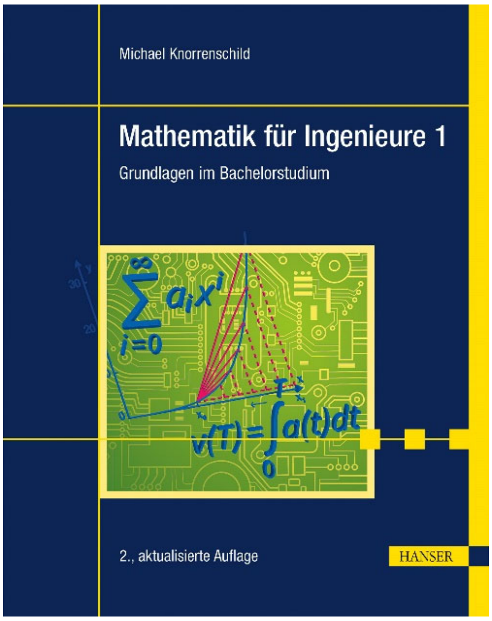
HANSER



Leseprobe

zu

„Mathematik für Ingenieure 1“

von Michael Knorrenschild

ISBN (Buch): 978-3-446-47190-0
ISBN (E-Book): 978-3-446-47207-5

Weitere Informationen und Bestellungen unter
http://www.hanser-fachbuch.de/9783446471900
sowie im Buchhandel

Vorwort

Schon wieder ein Mathematik-Buch für Ingenieurstudiengänge. Es gibt doch schon so viele. Richtig. Dieses hier ist anders. Die Zeiten haben sich geändert. Bachelor-Studiengänge bieten ein verkürztes Studium (und die Kürzungen fanden in manchen Fällen auf Kosten der Grundlagenfächer statt). Anwendungsorientiert soll gelehrt werden, mühselige Rechnerei werde ja vom Computer übernommen. Das ist einleuchtend. Ein Irrtum ist es jedoch, daraus zu schließen, es brauche weniger Mathematik-Kenntnisse. Rechnen ist nicht Mathematik. Um einen Computer für mathematische Fragestellungen zu verwenden, bedarf es nicht weniger Mathematik-Kenntnisse, sondern im Gegenteil mehr, im Sinne von vertiefte, Mathematik-Kenntnisse. Durch unsachgemäße Verwendung von Computern entsteht regelmäßig volkswirtschaftlicher Schaden (und manchmal auch an Leib und Leben). Ingenieure benötigen also ein Verständnis mathematischer Begriffe und Methoden, um Computer sinnvoll einsetzen und Ergebnisse richtig interpretieren zu können. Und das gilt nicht nur für Ingenieure, sondern für alle Absolventen von technischen und naturwissenschaftlichen Studiengängen.
Dieses Buch versucht diese Philosophie umzusetzen, – Methodenwissen anstelle von Faktenwissen.
Daher finden sich in diesem Buch nicht allzu viele Rechenaufgaben, sondern vielmehr Aufgaben, die das Verständnis der Begriffe und Methoden hinterfragen und festigen. An Vorwissen reichen Schulkenntnisse bzw. ein (ernsthaft!) besuchter Vorkurs, wie er an Fachhochschulen üblicherweise angeboten wird, aus.
Das Vorgehen fußt auf langjährigen Lehrerfahrungen im Bereich Mathematik für Anwender. Studierende aus drei Kontinenten und vielerlei Kulturen haben das Konzept durch ihr Feedback zu meinen Lehrveranstaltungen auf den richtigen Weg gebracht. Alle studentischen Fragen und Kommentare, egal auf welchem Niveau, haben mir ermöglicht, meine Lehrmethoden zu verfeinern. Dafür gebührt ihnen Dank an erster Stelle.

Besonderen Dank schulde ich den damaligen Ingenieurstudenten Christian Jelenowski, Christof Kaufmann und Arndt Steffen. Sie haben große Teile des Buches gegengelesen, dabei viele Fehler, Ungenauigkeiten und unbeholfene Erklärungen gefunden und zu meiner Aufmerksamkeit gebracht. Alle Fehler, die sich jetzt noch finden, gehen daher auf meine eigene Kappe.

