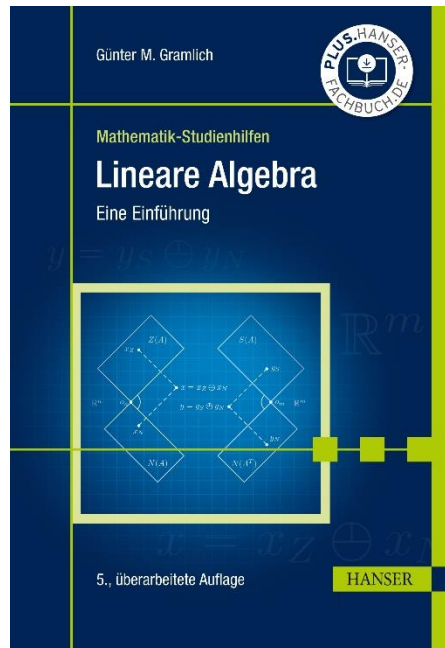


# HANSER



## Leseprobe

zu

## Lineare Algebra

von Günter M. Gramlich

Print-ISBN: 978-3-446-47188-7  
E-Book-ISBN: 978-3-446-47216-7

Weitere Informationen und Bestellungen unter

<https://www.hanser-kundencenter.de/fachbuch/artikel/9783446471887>

sowie im Buchhandel

© Carl Hanser Verlag, München

## Vorwort

Vorlesungen zur Linearen Algebra gehören zu den Pflichtveranstaltungen der mathematischen Grundausbildung von allen Studierenden der ingenieurwissenschaftlichen, wirtschaftswissenschaftlichen, naturwissenschaftlichen, mathematischen sowie informations- und kommunikationstechnischen Fachrichtungen an Fachhochschulen, Hochschulen und Universitäten.

Die Lineare Algebra hat sich aus zwei unterschiedlichen Teilgebieten entwickelt: der Analytischen Geometrie und dem Studium linearer Gleichungssysteme. Die Lineare Algebra ist ein faszinierendes Gebiet innerhalb der Mathematik mit großem Anwendungspotenzial. Sie lässt sich aus drei Blickpunkten betrachten. Erstens: Geometrischer Blickpunkt. Die Analytische Geometrie modelliert geometrische Objekte mithilfe der Linearen Algebra. Zweitens: Arithmetischer Blickpunkt. Modellieren und rechnen mit linearen Gleichungen, Vektoren und Matrizen sind für praktische Probleme, für Computermathematik (Numerische Mathematik) und für Computersimulationen von großer Bedeutung. Drittens: Algebraischer Blickpunkt. In der strukturbetonten Theorie der Vektorräume tritt das Wesen der Mathematik als Strukturwissenschaft besonders hervor. Ich habe mich bemüht, in dieser Einführung alle drei Blickpunkte zur Geltung kommen zu lassen.

Das Ihnen vorliegende Buch zur Linearen Algebra gibt eine konzentrierte Darstellung wesentlicher Begriffe, Ergebnisse und Methoden und stellt das Üben, Trainieren und Verständnis dieser anhand vieler Beispiele mit Lösungen in den Mittelpunkt. Das Buch eignet sich daher insbesondere auch zum Selbststudium, zur Prüfungsvorbereitung und zur Klausurvorbereitung.

Matrizen, lineare Gleichungssysteme, Vektorräume und lineare Abbildungen sind wichtige Begriffe der Linearen Algebra. Zentrale Gleichungen der Linearen Algebra sind lineare Gleichungen und Eigenwertgleichungen. Es ist faszinierend, wie viel man über diese beiden Gleichungstypen sagen (und lernen) kann. Viele Anwendungen sind diskret und nicht kontinuierlich, digital anstatt analog und linearisierbar anstatt unberechenbar und chaotisch. Dann aber sind Matrizen und Vektoren die geeigneten Objekte und die Lineare Algebra die richtige Sprache; an die Stelle von kontinuierlichen Funktionen treten Vektoren.

