $\Sigma = [P; Q]$ eine *Zelle*. Sie besteht aus der Gesamtheit aller Punkte $X = (x, y, z)$ mit $p \leq x \leq p + a$, $q \leq y \leq q + b$, $r \leq z \leq r + c$. Genauer unterscheiden wir vier Typen von Zellen:

Erstens betrachten wir den Fall $a = b = c = 0$. Bei ihm stimmt Q mit P überein, und von der Zelle $\Sigma = [P; Q]$ bleibt nur der Punkt P selbst übrig. In diesem Fall nennen wir Σ eine *nulldimensionale Zelle*.

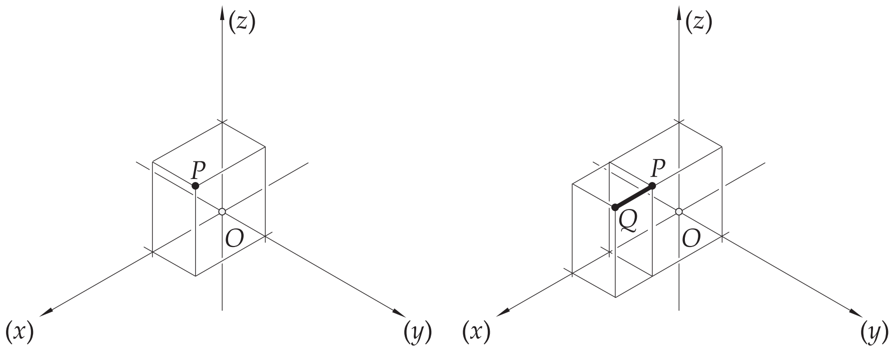


Bild 1.1 Links eine nulldimensionale Zelle, rechts eine eindimensionale, zur x-Achse parallele Zelle

Zweitens betrachten wir die drei Fälle $a > 0$, $b = c = 0$ oder $b > 0$, $c = a = 0$ oder $c > 0$, $a = b = 0$. Im ersten Fall ist die Zelle $\Sigma = [P; Q]$ eine zur nach vorne laufenden x-Achse achsenparallele Strecke, im zweiten Fall ist sie eine zur nach rechts laufenden y-Achse achsenparallele Strecke, und im dritten Fall ist sie eine zur nach oben laufenden z-Achse achsenparallele Strecke. In allen drei Fällen nennen wir Σ eine *eindimensionale Zelle*.

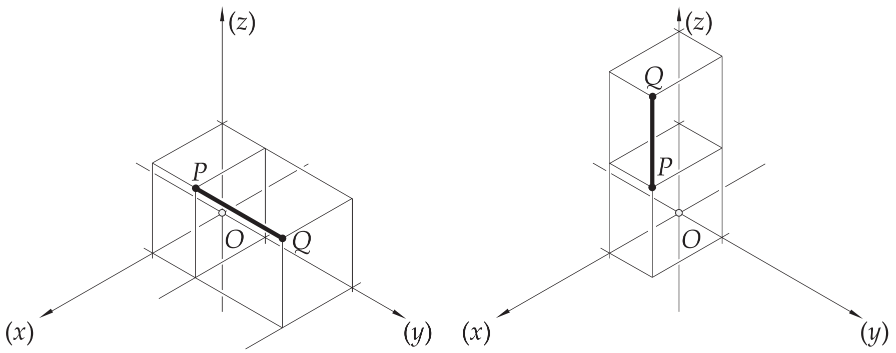


Bild 1.2 Links eine eindimensionale, zur y-Achse parallele Zelle, rechts eine eindimensionale, zur z-Achse parallele Zelle

Drittens betrachten wir die drei Fälle $a = 0$, $b > 0$, $c > 0$ oder $b = 0$, $c > 0$, $a > 0$ oder $c = 0$, $a > 0$, $b > 0$. Im ersten Fall ist die Zelle $\Sigma = [P; Q]$ ein Rechteck mit Seiten, die zur y-Achse und zur z-Achse parallel sind, im zweiten Fall ist sie ein Rechteck mit Seiten, die zur z-Achse und zur x-Achse parallel sind, und im dritten Fall liegt ein Rechteck mit Seiten vor, die zur x-Achse und zur y-Achse parallel sind. In allen drei Fällen nennen wir Σ eine *zweidimensionale Zelle*.

Viertens betrachten wir den Fall $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$. Bei ihm ist die Zelle $\Sigma = [P; Q]$ ein Quader, dessen Kanten zu den drei Achsen parallel sind. Dementsprechend heißt in diesem Fall Σ eine *dreidimensionale Zelle*.

Liegen endlich viele Zellen $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_n$ von der gleichen Dimension vor und bezeichnen $c_1, \ldots,$ c_n ebenso viele ganze Zahlen, heißt die daraus gebildete formale Summe $\Lambda = c_1\Sigma_1 + \ldots + c_n\Sigma_n$ eine *Kette*, genauer: eine *null-, ein-, zwei-* oder *dreidimensionale Kette*, je nachdem welche Dimension die Zellen $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_n$ haben. Die Zahlen $c_1, \ldots, c_n$, die *Vielfachheiten*, mit denen die