Dem Team des Carl Hanser Verlags bin ich dankbar für die gewohnt angenehme Zusammenarbeit, besonders Frau Natalia Silakova für ihren Einsatz bei der Realisierung der Neuauflage.

Für diese Neuauflage wurden viele Kleinigkeiten verbessert und überarbeitet. Hinweise und Anregungen aus dem Leserkreis sind jederzeit willkommen.

Bochum, im Oktober 2021 — Michael Knorrenschild

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen (Steilkurs)

Wir beginnen mit einer sehr gerafften Zusammenstellung von wichtigen Fakten. Dass Sie den Schulstoff beherrschen, wird vorausgesetzt. Ohne diese Vorarbeit werden Sie an diesem Buch – und an keinem anderen Mathematik-Buch, an keiner Vorlesung und Übungsstunde Freude haben. Und ohne Freude lernt es sich schlecht.

Die Mehrzahl der Begriffe in diesem Kapitel sollten Ihnen deshalb bekannt vorkommen, oder mehr als das: Sie sollten damit vertraut sein. Sie finden daher hier auch keine größeren Beispiele. Unabdingbar ist aber das Verständnis des Funktionsbegriffs, daher finden Sie hier nochmals die genauen Definitionen. Etwas ausführlicher wird es bei den hyperbolischen Funktionen, die nicht unbedingt in Schulen und Vorkurs behandelt werden.

Ein erster Einstieg in MATLAB gehört ebenfalls dazu. Weiter einige generelle Hinweise zum Herangehen an Aufgabenstellungen (nicht nur in der Mathematik), damit Sie, egal wie schwer oder leicht die Aufgabe ist, einen Einstieg finden. Mit diesen Hinweisen gehören Hindernisse wie „Ich wusste gar nicht, wie ich die Aufgabe anfangen sollte“ der Vergangenheit an. Für den Start in die Lösung einer Aufgabe ist also gesorgt, und wie’s danach weitergeht, ist eine Übungssache.

1.1 Fakten zu Funktionen

Definition 1.1

Funktion, Abbildung

Eine **Funktion** $f : X \longrightarrow Y$ (auch **Abbildung** genannt) ordnet jedem Element $x \in X$ genau ein Element $y \in Y$ zu. Die Menge X heißt dabei **Definitionsbereich**, Y heißt **Wertebereich**. Die wirklich getroffenen Bildpunkte bezeichnet man als **Bildmenge** von f und schreibt:
$f(X) := \{\, f(x) \mid x \in X \,\} = \{\, y \in Y \mid \text{es gibt } x \in X \text{ mit } f(x) = y \,\}$.
Der Graph einer Funktion f ist die Menge

$$\mathrm{Graph}(f) := \{\, (x, f(x)) \mid x \in X \,\}$$

Eine Funktion kann man auch notieren als $f : x \mapsto f(x)$ und bezeichnet dabei x als die **Variable** (Veränderliche) und $f(x)$ als den **Funktionswert an der Stelle x**.

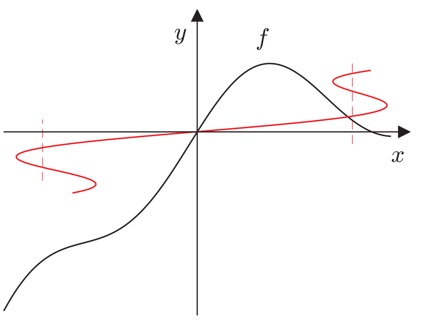


Bild 1.1 Die schwarze Linie ist der Graph einer Funktion f, denn jedem x wird genau ein $y = f(x)$ zugeordnet. Die rote Linie ist der Graph einer Zuordnung, die keine Funktion ist, denn manchen x sind mehrere y zugeordnet.

Es ist unbedingt nötig, die Funktion f vom Funktionswert $f(x)$ zu unterscheiden. Dies sind völlig verschiedene Objekte: f ist eine

Immer schön Funktion f (eine Zuordnung) und Funktionswert $f(x)$ (meist eine Zahl) auseinanderhalten, um nicht unnötige Verwirrung zu schaffen.

Zuordnung, $f(x)$ ist (meist) eine Zahl. In vielen Büchern findet man Formulierungen wie „…eine Funktion $f(x)$…“, was, genau genommen, Unsinn ist. Diese saloppe Formulierung ist in Ordnung, wenn jeder weiß, was gemeint ist, führt aber in anderen Situationen zu Unklarheiten und Missverständnissen.