Das Buch ist so angelegt, dass es in der vorgegebenen Reihenfolge, sicher aber mit häufigem Zurückblättern, bearbeitet werden kann. Die mathematischen Sätze sind durchnummeriert. Eine Definition erkennt man nicht daran, dass davor das Schlüsselwort Definition steht, sondern daran, dass der zu definierende Begriff **fett** gedruckt ist. An vielen Beispielen und Aufgaben können Sie Begriffe und Methoden der Linearen Algebra trainieren. Lösungen von Beispielen und Aufgaben sind immer Musterlösungen, das

---

heißt, auch andere Lösungen oder Lösungswege sind möglich. Bei den Aufgaben ich mich bemüht, keine unnötigen Tricks einzubauen, sondern Ihnen Erfolgserlebnisse zu ermöglichen. Das Sachwortverzeichnis ist recht ausführlich angelegt, um das Auffinden von Definitionen und Erläuterungen beim Zurückblättern oder bei der späteren Arbeit mit dem Buch zu erleichtern. Beweise habe ich geführt, wenn sie zum Verständnis der betrachteten Zusammenhänge beitragen. Oft werden mathematische Sätze jedoch nur formuliert und ihre Bedeutung wird an Beispielen aufgezeigt. Sind Sie an Beweisen interessiert, die ich nicht geführt habe, so verweise ich Sie auf die angegebene Literatur. In diesem Sinn kann das vorliegende Buch die mathematisch und logisch formal präzise und umfangreiche Literatur aus dem Bereich der Linearen Algebra nicht an jeder Stelle ersetzen, und will es auch gar nicht. Wo immer es möglich ist, habe ich versucht, Definitionen und Sätze mit Beispielen zu motivieren und Querbezüge in ihren sachlichen Kontext einzuordnen. Auch möchte ich die Schönheit, Eleganz, Faszination und Nützlichkeit übertragen, die dieses Teilgebiet der Mathematik ausstrahlt.

Die Menge der natürlichen Zahlen  $\{1, 2, 3, \dots\}$  wird mit  $\mathbb{N}$  bezeichnet und die Menge der reellen Zahlen heißt  $\mathbb{R}$ . Beweise, Beispiele und Algorithmen habe ich mit dem nicht ausgefüllten Quadratzeichen  $\square$  abgeschlossen. Statt  $1, 2, \dots, n$  schreibe ich auch gerne  $1 : n$ .

In den ersten beiden Kapiteln machen wir uns mit reellen geordneten Tupel und Matrizen vertraut. Das nächste Kapitel behandelt lineare Gleichungssysteme. Vektorräume, Basen und Dimensionen sind zentrale Begriffe der Linearen Algebra; sie werden allgemein eingeführt und definiert (Vektorraumaxiome). Ansonsten arbeite ich meistens mit dem endlich dimensionalen Vektorraum-Prototyp  $\mathbb{R}^n$  und dem natürlichen Skalarprodukt. Mit den vier Fundamentarräumen einer Matrix lassen sich die grundlegenden Begriffe der Linearen Algebra gut verstehen. Lineare Abbildungen, Eigenwerte und Eigenvektoren sind klassische Themen; diesen sind jeweils eigene Kapitel gewidmet.

Das vorliegende Buch habe ich vollständig in  $\text{\LaTeX}$  mit der Hauptklasse `scrbook` des KOMA-Script Pakets erstellt, das Literaturverzeichnis mit `biblatex`, den Index mit `MakeIndex`, und alle Bilder mit `PSTricks`. Ohne diese schönen Tools wäre dies alles viel schwieriger oder gar unmöglich gewesen.

Ich danke allen Studenten, Kollegen und Interessierten, die durch Hinweise auf Druck- oder Denkfehler, oder einfach durch ihr fachliches oder didaktisches Interesse an diesem Buch und seinem Inhalt, zur Verbesserung des Textes beigetragen haben. Danke an das professionelle Team vom CARL HANSER Verlag Frau SILAKOVA-HERZBERG, Frau KUBIAK und Frau KURTH für Hinweise zur Gestaltung des Buches.

Für jede Anregung, nützlichen Hinweis oder Verbesserungsvorschlag bin ich dankbar. Sie können mich über Post oder E-Mail `Guenter.Gramlich@thu.de` erreichen.

In dieser überarbeiteten Auflage habe ich an zahlreichen Stellen Änderungen, Glättungen, Verbesserungen, Erweiterungen und Neubearbeitungen vorgenommen.