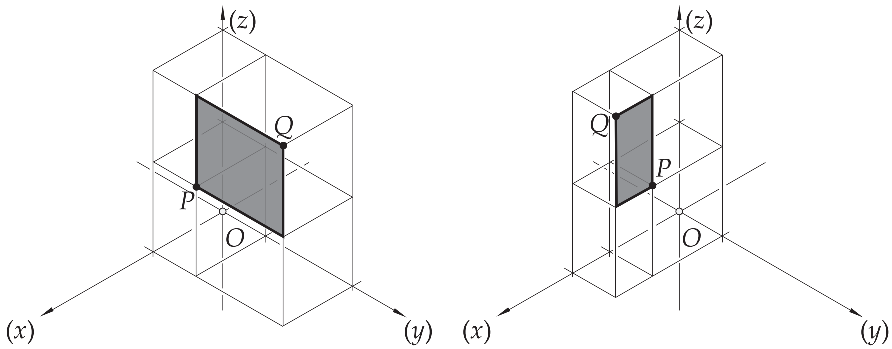


Bild 1.3 Links eine zweidimensionale, zur y- und zur z-Achse parallele Zelle, rechts eine zweidimensionale, zur z- und zur x-Achse parallele Zelle

Zellen $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_n$ in der Kette Λ vorkommen, teilen gleichsam mit, wie oft die jeweilige Zelle in der Kette „durchlaufen" wird. Die Tatsache, dass die Vielfachheiten sowohl positive wie auch negative ganze Zahlen sein dürfen, weist darauf hin, dass man dem „Durchlaufen" der Zellen eine bestimmte „Orientierung" oder einen bestimmten „Durchlaufungssinn" zuschreibt. Wir wollen dies im Einzelnen erörtern:

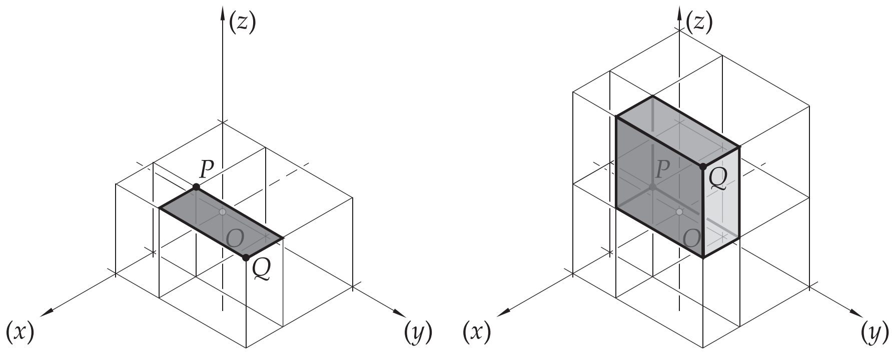


Bild 1.4 Links eine zweidimensionale, zur x- und zur y-Achse parallele Zelle, rechts eine dreidimensionale Zelle

Handelt es sich bei Σ um eine nulldimensionale Zelle, also um einen Punkt, bedeutet $c\Sigma$, dass dieser Punkt gleichsam c-mal genannt wird. Wenn c negativ sein sollte, stellt man sich am besten vor, dass an der Stelle, wo sich der Punkt befindet, ein Loch ist. Im gleichen Sinn, wie es in der Elementarteilchenphysik punktförmige Teilchen und Antiteilchen gibt, betrachten wir bei den nulldimensionalen Zellen „Punkte" und „Antipunkte" oder, anders gesprochen, „Punkte" und „Löcher". Es ist bezeichnend, dass der geniale theoretische Physiker Paul Dirac, der die Existenz von Antiteilchen theoretisch vorhergesagt hatte, ebenso von „Löchern" sprach, wenn er das „Antielektron", das später Positron getaufte Antiteilchen, als entgegengesetzt zum Elektron gezähltes punktförmiges Teilchen betrachtete.

Handelt es sich bei Σ um eine eindimensionale Zelle, also um eine achsenparallele Strecke $[P; Q]$, bedeutet $c\Sigma$, dass diese Strecke $|c|$-mal durchlaufen wird. Ist c positiv, denken wir uns die Strecke $[P; Q]$ in Richtung von P nach Q durchlaufen, ist hingegen c negativ, denken wir uns diese Strecke in Richtung von Q nach P durchlaufen. Und zwar so oft, wie der Betrag von c angibt.

Ein Beispiel dafür ist der folgende „räumliche Mäander“ (das Wort Mäander stammt vom in der Antike Maíandros genannten Fluss, der sich schleifenförmig durch die Landschaft zieht): Aus den acht Punkten $A = (1,0,0)$, $B = (1,1,0)$, $C = (2,1,0)$, $D = (2,1,2)$, $E = (-2,1,2)$, $F = (-2,1,0)$, $G = (-1,1,0)$ und $H = (-1,0,0)$ bilden wir die Kette

$$\Lambda = [A;B] + [B;C] + [C;D] - [E;D] - [F;E] + [F;G] - [H;G]\ .$$

Wie man schnell erkennt, sind die Vielfachheiten so festgelegt, dass der räumliche Mäander vom Punkt A über die Punkte B, C, D, E, F, G bis zum Punkt H einmal durchlaufen wird.

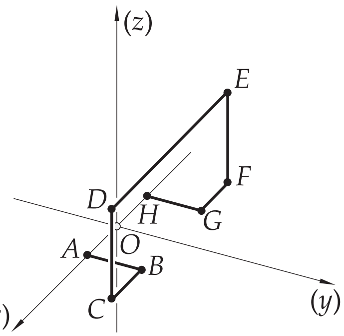


Bild 1.5 Der räumliche Mäander

Handelt es sich bei Σ um eine zweidimensionale Zelle, also um ein achsenparalleles Rechteck, verleihen wir $c\Sigma$ folgendermaßen einen „Durchlaufungssinn“: Ist c positiv, denken wir uns die Seiten des Rechtecks so oft *gegen den Uhrzeigersinn* durchlaufen, wie der Betrag von c angibt. Und ist c negativ, denken wir uns ebenfalls die Seiten des Rechtecks so oft durchlaufen, wie der Betrag von c angibt, diesmal aber *im Uhrzeigersinn*.