Umkehrbarkeit von Funktionen

Definition 1.2

Sei $f : X \longrightarrow f(X)$ und $M \subseteq X$. f heißt **umkehrbar** auf M, wenn jedes $y \in f(M)$ nur genau einmal getroffen wird, d. h.

$$\text{für alle } x_1, x_2 \in M \text{ gilt:} \quad f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2.$$

Die Abbildung, die jedem Bildpunkt $f(x)$ das dann eindeutige x zuordnet, heißt **Umkehrfunktion** $f^{-1} : f(M) \longrightarrow M$.

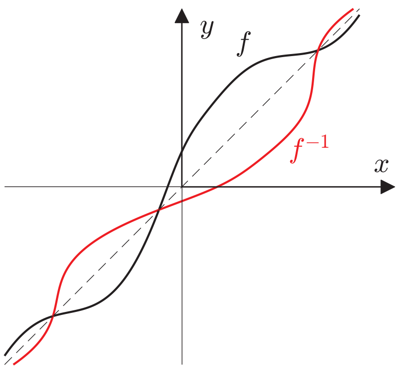


Bild 1.2 Die Graphen von Funktion und Umkehrfunktion sind symmetrisch zur Winkelhalbierenden.

Ob jedes y nur einmal getroffen wird, sieht man, indem man versucht, die Gleichung $y = f(x)$ nach x aufzulösen. Gelingt dies äquivalent und in eindeutiger Weise, so gibt es zu jedem y nur genau ein x, das y wird also nur einmal getroffen. Am Ende der Auflösung nach x steht auf der anderen Seite der Gleichung $f^{-1}(y)$.

Umkehrfunktion f^{-1} nicht mit Kehrwert $\frac{1}{f}$ verwechseln. Bei Funktionswerten dagegen hilft genaues Lesen: $f^{-1}(x)$ ist der Wert der Umkehrfunktion an der Stelle x, während $(f(x))^{-1}$ der Kehrwert von $f(x)$ ist.

Beispiel 1.1

f gegeben durch $f(x) = 5x + 7$ soll auf Umkehrbarkeit geprüft werden. Umstellung ergibt:

$$y = 5x + 7 \iff x = \frac{1}{5}(y - 7)$$

also ist f umkehrbar und die Umkehrfunktion f^{-1} hat die Funktionsvorschrift $f^{-1}(x) = 0.2\,(x - 7)$. ■

Komposition von Funktionen

Definition 1.3

Hat man zwei Funktionen f und g, so bezeichnet man mit $f \circ g$ die **Komposition** (Hintereinanderausführung) der Funktionen.

Es ist dann

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

Sind f und g umkehrbar, ist auch $f \circ g$ umkehrbar und es gilt:

$$(f \circ g)^{-1}(x) = (g^{-1} \circ f^{-1})(x) = g^{-1}(f^{-1}(x)).$$

Die Komposition $f \circ g$ kann nur gebildet werden, wenn die Bildmenge von g im Definitionsbereich von f liegt. Bei $f \circ g$ wird zuerst g angewandt und danach f. Entsprechend gilt bei den Umkehrfunktionen: Damit $(f \circ g)^{-1}$ existiert, muss die Bildmenge von f^{-1} im Definitionsbereich von g^{-1} liegen.

Beispiel 1.2

$f(x) = x^2$, $g(x) = x + 4$: Dann ist

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(x+4) = (x+4)^2 \\ (g \circ f)(x) &= g(f(x)) = g(x^2) = x^2 + 4 \end{aligned}$$

f ist umkehrbar auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$, $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$. g ist umkehrbar auf $\mathbb{R}$, $g^{-1}(x) = x - 4$, also gilt:

$$\begin{aligned} (f \circ g)^{-1}(x) &= (g^{-1} \circ f^{-1})(x) = \sqrt{x} - 4 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}_{\geq 0} \\ (g \circ f)^{-1}(x) &= (f^{-1} \circ g^{-1})(x) = \sqrt{x-4} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}_{\geq 4} \end{aligned}$$

■

Definition 1.4

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$.