Ulm, im Sommer 2021

Günter M. Gramlich

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Reelle geordnete Tupel</b>	<b>11</b>
1.1	Rechnen mit reellen Tupeln . . . . .	11
1.2	Visualisierungen von reellen Tupeln . . . . .	14
1.3	Weitere Bemerkungen und Hinweise . . . . .	15
1.4	Aufgaben . . . . .	16
<b>2</b>	<b>Reelle Matrizen</b>	<b>19</b>
2.1	Spezielle Matrizen . . . . .	21
2.2	Rechnen mit Matrizen . . . . .	23
2.3	Isomorphismen und Identifikationen . . . . .	33
2.4	Zum Rechnen mit Matrizen . . . . .	34
2.5	Potenzen von Matrizen . . . . .	44
2.6	Inverse Matrizen . . . . .	46
2.7	Weitere Bemerkungen und Hinweise . . . . .	48
2.8	Aufgaben . . . . .	49
<b>3</b>	<b>Reelle lineare Gleichungssysteme</b>	<b>53</b>
3.1	GAUSS-Verfahren . . . . .	56
3.2	Eine weitere Matrizenform . . . . .	68
3.3	Zur Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems . . . . .	69
3.4	Führende und freie Variablen . . . . .	70
3.5	Unter-, über- und bestimmte Systeme . . . . .	70
3.6	Der Rang einer Matrix . . . . .	72
3.7	Zeilen- und Spaltenbild . . . . .	78
3.8	Beispiele . . . . .	78
3.9	Quadratische lineare Gleichungssysteme und inverse Matrizen . . . . .	82
3.10	Weitere Bemerkungen und Hinweise . . . . .	83
3.11	Aufgaben . . . . .	84
<b>4</b>	<b>Reelle Vektorräume</b>	<b>89</b>
4.1	Die Vektorraum-Definition . . . . .	89
4.2	Der Vektorraum $\mathbb{R}^n$ . . . . .	92
4.3	Weitere Beispiele von reellen Vektorräumen . . . . .	93
4.4	Untervektorräume . . . . .	94
4.5	Nullräume und homogene lineare Gleichungssysteme . . . . .	97
4.6	Linearkombinationen, lineare Hülle, Erzeugendensystem . . . . .	100
4.7	Spaltenraum und Zeilenraum . . . . .	105
4.8	Die vier Fundamentalräume einer Matrix . . . . .	105

4.9	Spaltenräume und lineare Gleichungssysteme . . . . .	107
4.10	Lineare Unabhängigkeit und Abhängigkeit . . . . .	109
4.11	Basis und Dimension . . . . .	112
4.12	Koordinaten, Koordinatenvektoren und Komponenten . . . . .	117
4.13	Lineare Gleichungssysteme und der Vektorraum $\mathbb{R}^n$ . . . . .	120
4.14	Basen und Dimensionen für die vier Fundamentalmräume . . . . .	123
4.15	Summe und direkte Summe von Untervektorräumen . . . . .	133
4.16	Weitere Bemerkungen und Hinweise . . . . .	135
4.17	Aufgaben . . . . .	137
<b>5</b>	<b>Lineare Abbildungen von <math>\mathbb{R}^n</math> nach <math>\mathbb{R}^m</math></b>	<b>141</b>
5.1	Abbildungen . . . . .	141
5.2	Lineare Abbildungen . . . . .	142
5.3	Weitere Beispiele von linearen Abbildungen . . . . .	148
5.4	Kern und Bild linearer Abbildungen . . . . .	150
5.5	Verkettungen und Matrizenmultiplikationen . . . . .	154
5.6	Lineare Umkehrabbildungen und inverse Matrizen . . . . .	156
5.7	Weitere Verknüpfungen . . . . .	158
5.8	Lineare Abbildungen und lineare Gleichungssysteme . . . . .	159
5.9	Weitere Bemerkungen und Hinweise . . . . .	160
5.10	Aufgaben . . . . .	161
<b>6</b>	<b>Der Vektorraum <math>\mathbb{R}^n</math> mit Skalarprodukt</b>	<b>163</b>
6.1	Länge, Abstand, Winkel und Projektion . . . . .	165
6.2	Orthogonal- und Orthonormalbasen . . . . .	171
6.3	Orthogonale Teilmengen und orthogonale Summen . . . . .	176
6.4	Orthogonale Komplemente . . . . .	178
6.5	Über die vier Fundamentalmräume . . . . .	180
6.6	Das Kreuzprodukt im $\mathbb{R}^3$ . . . . .	183
6.7	Weitere Bemerkungen und Hinweise . . . . .	184
6.8	Aufgaben . . . . .	185
<b>7</b>	<b>Spezielle lineare Abbildungen von <math>\mathbb{R}^n</math> nach <math>\mathbb{R}^m</math></b>	<b>187</b>
7.1	Transponierte Abbildungen . . . . .	187
7.2	Symmetrische Abbildungen . . . . .	189
7.3	Orthonormale Matrizen . . . . .	191
7.4	Orthonormale Abbildungen . . . . .	194
7.5	Idempotente Abbildungen . . . . .	196
7.6	Projektive Abbildungen . . . . .	197
7.7	Orthogonale projektive Abbildungen . . . . .	200
7.8	Weitere Bemerkungen und Hinweise . . . . .	209
7.9	Aufgaben . . . . .	210
<b>8</b>	<b>Reelle Determinanten</b>	<b>211</b>
8.1	Die Determinante einer $(2, 2)$ -Matrix . . . . .	211