Ein Beispiel dafür ist die folgende „geöffnete Schachtel“: Sie besitzt die acht Punkte $A = (-1,-1,0)$, $B = (1,-1,0)$, $C = (1,1,0)$, $D = (-1,1,0)$, $E = (-1,-1,1)$, $F = (1,-1,1)$, $G = (1,1,1)$ und $H = (-1,1,1)$ als Ecken. Aus einer Auswahl von ihnen bilden wir die Kette

$$\Lambda = [B;G] - [A;H] + [D;G] - [A;F] - [A;C]\ .$$

Die Vielfachheiten in dieser Kette haben wir (willkürlich) so festgelegt, dass das vorne und das rechts befindliche Seitenrechteck der Schachtel einen positiven Durchlaufungssinn zugesprochen erhalten, das hinten und das links befindliche Seitenrechteck der Schachtel sowie die unten befindliche Grundfläche der Schachtel einen negativen Durchlaufungssinn zugesprochen erhalten.

Handelt es sich bei Σ um eine dreidimensionale Zelle, also um einen achsenparallelen Quader $[P;Q]$, bedeutet $c\Sigma$, dass dieser Quader $|c|$-mal in Erscheinung tritt. Auch hier sprechen wir von einem „Durchlaufen“ des Quaders und unterscheiden je nach Vorzeichen, wie diese „Orientierung“ des Quaders gemeint ist: Ist c positiv, wird der Quader so durchlaufen, dass seine vordere, seine rechte und seine obere Seitenfläche gegen den Uhrzeigersinn, hingegen seine hintere, seine linke und seine untere Seitenfläche im Uhrzeigersinn durchlaufen werden. Bei einem negativen c ist die Durchlaufungsrichtung der Seitenflächen jeweils umgekehrt.

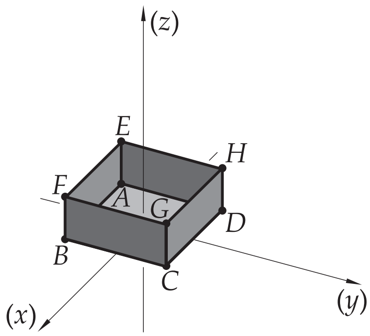


Bild 1.6 Die geöffnete Schachtel

Ein Beispiel dafür ist der folgende „durchbohrte Quader“: Er besitzt die 16 Punkte $A = (0,0,0)$, $B = (1,0,0)$, $C = (1,3,0)$, $D = (0,3,0)$, $E = (0,0,3)$, $F = (1,0,3)$, $G = (1,3,3)$, $H = (0,3,3)$ und $P = (0,1,1)$, $Q = (1,1,1)$, $R = (1,2,1)$, $S = (0,2,1)$, $T = (0,1,2)$, $U = (1,1,2)$, $V = (1,2,2)$, $W = (0,2,2)$ als Ecken: Die acht zuerst genannten als äußere Ecken und die acht zuletzt genannten als innere Ecken, die sein dreidimensionales „Loch“ begrenzen. Den durchbohrten Quader selbst erhalten wir als Kette

$$\Lambda = [A;G] - [P;V] \ .$$

Vom Quader $[A;G]$ wird der Quader $[P;V]$ gleichsam weggenommen, daher die Wahl der Vorzeichen.

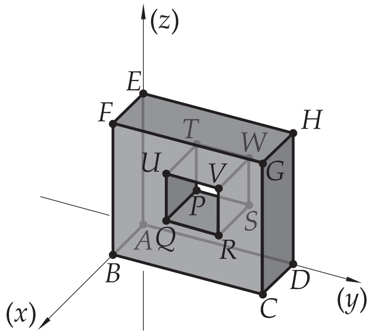


Bild 1.7 Der durchbohrte Quader

Liegt mit $\Lambda = c_1\Sigma_1 + \ldots + c_n\Sigma_n$ eine Kette, egal welcher Dimension vor und bezeichnet c eine ganze Zahl, kann man aus Λ die Kette $c\Lambda$ bilden, indem man einfach

$$c\Lambda = cc_1\Sigma_1 + \ldots + cc_n\Sigma_n$$

setzt. Und liegen mit $\Lambda' = a_1\Sigma'_1 + \ldots + a_m\Sigma'_m$ und mit $\Lambda'' = b_1\Sigma''_1 + \ldots + b_k\Sigma''_k$ zwei Ketten der gleichen Dimension vor, kann man ihnen eine Summe $\Lambda' + \Lambda''$ durch die Festlegung

$$\Lambda' + \Lambda'' = a_1\Sigma'_1 + \ldots + a_m\Sigma'_m + b_1\Sigma''_1 + \ldots + b_k\Sigma''_k$$

zuordnen. Beides ist sehr einfach und ohne Weiteres verständlich. Eine kleine Unsicherheit verbleibt allerdings, denn es kann vorkommen, dass zwei Ketten in verschiedenen Darstellungen vorliegen, obwohl es sich anschaulich um das gleiche Punktgefüge handelt. So wird der oben beschriebene räumliche Mäander nicht nur als

$$\Lambda = [A;B] + [B;C] + [C;D] - [E;D] - [F;E] + [F;G] - [H;G] \,,$$

sondern auch als

$$\Lambda^* = [A;B] + [F;C] + [C;D] - [E;D] - [F;E] - [G;B] - [H;G]$$

beschrieben. Warum betrachten wir Λ und Λ^* als „gleiche" Ketten? Um diese Frage allgemein beantworten und hierin Klarheit schaffen zu können, führen wir den Begriff der *Spur* einer Kette ein:

Wenn genau einer der in $\Lambda = c_1\Sigma_1 + c_2\Sigma_2 + \ldots + c_n\Sigma_n$ genannten Summanden, zum Beispiel $c_k\Sigma_k$, die Punkte einer Zelle Σ von der gleichen Dimension wie Λ mit der von Null verschiedenen Vielfachheit c_k erfasst, sagt man, dass die Punkte der Zelle Σ auf der *Spur* der Kette Λ zu liegen kommen. Wenn mehrere dieser Summanden, zum Beispiel die beiden Summanden $c_k\Sigma_k$ und $c_l\Sigma_l$ die Punkte der Zelle Σ erfassen, sollen diese Punkte nur dann zur *Spur* der Kette Λ zählen, wenn die entsprechende Summe der Vielfachheiten, im Beispiel der zwei Zellen Σ_k, Σ_l die Summe $c_k + c_l$, von Null verschieden ist. Im oben genannten Beispiel des räumlichen Mäanders gehören genau die in den Zellen $[A;B]$, $[B;C]$, $[C;D]$, $[E;D]$, $[F;E]$, $[F;G]$, $[H;G]$ vorkommenden Punkte der Spur des Mäanders an. In der Darstellung Λ^* des Mäanders kommt zwar die Zelle $[F;C]$ vor, aber nicht alle Punkte dieser Zelle gehören der Spur des Mäanders an, denn der Summand $-[G;B]$ sorgt dafür, dass die zwischen G und B befindlichen Punkte auf $[F;C]$ nicht zur Spur des Mäanders gehören. Im gleichen Sinn befinden sich die Punkte aus dem Inneren des Quaders $[P;V]$ nicht in der Spur des durchbohrten Quaders $\Lambda = [A;G] - [P;V]$, wohl aber alle anderen Punkte des Quaders $[A;G]$. Dementsprechend nennen wir zwei Ketten *gleich*, wenn sie die gleiche Spur besitzen und die Zellen dieser Spur im gleichen Durchlaufungssinn mit der gleichen Vielfachheit gezählt werden.

1.2 Differentialformen und Keilprodukt

Ziel der folgenden Erörterungen ist, die im vorigen Abschnitt vorgestellten Zellen und Ketten als Integrationsbereiche von mehrdimensionalen Integralen zu nützen. Zu diesem Zweck müssen neben den Integrationsbereichen die Integranden vorgestellt werden. Diese sind sogenannte „Differentialformen". Um sie präzise erfassen zu können, setzen wir voraus, es liege im x-y-z-Raum ein Gebiet vor, und jede im Folgenden betrachtete Variable w ist durch eine Funktion f als $w = f\left(x, y, z\right)$ definiert, wobei die Funktion f in diesem Gebiet definiert und so oft stetig differenzierbar ist, wie wir es im jeweiligen Zusammenhang benötigen. Ebenso setzen wir von allen Ketten, die wir im Folgenden betrachten werden, voraus, dass deren Spuren in diesem Gebiete liegen.

Ähnlich, wie es Zellen und Ketten verschiedener Dimensionen gibt, unterscheiden wir bei Differentialformen verschiedene „Stufen":

Eine *Differentialform* ω *nullter Stufe* ist eine von den Koordinaten x, y, z abhängige Variable $\omega = w = w(x,y,z)$. Wenn Σ eine nulldimensionale Zelle, also einen Punkt $P = (p,q,r)$ bezeichnet, kann man den Wert, den die Variable w an der Stelle P annimmt, berechnen. Wir haben dafür die Bezeichnung $w|_{x=p,y=q,z=r}$ kennengelernt. Nun führen wir als weitere, vorerst pompös wirkende Bezeichnung die mit einem Integral ein: wir schreiben für diesen Wert

$$\int_\Sigma \omega = \int_\Sigma w = w|_{x=p,y=q,z=r} \,.$$

Bald wird sich zeigen, dass sich diese Schreibweise bewährt.

Eine *Differentialform* ω *erster Stufe* ist ein Ausdruck der Gestalt $\omega = u\mathrm{d}x + v\mathrm{d}y + w\mathrm{d}z$, wobei u, v und w drei von den Koordinaten x, y, z abhängige Variablen bezeichnen: $u = u(x,y,z)$, $v = v(x,y,z)$, $w = w(x,y,z)$. Wenn $\Sigma = [P;Q]$ bei $P = (p,q,r)$ und $Q = (p+a, q+b, r+c)$ eine eindimensionale Zelle bezeichnet, unterscheiden wir für die Erklärung des Integrals von ω über die Zelle Σ drei Fälle. Im ersten Fall ist $a > 0$, und $b = c = 0$; in diesem Fall läuft Σ parallel zur x-Achse und die beiden anderen Variablen bleiben konstant: $y = q$, $z = r$. Da deren Differentiale verschwinden, lautet in diesem Fall

$$\int_\Sigma \omega = \int_\Sigma u\mathrm{d}x + v\mathrm{d}y + w\mathrm{d}z = \int_p^{p+a} u|_{y=q,z=r}\,\mathrm{d}x \,.$$