- f heißt **streng monoton steigend**, wenn für alle x, y gilt

$$x < y \Longrightarrow f(x) < f(y).$$

- f heißt **monoton steigend**, wenn für alle x, y gilt

$$x < y \Longrightarrow f(x) \leq f(y).$$

- f heißt **streng monoton fallend** wenn für alle x, y gilt

$$x < y \Longrightarrow f(x) > f(y).$$

- f heißt **monoton fallend**, wenn für alle x, y gilt

$$x < y \Longrightarrow f(x) \geq f(y).$$

Monotonie von Funktionen

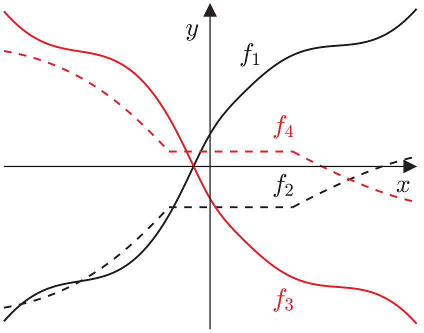


Bild 1.3 f_1 ist streng monoton steigend, f_2 monoton steigend, f_3 ist streng monoton fallend, f_4 monoton fallend.

Translation, Verschiebung

Definition 1.5

Die Abbildung $t_d : x \mapsto x + d$ heißt **Translation** (Verschiebung) um (die Konstante) d.

Translationen bewirken eine Verschiebung des Graphen von f in horizontaler oder vertikaler Richtung.

Die Abbildung t_d an sich ist simpel; interessant wird es, wenn sie mit anderen Funktionen zusammenkommt:
$f \circ t_d$: Hier wirkt sich die Translation in x-Richtung aus.
$(f \circ t_d)(x) = f(x+d)$, siehe Bild 1.4(a).
$t_d \circ f$: Hier wirkt sich die Translation in y-Richtung aus.
$(t_d \circ f)(x) = f(x) + d$, siehe Bild 1.4(d).

Skalierung

Definition 1.6

Die Abbildung $s_c : x \mapsto c\,x$ heißt **Skalierung** um (den konstanten Faktor) c.

Skalierungen bewirken eine Stauchung oder Dehnung des Graphen von f um einen Faktor.

Auch eine Skalierung ist für sich selbst nicht sonderlich spannend und entfaltet erst ihre Wirkung im Zusammenspiel mit anderen Funktionen:
$f \circ s_c$: Hier wirkt sich die Skalierung in x-Richtung aus.
$(f \circ s_c)(x) = f(c\,x)$, siehe Bild 1.4(b).
$s_c \circ f$: Hier wirkt sich die Skalierung in y-Richtung aus.
$(s_c \circ f)(x) = c\,f(x)$, siehe Bild 1.4(e).

Spiegelung

Definition 1.7

Die Skalierung $s : x \mapsto -x$ heißt **Spiegelung**.

Spiegelungen bewirken eine Spiegelung des Graphen von f an der x- bzw. y-Achse.

Eine Spiegelung ist also nichts anderes als eine Skalierung um den Faktor -1. Sie heißt natürlich Spiegelung, weil etwas gespiegelt wird. In Kombination mit einer Funktion f wird nämlich der Graph von f gespiegelt und zwar
$f \circ s$: Spiegelung an y-Achse: $(f \circ s)(x) = f(-x)$, siehe Bild 1.4(f)
$s \circ f$: Spiegelung an x-Achse: $(s \circ f)(x) = -f(x)$, siehe Bild 1.4(c).