8.2 Verallgemeinerung auf $(n, n)$ -Matrizen . . . . .	213
8.3 Determinanten, Invertierbarkeit und lineare Gleichungssysteme . . . . .	217
8.4 Weitere Bemerkungen und Hinweise . . . . .	219
8.5 Aufgaben . . . . .	219
<b>9 Reelle Eigenwerte und Eigenvektoren</b>	<b>221</b>
9.1 Definitionen und erste Eigenschaften . . . . .	221
9.2 Bestimmung von Eigenwerten und Eigenvektoren . . . . .	224
9.3 Eigenräume und Basen von Eigenvektoren . . . . .	228
9.4 Basen von Eigenvektoren und Diagonalisierbarkeit . . . . .	232
9.5 Orthonormale Basen von Eigenvektoren . . . . .	235
9.6 Orthogonale Basen von Eigenvektoren und orthogonale Eigenräume . . . . .	239
9.7 Weitere Bemerkungen und Hinweise . . . . .	239
9.8 Aufgaben . . . . .	240
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>243</b>
<b>Stichwortverzeichnis</b>	<b>245</b>



# 1 Reelle geordnete Tupel

Wir erinnern an die Begriffe Produktmenge und geordnete Tupel. Ist  $n \in \mathbb{N}$  und sind  $A_1, \dots, A_n$  Mengen, so heißt die Menge  $A \times \dots \times A_n = \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_1 \in A_1, \dots, a_n \in A_n\}$  Produktmenge (kartesisches Produkt, Kreuzmenge, Mengenprodukt) der Mengen  $A_1$  bis  $A_n$ . Die Elemente der Menge  $A \times \dots \times A_n$  heißen geordnete Tupel oder kurz Tupel. Bei Tupel kommt es auf die Reihenfolge an. Zwei Tupel  $(a_1, \dots, a_n)$  und  $(b_1, \dots, b_n)$  sind genau dann gleich, wenn  $a_1 = b_1, \dots, a_n = b_n$  gilt. Es kommt auch vor, dass Tupel als Listen bezeichnet werden.

Von besonderer Bedeutung ist nun der Fall, wenn  $A_j$  für jedes  $j \in \{1, \dots, n\}$  gleich der Menge der reellen Zahlen  $\mathbb{R}$  ist. In diesem Fall schreibt man für  $\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$  kurz  $\mathbb{R}^n$ . Somit gilt

$$\mathbb{R}^n = \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_1 \in \mathbb{R}, \dots, a_n \in \mathbb{R}\}.$$

Die Elemente von  $\mathbb{R}^n$  sind **reelle geordnete Tupel**. Ist  $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$  ein reelles Tupel, so heißen die Zahlen  $a_1, \dots, a_n$  **Koordinaten (Einträge, Komponenten)** von  $(a_1, \dots, a_n)$ . Je nach Wahl von  $n \in \mathbb{N}$  haben diese Tupel eigene Namen: Für  $n = 2$ : reelles Paar oder reelles Dupel, für  $n = 3$  reelles Tripel, für  $n = 4$  reelles Quadrupel, für  $n = 5$  reelles Quintupel, usw. Verwenden wir einen Buchstaben für ein Element aus  $\mathbb{R}^n$ , dann verwenden wir oft denselben Buchstaben mit einem Index, wenn die Koordinaten angezeigt werden sollen. Zwei reelle  $n$ -Tupel  $a = (a_1, \dots, a_n)$  und  $b = (b_1, \dots, b_n)$  sind genau dann gleich, wenn die entsprechenden Koordinaten gleich sind, also  $a_j = b_j$  für alle  $j = 1, 2, \dots, n$  ist.