Im zweiten Fall ist $b > 0$, und $c = a = 0$; in diesem Fall läuft Σ parallel zur y-Achse und die beiden anderen Variablen bleiben konstant: $z = r$, $x = p$. Da deren Differentiale verschwinden, lautet in diesem Fall

$$\int_\Sigma \omega = \int_\Sigma u\mathrm{d}x + v\mathrm{d}y + w\mathrm{d}z = \int_q^{q+b} v|_{x=p,z=r}\,\mathrm{d}y \,.$$

Im dritten Fall ist $c > 0$, und $a = b = 0$; in diesem Fall läuft Σ parallel zur z-Achse und die beiden anderen Variablen bleiben konstant: $x = p$, $y = q$. Da deren Differentiale verschwinden, lautet in diesem Fall

$$\int_\Sigma \omega = \int_\Sigma u\mathrm{d}x + v\mathrm{d}y + w\mathrm{d}z = \int_r^{r+c} w|_{x=p,y=q}\,\mathrm{d}z \,.$$

Eine *Differentialform* ω *zweiter Stufe* ist ein Ausdruck der Gestalt $\omega = u\mathrm{d}y\mathrm{d}z + v\mathrm{d}z\mathrm{d}x + w\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, wobei u, v und w drei von den Koordinaten x, y, z abhängige Variablen bezeichnen: $u = u(x,y,z)$, $v = v(x,y,z)$, $w = w(x,y,z)$. Die nach den Variablen auftretenden Symbole $\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, $\mathrm{d}z\mathrm{d}x$ und $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ sehen wie Produkte von Differentialen aus. Solche Produkte sind bisher noch nie vorgekommen. Newton und Leibniz hätten mit ihnen auch gar nichts anzufangen gewusst, denn für sie waren Differentiale so kleine Größen, dass man deren Produkte gleich Null setzen kann. Doch daran wollen wir gar nicht mehr erinnert werden. Besser ist es, sich auf die geometrische Deutung der Differentiale zu berufen, die bereits von Leibniz geahnt wurde und allen Anwendern der Mathematik, die sich ein anschauliches Bild der Differentiale verschaffen wollen, in Fleisch und Blut übergegangen sein sollte: Im Punkt $X = (x,y,z)$ des betrachteten Gebietes wird eine zur x-Achse parallele $\mathrm{d}x$-Achse, eine zur y-Achse parallele $\mathrm{d}y$-Achse und eine zur z-Achse parallele $\mathrm{d}z$-Achse gelegt. So gesehen ist eine Differentialform erster Stufe, also ein Ausdruck der Gestalt $u\mathrm{d}x + v\mathrm{d}y + w\mathrm{d}z$, ein Vektor, der anschaulich vom Punkt X ausgeht und in dem $\mathrm{d}x$-$\mathrm{d}y$-$\mathrm{d}z$-Koordinatensystem die (an der Stelle X ausgewerteten) Größen u, v, w als Komponenten besitzt. Der lineare Raum dieser Differentialformen erster Stufe wird von den

Differentialen $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}z$ als Basis aufgespannt. Die Vektor- und Tensorrechnung beantwortet nun, wie man die Produkte $\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, $\mathrm{d}z\mathrm{d}x$ und $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ zu verstehen hat: Sie sind Bivektoren. Vorsichtige schreiben tatsächlich statt $\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, $\mathrm{d}z\mathrm{d}x$ und $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ diese Produkte so: $\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$, $\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x$ und $\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$. Aber weil uns bisher keine anderen Produkte von Differentialen begegneten als eben jetzt diese Keilprodukte, erlauben wir uns, *beim Keilprodukt von Differentialformen den Keil einfach wegzulassen.* Genauso wie man beim gewöhnlichen Produkt von mit Buchstaben symbolisierten Zahlen den Multiplikationspunkt einfach weglässt.

Die Rechenregeln des Keilprodukts darf man aber nicht vergessen! So ist zu beachten, dass

$$\mathrm{d}x\mathrm{d}x = \mathrm{d}y\mathrm{d}y = \mathrm{d}z\mathrm{d}z = 0$$

ist und dass

$$\mathrm{d}z\mathrm{d}y = -\mathrm{d}y\mathrm{d}z\,, \qquad \mathrm{d}x\mathrm{d}z = -\mathrm{d}z\mathrm{d}x\,, \qquad \mathrm{d}y\mathrm{d}x = -\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

gilt. Sind $\omega_1 = u_1\mathrm{d}x + v_1\mathrm{d}y + w_1\mathrm{d}z$ und $\omega_2 = u_2\mathrm{d}x + v_2\mathrm{d}y + w_2\mathrm{d}z$ zwei Differentialformen erster Stufe, stellt $\omega = \omega_1\omega_2$ deren Keilprodukt dar, das sich aufgrund der eben genannten Rechenregeln und unter Beachtung des distributiven Rechengesetzes so berechnet:

$$\omega_1\omega_2 = \big(u_1\mathrm{d}x + v_1\mathrm{d}y + w_1\mathrm{d}z\big)\big(u_2\mathrm{d}x + v_2\mathrm{d}y + w_2\mathrm{d}z\big) =$$

$$= (v_1w_2 - w_1v_2)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (w_1u_2 - u_1w_2)\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (u_1v_2 - v_1u_2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,.$$

Hier trifft $\omega_2\omega_1 = -\omega_1\omega_2$ zu. Denn beide Differentialformen ω_1 und ω_2 sind von erster Stufe, 1 ist eine ungerade Zahl und das graduierte kommutative Rechengesetz ist zu beachten.