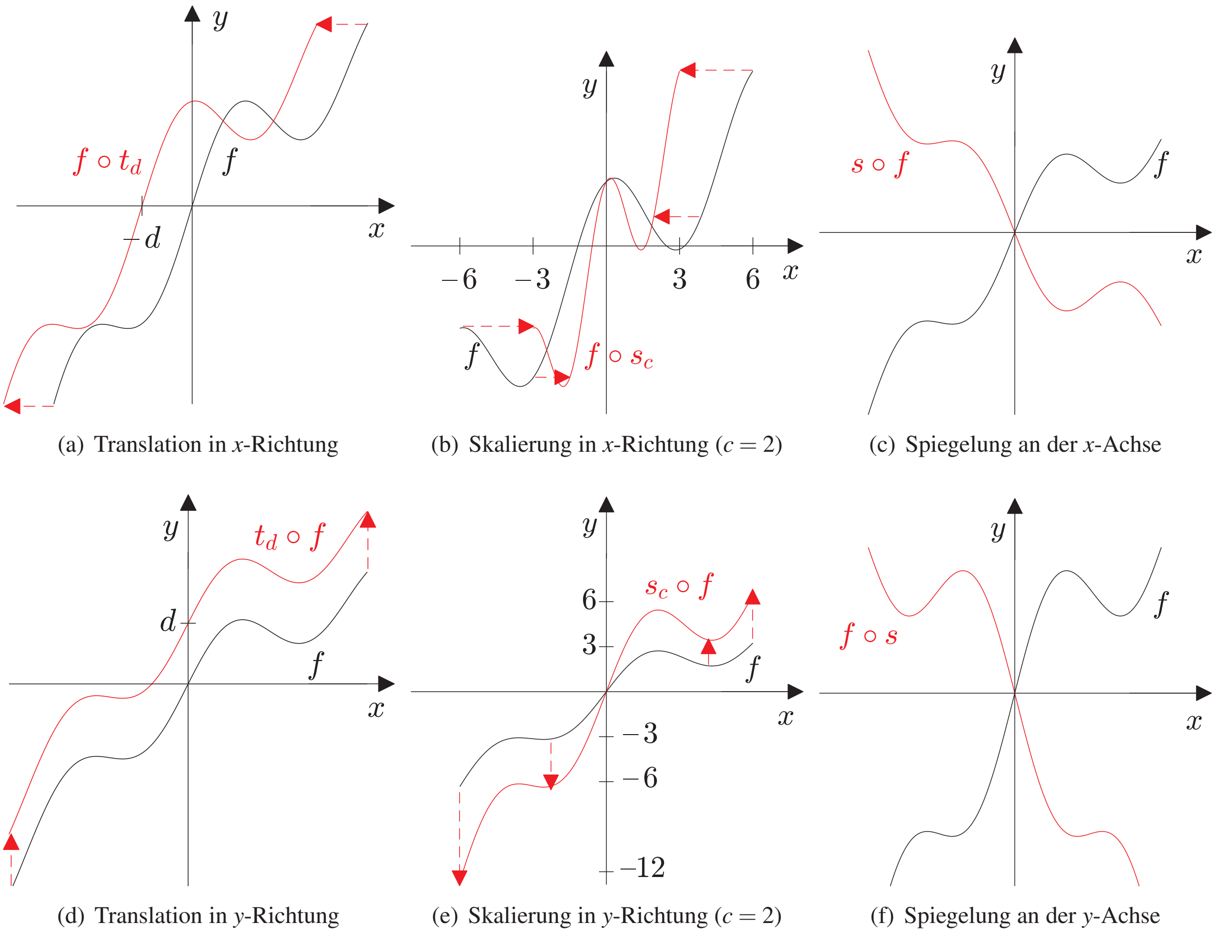


Bild 1.4 Translation, Skalierung und Spiegelung: Auswirkungen am Graphen von f

Definition 1.8

Polynom vom Grad n

Sei $n \in \mathbb{N}_0$, $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$. Dann heißt die Funktion $p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definiert durch

$$p(x) := a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

Polynom vom Grad n. Die a_i, $i = 0, \ldots, n$ nennt man auch die **Koeffizienten** des Polynoms. Das Polynom $p(x) = 0$ konstant heißt **Nullpolynom**.

Beispiel 1.3

Konstante Funktionen sind auch Polynome, und zwar vom Grad 0: $p(x) = cx^0$.
$p(x) = 4x^3 - 2x^5 + 2x - 9$ ist ein Polynom vom Grad 5. Die Koeffizienten lauten $a_5 = -2$, $a_4 = 0$, $a_3 = 4$, $a_2 = 0$, $a_1 = 2$, $a_0 = -9$.
$p(x) = (x+3)^7 (x^2 - 5x + 2)^3$ ist ein Polynom vom Grad $7 + 2 \cdot 3 = 13$.
$p(x) = x^2 + 2x^{0.5}$ ist kein Polynom (nur natürliche Zahlen sind als Exponent erlaubt). ■

Rationale Funktion

Definition 1.9

Rationale Funktionen sind Quotienten zweier Polynome.