*Beispiel 1.1* Hier sind ein paar Elemente aus der Produktmenge  $\mathbb{R}^2$ :  $(3, 2)$ ,  $(1, -1)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(\pi, e)$ ,  $(\cos(\pi/4), \sin(\pi/4))$ . Bitte beachten Sie: Es ist  $\{1, 2\} = \{2, 1\}$ , aber  $(1, 2) \neq (2, 1)$ , und  $\{3, 3\} = \{3\}$ , aber  $(3, 3) \neq (3)$ .  $\square$

## 1.1 Rechnen mit reellen Tupeln

Sind  $a = (a_1, \dots, a_n)$  und  $b = (b_1, \dots, b_n)$  reelle Tupel aus  $\mathbb{R}^n$ , so definiert man

$$a \oplus b = (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n).$$

Dies ist die **Tupeladdition** von reellen Tupeln in  $\mathbb{R}^n$ . Das Symbol  $\oplus$  kennzeichnet die neue Verknüpfung Addition in der Menge  $\mathbb{R}^n$ . Es wird nur hier in der Definition verwendet, damit der Unterschied zur gewöhnlichen Addition  $+$  in den reellen Zahlen



$\mathbb{R}$  deutlich wird. Statt  $\oplus$  schreiben wir in Zukunft einfach  $+$ . Die Tupeladdition ist eine mathematische Abbildung von  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  nach  $\mathbb{R}^n$  mit  $(a, b) \mapsto a + b$ . Das **Nulltupel** in  $\mathbb{R}^n$  ist  $o = (0, \dots, 0)$ . Das Nulltupel  $o$  hat die Eigenschaft, dass es bezüglich der Addition neutral ist, denn es ist  $a + o = a$ , wobei  $a$  irgendein Element aus  $\mathbb{R}^n$  ist. Aus diesem Grund wird das Nulltupel auch **neutrales Element** oder **neutrales Tupel** der Tupeladdition genannt. Das zu  $a = (a_1, \dots, a_n)$  **negative Tupel** oder **Gegentupel** ist das Tupel  $-a = (-a_1, \dots, -a_n)$  und es ist  $a + (-a) = o$ . Das Nulltupel aus  $\mathbb{R}^n$  schreiben wir auch als  $o_n$ , um anzudeuten, dass es  $n$  Nullkoordinaten hat. Die **Tupelsubtraktion** in  $\mathbb{R}^n$  lässt sich auf die reelle Tupeladdition zurückführen; es ist  $a \ominus b = a + (-b)$ . Statt  $\ominus$  schreibt man  $-$ . Es ist also  $a - b = (a_1 - b_1, \dots, a_n - b_n)$ , das heißt das Differenztupel  $a - b$  erhält man durch Subtraktion der Koordinaten in  $b$  von den entsprechenden Koordinaten in  $a$ . Die Tupelsubtraktion ist eine Abbildung von  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit  $(a, b) \mapsto a - b$ .

Die Multiplikation einer reellen Zahl  $r$  mit einem reellen Tupel  $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ , also  $r \odot a$ , ist das Tupel, das durch Multiplikation jeder Koordinate von  $a$  mit  $r$  gewonnen wird:

$$r \odot a = (r \cdot a_1, \dots, r \cdot a_n).$$

Man nennt es **reelle Multiplikation (skalare Multiplikation)**. Statt  $\odot$  schreibt man  $\cdot$ . Den Punkt zwischen einer reellen Zahl und einem Tupel lässt man oft weg, also gilt  $r \cdot a = ra$ . Die reelle Multiplikation ist eine Abbildung von  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit  $(r, a) \mapsto ra$ . Die Reihenfolge der Operationen ist  $\cdot, +, -$  (Punkt vor Strich).

*Beispiel 1.2* Es sind die Tupel  $a = (1, 2) \in \mathbb{R}^2$  und  $b = (3, -4) \in \mathbb{R}^2$  gegeben. Ferner ist  $r = 2$ . Bestimmen Sie das Tupel  $a + b$ , das Tupel  $ra$  und das Tupel  $a - b$ .

*Lösung:* Die Summe ist  $a + b = (1, 2) + (3, -4) = (1 + 3, 2 + (-4)) = (4, -2) \in \mathbb{R}^2$ . Das skalare Produkt ist  $ra = 2(1, 2) = ((2)(1), (2)(2)) = (2, 4) \in \mathbb{R}^2$  und die Subtraktion ergibt  $a - b = (-2, 6) \in \mathbb{R}^2$ .  $\square$

Für reelle Tupel lassen sich grundlegende und nützliche Rechenregeln aufstellen.