Ob man aber das Produkt einer Differentialform nullter Stufe, also einer Variable w, mit einer Differentialform ω welcher Stufe auch immer als gewöhnliches oder als Keilprodukt deutet, ist einerlei: Es ergibt in beiden Deutungen das Gleiche. Und weil 0 eine gerade Zahl ist, stimmt in diesem Fall wegen des graduierten kommutativen Rechengesetzes $w\omega = \omega w$, wie es sein soll.

Wenn $\Sigma = [P;Q]$ bei $P = \big(p,q,r\big)$ und $Q = \big(p+a, q+b, r+c\big)$ eine zweidimensionale Zelle bezeichnet, unterscheiden wir für die Erklärung des Integrals von $\omega = u\mathrm{d}y\mathrm{d}z + v\mathrm{d}z\mathrm{d}x + w\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ über die Zelle Σ wieder drei Fälle. Im ersten Fall ist $a = 0$, und es sind $b > 0$, $c > 0$; in diesem Fall läuft Σ parallel zur y-z-Ebene und die Variable x bleibt konstant: $x = p$. Da deren Differential verschwindet, also auch $\mathrm{d}z\mathrm{d}x = \mathrm{d}z0 = 0$ sowie $\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0\mathrm{d}y = 0$ gilt, lautet in diesem Fall

$$\int_\Sigma \omega = \int_\Sigma u\mathrm{d}y\mathrm{d}z + v\mathrm{d}z\mathrm{d}x + w\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_r^{r+c}\int_q^{q+b} u|_{x=p}\,\mathrm{d}y\cdot\mathrm{d}z\,.$$

Es ist zu beachten, dass im letzten Schritt aus dem einen Integral über die zweidimensionale Zelle Σ das zuweilen „Doppelintegral" genannte iterierte Integral geworden ist: Im Inneren des iterierten Integrals wird über die Variable y integriert, die Variable z spielt in ihm die Rolle eines Parameters. Und im Äußeren des iterierten Integrals wird über die Variable z integriert, die Variable y kommt dort gar nicht mehr vor. Genauso gehen wir in den beiden anderen Fällen vor: Im zweiten Fall ist $b = 0$, und es sind $c > 0$, $a > 0$; in diesem Fall läuft Σ parallel zur x-z-Ebene und die Variable y bleibt konstant: $y = q$. Da deren Differential verschwindet, also auch $\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 0\mathrm{d}z = 0$ sowie $\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \mathrm{d}x0 = 0$ gilt, lautet in diesem Fall

$$\int_\Sigma \omega = \int_\Sigma u\mathrm{d}y\mathrm{d}z + v\mathrm{d}z\mathrm{d}x + w\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_p^{p+a}\int_r^{r+c} v|_{y=q}\,\mathrm{d}z\cdot\mathrm{d}x\,.$$

Im dritten Fall ist $c = 0$, und es sind $a > 0$, $b > 0$; in diesem Fall läuft Σ parallel zur x-y-Ebene und die Variable z bleibt konstant: $z = r$. Da deren Differential verschwindet, also auch $\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \mathrm{d}y0 = 0$ sowie $\mathrm{d}z\mathrm{d}x = 0\mathrm{d}x = 0$ gilt, lautet in diesem Fall

$$\int_\Sigma \omega = \int_\Sigma u\mathrm{d}y\mathrm{d}z + v\mathrm{d}z\mathrm{d}x + w\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_q^{q+b} \int_p^{p+a} w|_{z=r}\, \mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}y\,.$$

Eine *Differentialform ω dritter Stufe* ist ein Ausdruck der Gestalt $\omega = w\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, wobei w eine von den Koordinaten x, y, z abhängige Variable bezeichnet: $w = w(x, y, z)$. Hier werden die drei Differentiale $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}z$ mit dem Keilprodukt zu $\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ verbunden und an die Variable w angehängt. Eigentlich sollte man statt $\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ genauer $\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$ schreiben. Aber wie schon zuvor vereinbaren wir auch hier, beim Keilprodukt von Differentialformen den Keil wegzulassen. Die Rechengesetze des Keilprodukts bleiben jedoch nach wie vor zu beachten, unter ihnen die Regel

$$\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}x = \mathrm{d}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x = -\mathrm{d}y\mathrm{d}x\mathrm{d}z = -\mathrm{d}x\mathrm{d}z\mathrm{d}y$$

Wenn zum Beispiel $\omega_1 = u_1\mathrm{d}x + v_1\mathrm{d}y + w_1\mathrm{d}z$ und $\omega_2 = u_2\mathrm{d}y\mathrm{d}z + v_2\mathrm{d}z\mathrm{d}x + w_2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ zwei Differentialformen bezeichnen, die eine erster und die andere zweiter Stufe, lautet aufgrund der Rechengesetze deren Keilprodukt

$$\omega_1\omega_2 = \left(u_1\mathrm{d}x + v_1\mathrm{d}y + w_1\mathrm{d}z\right)\left(u_2\mathrm{d}y\mathrm{d}z + v_2\mathrm{d}z\mathrm{d}x + w_2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right) =$$

$$= u_1u_2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + v_1v_2\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + w_1w_2\mathrm{d}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y = (u_1u_2 + v_1v_2 + w_1w_2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\,.$$

Hier stimmt $\omega_1\omega_2 = \omega_2\omega_1$, was wegen des graduierten kommutativen Gesetzes so sein muss, weil ω_2 von gerader Stufe ist. Ebenso ist klar, dass das Keilprodukt zweier Differentialformen zweiter Stufe Null ergibt, denn für eine Differentialform vierter Stufe, die als dieses Produkt aufscheinen sollte, ist im dreidimensionalen Raum kein Platz. Beim Keilprodukt einer Differentialform erster Stufe mit einer Differentialform dritter Stufe verhält es sich genauso.