Seien p, q Polynome, q sei nicht das Nullpolynom. Dann heißt die Funktion f, die gegeben ist durch

$$f(x) := \frac{p(x)}{q(x)},$$ **rationale Funktion.**

Beispiel 1.4

Insbesondere sind auch Polynome rationale Funktionen (man kann das Nennerpolynom einfach konstant als $q(x) = 1$ wählen). Eine typische rationale Funktion sieht aber eher so aus: $f(x) := \dfrac{x^2 + 2x - 7}{5x^{13} - 6x^7 + 2}$. ■

Gerade und ungerade Funktionen

Definition 1.10

Der Graph einer geraden Funktion ist symmetrisch zur y-Achse. Der Graph einer ungeraden Funktion ist punktsymmetrisch zum Ursprung.

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt **gerade**, wenn

$$f(x) = f(-x) \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

gilt. f heißt **ungerade**, wenn gilt:

$$f(x) = -f(-x) \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Beispiel 1.5

Die Betragsfunktion $x \mapsto |x|$ ist eine gerade Funktion.
Polynome in x, in denen nur Potenzen von x mit geradem Exponenten vorkommen, sind gerade Funktionen. 0 ist dabei auch als gerade Zahl anzusehen.

Polynome in x, in denen nur Potenzen von x mit ungeradem Exponenten vorkommen, sind ungerade Funktionen.
Der Quotient zweier gerader Funktionen ist eine gerade Funktion.
Der Quotient zweier ungerader Funktionen ist auch eine gerade Funktion (siehe Aufgabe 1.1).
Der Quotient einer geraden Funktion durch eine ungerade oder umgekehrt ist eine ungerade Funktion. Beispiele dazu:

$p_1(x) = x^2$: gerade.
$p_2(x) = -5x^{14} + 3x^8 - x^2 + 7$: gerade.
$p_3(x) = 3x^7 + 2x^3 - x$: ungerade.
$r_1(x) = \dfrac{-7x^8 + 2x^4 - x^2 + 2}{2x^5 + x^3 - 3x}$: ungerade.
$r_2(x) = \dfrac{x^5 - 2x^3 - x}{2x^7 + 5x^3 - 2x}$: gerade. ■

Definition 1.11

Exponentialfunktion

Die Funktion $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $\exp(x) := \mathrm{e}^x$, wobei $\mathrm{e} = 2.718281828\ldots$ die Eulersche Zahl ist, wird **Exponentialfunktion** oder meist kurz **e-Funktion** genannt. Die e-Funktion ist streng monoton steigend auf ganz $\mathbb{R}$. Die Bildmenge ist $\exp(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$.

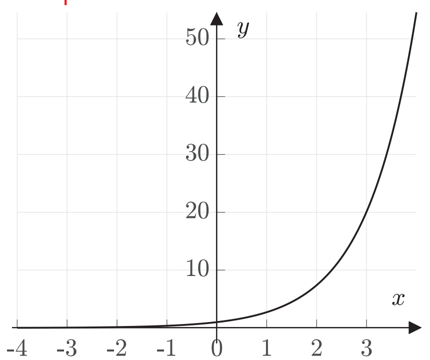


Bild 1.5 Der Graph von exp

Die e-Funktion ist einfach eine Potenzfunktion; man rechnet mit ihr gemäß den bekannten Potenzrechenregeln.

Satz 1.1

Logarithmusfunktion

Die e-Funktion ist umkehrbar; ihre Umkehrfunktion heißt **natürlicher Logarithmus**, $\ln : \mathbb{R}_+ \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$. Es gelten die folgenden Rechenregeln für alle $x, y > 0$:

$$\ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y \tag{1.1}$$

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y \tag{1.2}$$

$$\ln(x^r) = r \cdot \ln x, \quad \text{für alle } r \in \mathbb{R} \tag{1.3}$$

$$\ln(\sqrt[n]{x}) = \frac{1}{n} \cdot \ln x, \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \tag{1.4}$$