**Satz 1.1** *Es sind  $n \in \mathbb{N}$ ,  $r, s \in \mathbb{R}$ ,  $o \in \mathbb{R}^n$  das Nulltupel und  $a, b, c \in \mathbb{R}^n$ . Dann gelten die folgenden acht Rechenregeln:*

$$(a) \quad a + b = b + a$$

$$(e) \quad r \cdot (a + b) = (r \cdot a) + (r \cdot b)$$

$$(b) \quad a + (b + c) = (a + b) + c$$

$$(f) \quad (r + s) \cdot a = (r \cdot a) + (s \cdot a)$$

$$(c) \quad a + o = a$$

$$(g) \quad r(s \cdot a) = (rs) \cdot a$$

$$(d) \quad a + (-a) = o$$

$$(h) \quad 1 \cdot a$$

Aufgrund der Vereinbarung Punkt- vor Strichrechnung dürfen wir zum Beispiel (e) auch schreiben als  $r \cdot (a + b) = r \cdot a + r \cdot b$ .

*Beweis:* Wir beweisen die Kommutativregel  $a + b = b + a$ . Sind  $a = (a_1, \dots, a_n)$  und  $b = (b_1, \dots, b_n)$  zwei (beliebige) Tupel aus  $\mathbb{R}^n$  so gilt:

$$\begin{aligned} a + b &= (a_1, \dots, a_n) + (b_1, \dots, b_n) = (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n) \\ &= (b_1 + a_1, \dots, b_n + a_n) = (b_1, \dots, b_n) + (a_1, \dots, a_n) \\ &= b + a. \end{aligned}$$

Man erkennt: Die Kommutativregel gilt, weil sie bei den reellen Zahlen  $\mathbb{R}$  gilt; die Regel überträgt sich. Die anderen sieben Rechenregeln beweist man analog.  $\square$

Wir werden später weitere Rechenregeln und Eigenschaften von reellen Tupel kennenlernen.

Gegeben sind die reellen Tupel  $a_1, a_2, \dots, a_r$  aus  $\mathbb{R}^n$  und reelle Zahlen  $s_1, s_2, \dots, s_r$ . Dann heißt das reelle Tupel

$$s_1 a_1 + s_2 a_2 + \dots + s_r a_r$$

**Linearkombination (lineare Kombination)** von  $a_1, a_2, \dots, a_r$ . Die reellen Zahlen  $s_j$  heißen **Koeffizienten**. Das reelle Tupel  $a$  ist eine Linearkombination der reellen Tupel  $a_1, a_2, \dots, a_r$ , wenn gilt  $a = s_1 a_1 + s_2 a_2 + \dots + s_r a_r$  für irgendwelche reelle Zahlen  $s_1, s_2, \dots, s_r$ .

*Beispiel 1.3* Für  $(2, -3, 4, 5)$  und  $(0, 2, 7, -1)$  aus  $\mathbb{R}^4$  ist

$$2(2, -3, 4, 5) + (-1)(0, 2, 7, -1) = (4, -8, 1, 11)$$

eine Linearkombination mit den Koeffizienten 2 und  $-1$ .  $\square$

Gegeben sind  $r \in \mathbb{N}$  und reelle Tupel  $a_1, a_2, \dots, a_r$  aus  $\mathbb{R}^n$ . Dann heißt die Menge aller Linearkombinationen

$$\{s_1 a_1 + s_2 a_2 + \dots + s_r a_r \mid s_1, s_2, \dots, s_r \in \mathbb{R}\}$$

**lineare Hülle** der Tupel  $a_1, a_2, \dots, a_r$ . Man schreibt  $\text{Lin}(a_1, a_2, \dots, a_r)$  für diese Menge.

*Beispiel 1.4* Für  $(2, 1)$  aus  $\mathbb{R}^2$  ist  $\text{Lin}(2, 1) = \{s(2, 1) \mid s \in \mathbb{R}\}$  die Menge der Linearkombinationen des Tupels  $(2, 1)$ . Zum Beispiel sind  $(4, 2) \in \text{Lin}(2, 1)$  und  $(-8, -4) \in \text{Lin}(2, 1)$ , aber  $(1, 1) \notin \text{Lin}(2, 1)$ .  $\square$

**Satz 1.2** Sind  $r \in \mathbb{N}$  und reelle Tupel  $a_1, a_2, \dots, a_r$  aus  $\mathbb{R}^n$  gegeben. Dann ist die lineare Hülle  $\text{Lin}(a_1, a_2, \dots, a_r)$  eine Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$ , es ist also  $\text{Lin}(a_1, a_2, \dots, a_r) \subseteq \mathbb{R}^n$ .