Es liegt nun bereits nahe, wie $\omega = w\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ entlang einer dreidimensionalen Zelle $\Sigma = [P; Q]$ mit $P = (p, q, r)$, $Q = (p + a, q + b, r + c)$ und mit $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ zu integrieren ist: Wir definieren

$$\int_\Sigma \omega = \int_\Sigma w\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_r^{r+c} \int_q^{q+b} \int_p^{p+a} w\mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}y \cdot \mathrm{d}z\,.$$

Wir deuten folglich dieses Integral als ein dreifach iteriertes Integral.

Schließlich sollen $\Lambda = c_1\Sigma_1 + c_2\Sigma_2 + \ldots + c_n\Sigma_n$ eine Kette und ω eine Differentialform bezeichnen, wobei die Stufe der Differentialform ω mit der Dimension der Kette Λ übereinstimmt. Das Integral der Differentialform über diese Kette ist naheliegend so festgelegt:

$$\int_\Lambda \omega = c_1\int_{\Sigma_1} \omega + c_2\int_{\Sigma_2} \omega + \ldots + c_n\int_{\Sigma_n} \omega$$

Nun ist es an der Zeit, anhand von Beispielen zu belegen, wie das formale Rechnen mit den so definierten Begriffen vor sich geht:

Beginnen wir mit einer Differentialform nullter Stufe, zum Beispiel mit der von x, y, z abhängigen Variablen $\omega = 3x + yz$ und betrachten wir die nulldimensionale Kette $\Lambda = \Sigma_1 - 2\Sigma_2 + 3\Sigma_3 -$

$4\Sigma_4$, bei der Σ_1 für den Punkt $(1,0,0)$, Σ_2 für den Punkt $(-1,2,0)$, Σ_3 für den Punkt $(0,-2,3)$ und Σ_4 für den Punkt $(0,0,-3)$ stehen. Dann ist definitionsgemäß

$$\int_\Lambda \omega = \left(3x+yz\right)|_{x=1,y=0,z=0} - 2\left(3x+yz\right)|_{x=-1,y=2,z=0} +$$
$$+3\left(3x+yz\right)|_{x=0,y=-2,z=3} - 4\left(3x+yz\right)|_{x=0,y=0,z=-3} =$$
$$= 3-2\times(-3)+3\times(-6)-4\times 0 = -9\,.$$

Als Nächstes betrachten wir eine Differentialform erster Stufe, zum Beispiel $\omega = 4xy^2z\mathrm{d}x + 2xy\mathrm{d}y + 6x^2z^2\mathrm{d}z$ und integrieren diese über den im vorigen Abschnitt vorgestellten räumlichen Mäander Λ. Übernehmen wir für ihn die Bezeichnungen des vorigen Abschnitts, bekommen wir:

$$\int_\Lambda \omega = \int_{[A;B]}\omega + \int_{[B;C]}\omega + \int_{[C;D]}\omega - \int_{[E;D]}\omega - \int_{[F;E]}\omega + \int_{[F;G]}\omega - \int_{[H;G]}\omega =$$
$$= \int_0^1 2xy|_{x=1,z=0}\,\mathrm{d}y + \int_1^2 4xy^2z|_{y=1,z=0}\,\mathrm{d}x + \int_0^2 6x^2z^2|_{x=2,y=1}\,\mathrm{d}z -$$
$$-\int_{-2}^2 4xy^2z|_{y=1,z=2}\,\mathrm{d}x - \int_0^2 6x^2z^2|_{x=-2,y=1}\,\mathrm{d}z +$$
$$+\int_{-2}^{-1} 4xy^2z|_{y=1,z=0}\,\mathrm{d}x - \int_0^1 2xy|_{x=-1,z=0}\,\mathrm{d}y =$$
$$= \int_0^1 2y\mathrm{d}y + \int_1^2 0\mathrm{d}x + \int_0^2 24z^2\mathrm{d}z - \int_{-2}^2 8x\mathrm{d}x - \int_0^2 24z^2\mathrm{d}z + \int_{-2}^{-1} 0\mathrm{d}x + \int_0^1 2y\mathrm{d}y = 2\,.$$