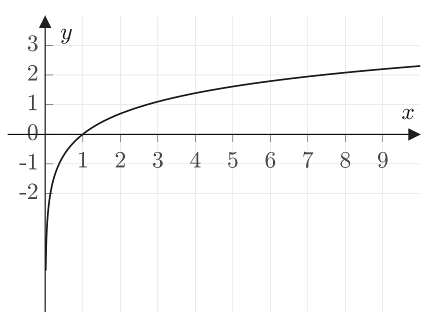


Bild 1.6 Der Graph von ln

1.2 Trigonometrische Funktionen

Alle Winkel werden im Bogenmaß verwendet. Das bedeutet, dass wir anstelle des Winkels in Grad die Länge des zu diesem Winkel gehörenden Kreisbogen auf dem Einheitskreis verwenden[1]. Der gesamte Einheitskreis wird durch einen Winkel von 360° beschrieben und hat einen Umfang von 2π, also entspricht 360° im Bogenmaß 2π. Die Umrechnung geschieht mit dem klassischen Dreisatz.

Die Winkelfunktionen sin, cos, tan, cot können durch Längen von Streckenabschnitten am Einheitskreis definiert werden, siehe Bild 1.7. Je nach Lage der Streckenabschnitte muss diese Länge noch ein Vorzeichen bekommen, z. B. liegt für $x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ die ganze Geschichte im zweiten Quadranten (links oben) und damit wird $\sin x > 0$, $\cos x < 0$, $\tan x > 0$, $\cot x < 0$.

An diesem Bild können Sie viele wichtige Eigenschaften der Winkelfunktionen direkt ablesen. Es ist aber in den anderen drei Quadranten auf die Vorzeichen der Größen zu achten. Die Eigenschaften aus Formeln abzulesen ist oft etwas verwirrend, weil die Winkelfunktionen und auch die Formeln recht ähnlich aussehen. Wirkliche Einsicht bringt dagegen dieses Bild.

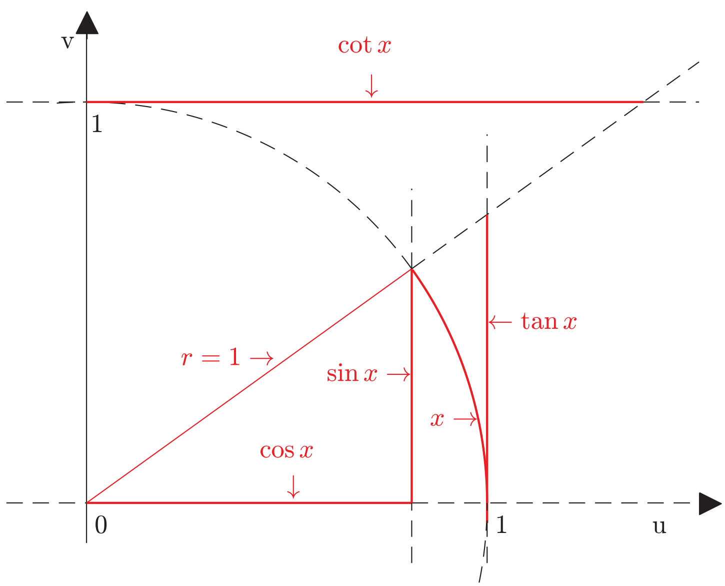


Bild 1.7 Definition von sin, cos, tan und cot am Einheitskreis: x ist der Winkel im Bogenmaß.

[1] Sie werden schnell merken, dass in der Mathematik i. Allg. die Dinge genauso heißen wie sie sind: Bogenmaß heißt Bogenmaß, weil hier die Länge eines Kreisbogens gemessen wird.

Satz 1.2

Eigenschaften (I) von sin und cos

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\sin x \in [-1,1], \quad \cos x \in [-1,1] \tag{1.5}$$
$$\sin(x+2\pi) = \sin x, \quad \cos(x+2\pi) = \cos x \tag{1.6}$$
$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \tag{1.7}$$
$$\sin(-x) = -\sin x, \quad \cos(-x) = \cos x \tag{1.8}$$
$$|\sin x| \leq |x| \tag{1.9}$$

Hierbei bedeutet $\sin^2 x := (\sin x)^2$ und $\cos^2 x := (\cos x)^2$.

Zur Festigung: Machen Sie sich alle diese Eigenschaften an Bild 1.7 klar.