*Beweis:* Sind  $a_1, a_2, \dots, a_r$  aus  $\mathbb{R}^n$ , dann auch jedes Vielfache und auch die Summe.  $\square$

## 1.2 Visualisierungen von reellen Tupeln

Die reellen Zahlen  $\mathbb{R}$  können wir uns als Punkte auf einer Geraden vorstellen. Hierzu legt man fest, wo 0 und 1 liegen, dann entspricht jeder reellen Zahl  $x \in \mathbb{R}$  ein Punkt auf dieser Geraden. (Zwischen  $\mathbb{R}$  und  $\mathbb{R}^1$  besteht nur ein formaler Unterschied.) Ganz ähnlich können wir uns reelle Zahlenpaare  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  als Punkte in einer Ebene vorstellen. Die waagrechte Gerade spielt dabei die Rolle von  $\mathbb{R} \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$ , die senkrechte Gerade die von  $\{0\} \times \mathbb{R}$ , siehe Bild 1.1. Zur Veranschaulichung von  $\mathbb{R}^3$  zeichnet man ähnlich wie

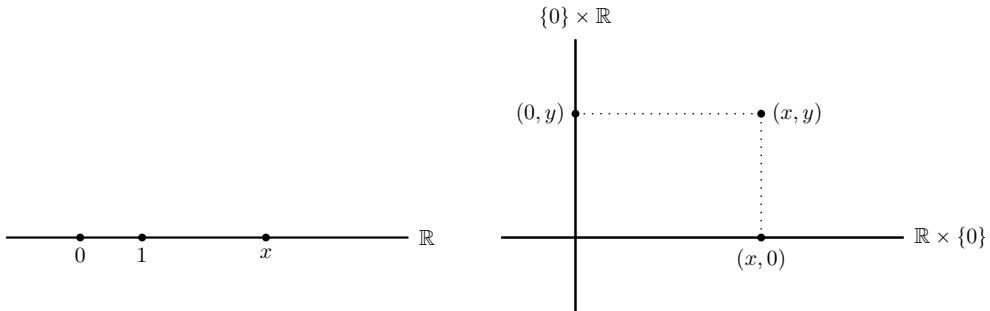


Bild 1.1: Die Menge  $\mathbb{R}$  (links) und die Menge  $\mathbb{R}^2$  (rechts) visualisiert.

bei  $\mathbb{R}^2$  die *Achsen*  $\mathbb{R} \times \{0\} \times \{0\}$ ,  $\{0\} \times \mathbb{R} \times \{0\}$  und  $\{0\} \times \{0\} \times \mathbb{R}$ , aber zweckmäßiger nur halb, sonst wird das Bild unübersichtlich.

Somit können wir uns die Menge  $\mathbb{R}^2$  als Punkte in der Ebene vorstellen. Jede Menge von reellen Zahlenpaaren kann also als Menge von Punkten der Ebene aufgefasst werden. Umgekehrt kann man jeder Punktmenge der Ebene (geometrische Figur) als Menge von reellen Zahlenpaaren auffassen und rechnerisch behandeln. Das ist der Grundgedanke der *Analytischen Geometrie*.

In Bild 1.2 haben wir die Addition zweier reeller Paare und in Bild 1.2 die Multiplikation eines reellen Paares mit einer reellen Zahl dargestellt. Durch die Addition entsteht ein Parallelogramm mit den Eckpunkten zu den Paaren  $(0, 0)$ ,  $(a_1, a_2)$ ,  $(b_1, b_2)$  und  $(a_1 + b_1, a_2 + b_2)$ . Durch die reelle Multiplikation wird der Punkt zu  $(a_1, a_2)$  mit der reellen Zahl  $r$  gestreckt (gestaucht).

Ist  $o_2 \neq a \in \mathbb{R}^2$ , so entsprechen den reellen Paaren  $ra$  mit  $r \in \mathbb{R}$  die Punkte auf der Geraden in der Ebene, die durch die Punkte zu  $o_2$  und  $a$  geht. Der linearen Hülle  $\text{Lin}(a)$  entspricht eine Ursprungsgerade in der Ebene, siehe Bild 1.3 links. Sind  $o_2 \neq a \in \mathbb{R}^2$ ,  $o_2 \neq b \in \mathbb{R}^2$  und ist  $a$  kein reelles Vielfaches von  $b$ , so entsprechen den reellen Paaren  $ra + sb$  mit  $r, s \in \mathbb{R}$  alle Punkte der Ebene. Der linearen Hülle  $\text{Lin}(a, b)$  entspricht also die ganze Ebene.