Als Nächstes betrachten wir eine Differentialform zweiter Stufe, zum Beispiel $\omega = 6xy^2z^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z + 8xy^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x + 9x^2y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ und integrieren diese über die im vorigen Abschnitt vorgestellte geöffnete Schachtel Λ. Übernehmen wir für sie die Bezeichnungen des vorigen Abschnitts, bekommen wir:

$$\int_\Lambda \omega = \int_{[B;G]}\omega - \int_{[A;H]}\omega + \int_{[D;G]}\omega - \int_{[A;F]}\omega - \int_{[A;C]}\omega =$$
$$= \int_0^1\int_{-1}^1 6xy^2z^3|_{x=1}\,\mathrm{d}y\cdot\mathrm{d}z - \int_0^1\int_{-1}^1 6xy^2z^3|_{x=-1}\,\mathrm{d}y\cdot\mathrm{d}z +$$
$$+\int_{-1}^1\int_0^1 8xy^3|_{y=1}\,\mathrm{d}z\cdot\mathrm{d}x - \int_{-1}^1\int_0^1 8xy^3|_{y=-1}\,\mathrm{d}z\cdot\mathrm{d}x - \int_{-1}^1\int_{-1}^1 9x^2y^2|_{z=0}\,\mathrm{d}x\cdot\mathrm{d}y =$$
$$= \int_0^1\int_{-1}^1 6y^2z^3\mathrm{d}y\cdot\mathrm{d}z + \int_0^1\int_{-1}^1 6y^2z^3\mathrm{d}y\cdot\mathrm{d}z +$$
$$+\int_{-1}^1\int_0^1 8x\mathrm{d}z\cdot\mathrm{d}x + \int_{-1}^1\int_0^1 8x\mathrm{d}z\cdot\mathrm{d}x - \int_{-1}^1\int_{-1}^1 9x^2y^2\mathrm{d}x\cdot\mathrm{d}y =$$
$$= \int_0^1 4z^3\mathrm{d}z + \int_0^1 4z^3\mathrm{d}z + \int_{-1}^1 8x\mathrm{d}x + \int_{-1}^1 8x\mathrm{d}x - \int_{-1}^1 6y^2\mathrm{d}y = -2\,.$$

Zuletzt betrachten wir eine Differentialform dritter Stufe, zum Beispiel $\omega = 30x^2y^4z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ und integrieren diese über den im vorigen Abschnitt vorgestellten durchbohrten Quader Λ. Übernehmen wir für ihn die Bezeichnungen des vorigen Abschnitts, bekommen wir:

$$\int_\Lambda \omega = \int_{[A;G]} \omega - \int_{[P;V]} \omega = \int_0^3 \int_0^3 \int_0^1 30x^2y^4z\mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}y \cdot \mathrm{d}z - \int_1^2 \int_1^2 \int_0^1 30x^2y^4z\mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}y \cdot \mathrm{d}z =$$

$$= \int_0^3 \int_0^3 10y^4z\mathrm{d}y \cdot \mathrm{d}z - \int_1^2 \int_1^2 10y^4z\mathrm{d}y \cdot \mathrm{d}z = \int_0^3 486z\mathrm{d}z - \int_1^2 62z\mathrm{d}z = 2094\,.$$

Die Rechentechnik des Integrierens von Differentialformen über Zellen und Ketten ist somit erklärt. Offen bleibt die Frage, welche Bedeutung diese Integrale besitzen. Die Antwort darauf ist lang und beansprucht einen Großteil des restlichen Kapitels.

Die folgenden elementaren und zugleich sehr einfachen Beispiele für das Integral

$$\int_\Sigma \omega$$

geben einen ersten Einblick: Für die Differentialform nullter Stufe $\omega = 1$ und die nulldimensionale Zelle Σ ergibt dieses Integral die Zahl 1. Man kann dazu sagen, dass dieses Integral den von Σ symbolisierten Punkt einfach nur *zählt*: Er ist einmal vorhanden. Für die Differentialform erster Stufe $\omega = \mathrm{d}x + \mathrm{d}y + \mathrm{d}z$ und die eindimensionale Zelle Σ ergibt dieses Integral die *Länge* der Zelle Σ. Für die Differentialform zweiter Stufe $\omega = \mathrm{d}y\mathrm{d}z + \mathrm{d}z\mathrm{d}x + \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ und die zweidimensionale Zelle Σ ergibt dieses Integral den *Flächeninhalt* der Zelle Σ. Und für die Differentialform dritter Stufe $\omega = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ und die dreidimensionale Zelle Σ ergibt dieses Integral den *Rauminhalt* oder das *Volumen* der Zelle Σ.

Eine letzte wichtige Bemerkung soll diesen Abschnitt abrunden: Es ist zu beachten, dass den Regeln des Keilprodukts zufolge $\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\mathrm{d}y\mathrm{d}x$ ist und daher bei einer zweidimensionalen, zur x-y-Ebene parallelen Zelle $\Sigma = [P;Q]$ mit $P = (p,q,r)$ und $Q = (p+a, q+b, r)$

$$\int_\Sigma u\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\int_\Sigma u\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

gilt. Hingegen wissen wir, dass bei iterierten Integralen die Reihenfolge der Integration keine Rolle spielt. Es gilt:

$$\int_q^{q+b} \int_p^{p+a} u\mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}y = \int_p^{p+a} \int_q^{q+b} u\mathrm{d}y \cdot \mathrm{d}x\,.$$

Dies scheint wegen der beiden Formeln

$$\int_\Sigma u\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_q^{q+b} \int_p^{p+a} u\mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}y \qquad \text{und} \qquad \int_\Sigma u\mathrm{d}y\mathrm{d}x = -\int_p^{p+a} \int_q^{q+b} u\mathrm{d}y \cdot \mathrm{d}x$$

einen Widerspruch zu ergeben. Doch der vermeintliche Widerspruch löst sich dann in Wohlgefallen auf, wenn wir sorgfältig zwischen einem *Integral von Differentialformen*, also dem Integral der Gestalt

$$\int_\Sigma u\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Index

F

G