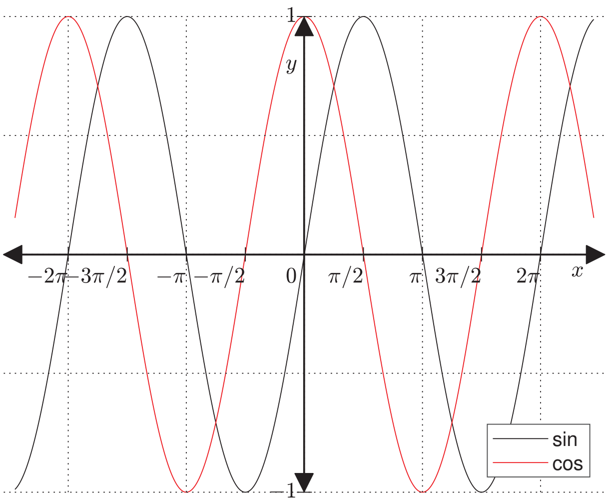


Bild 1.8 Die Graphen von sin und cos

Man sieht: Der Graph von sin ist einfach der von cos, nur verschoben (und umgekehrt). cos ist also eine Translation (siehe Def. 1.5) von sin um $\frac{\pi}{2}$, wir können also schreiben: $\cos = \sin \circ t_{0.5\pi}$.

Definition 1.12

Periodische Funktion

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt ***p*-periodisch**, wenn gilt:

$$f(x+p) = f(x) \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Dabei ist p eine Konstante, die sog. **Periode** der Funktion f.

sin und cos sind nach (1.6) also 2π-periodische Funktionen.

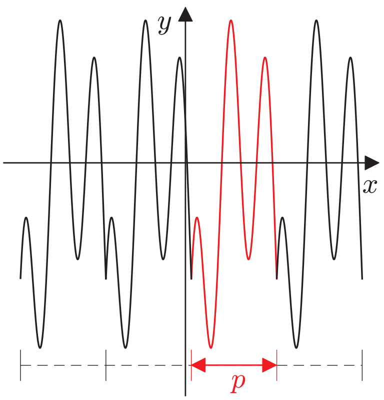


Bild 1.9 Der Graph einer p-periodischen Funktion: Ein Abschnitt der Länge p wiederholt sich.

Eine p-periodische Funktion ist eindeutig beschrieben durch Angabe der Funktionsvorschrift auf einem Intervall der Länge p. Außerhalb dieses Intervalls wird die Funktion „periodisch fortgesetzt“. Für den Graphen von f bedeutet das, dass der Graph über diesem Intervall rechts und links immer wieder angefügt wird. Dabei können natürlich Sprünge entstehen, wenn die Stücke an den Klebestellen nicht zusammenpassen. In Bild 1.9 passiert das aber nicht, da die Funktionswerte am linken und am rechten Rand des Intervalls übereinstimmen.

Eigenschaften (II) von sin und cos

Zur Festigung: Formulieren Sie diese Eigenschaften als Kompositionen von sin, cos und geeigneten Translationen t_c.

Man sieht also: sin und cos sind Translationen voneinander.

Satz 1.3

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned}
\sin\left(x+\tfrac{\pi}{2}\right) &= \cos x, & \cos\left(x+\tfrac{\pi}{2}\right) &= -\sin x\\
\sin(\pi - x) &= \sin x, & \cos(\pi - x) &= -\cos x\\
\sin(x+\pi) &= -\sin x, & \cos(x+\pi) &= -\cos x\\
\sin\left(\tfrac{\pi}{2}-x\right) &= \cos x, & \cos\left(\tfrac{\pi}{2}-x\right) &= \sin x
\end{aligned}$$

Additionstheoreme für sin und cos

Satz 1.4

Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned}
\sin(x \pm y) &= \sin x \cos y \pm \cos x \sin y\\
\cos(x \pm y) &= \cos x \cos y \mp \sin x \sin y
\end{aligned}$$

Schwingungen

Schwingungen entstehen durch zwei Skalierungen und eine Translation aus der sin-Funktion.

Definition 1.13

Sei $A > 0$, $\omega > 0$, $\varphi \in \mathbb{R}$. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(t) := A \sin(\omega t + \varphi)$$

heißt **Schwingung** mit **Amplitude** A, **Kreisfrequenz** ω und

Sachwortverzeichnis