Ist  $o_3 \neq a \in \mathbb{R}^3$ , so entsprechen den reellen Tripeln  $ra$  mit  $r \in \mathbb{R}$  die Punkte auf der Geraden im Raum, die durch die Punkte zu  $o_3$  und  $a$  geht. Der linearen Hülle  $\text{Lin}(a)$

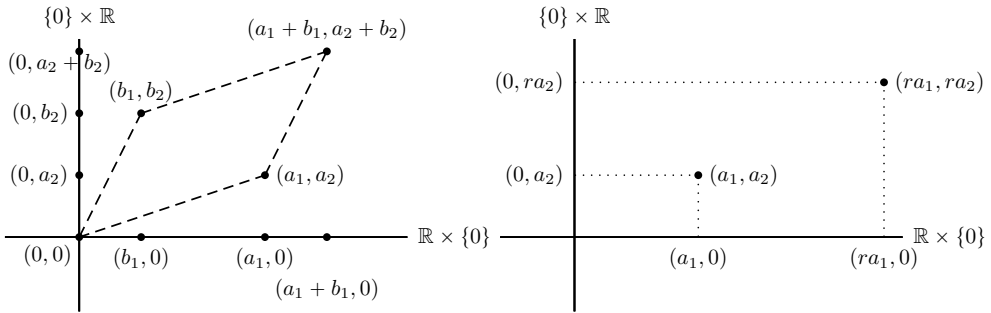


Bild 1.2: Addition (links) und reelle Multiplikation (rechts) in  $\mathbb{R}^2$  visualisiert.

entspricht eine Ursprungsgerade im Raum. Ist  $o_3 \neq a, b \in \mathbb{R}^3$  und ist  $a$  kein reelles Vielfaches von  $b$ , so entsprechen den reellen Tripeln  $ra + sb$  mit  $r, s \in \mathbb{R}$  die Punkte auf der Ebene im Raum, die durch die drei Punkte zu  $o_3$ ,  $a$  und  $b$  geht. Der linearen Hülle  $\text{Lin}(a, b)$  entspricht eine Ursprungsebene im Raum.

Eine andere Möglichkeit ein reelles Tupel zu visualisieren besteht darin, dass wir eine gerichtete Strecke (Pfeil) vom Koordinatenursprung zum Punkt zeichnen. In diesem Fall haben die Punkte auf der gerichteten Strecke keine spezielle Bedeutung, siehe Bild 1.3 (rechts).

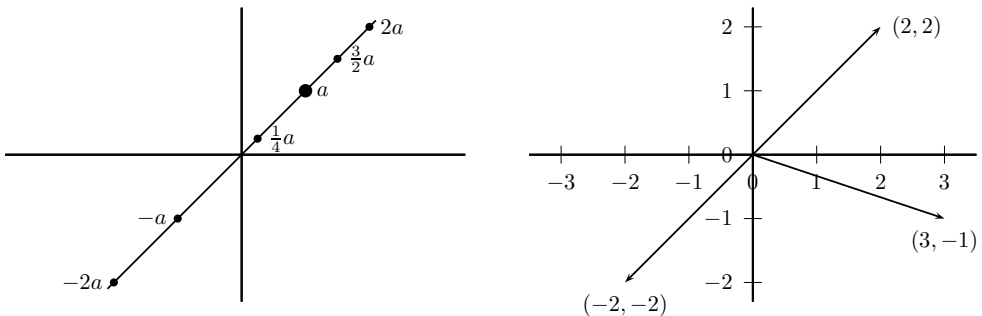


Bild 1.3:  $\text{Lin}(a)$  visualisiert (links).  $(2, 2)$ ,  $(-2, -2)$ ,  $(3, -1)$  als Pfeil visualisiert (rechts).

### 1.3 Weitere Bemerkungen und Hinweise

Bitte beachten Sie, dass wir das Pluszeichen (Summenzeichen, Additionszeichen)  $+$  in zwei verschiedenen Bedeutungen verwendet haben und auch noch verwenden werden: reelle Zahl plus reelle Zahl, reelles Tupel plus reelles Tupel. Bitte beachten Sie, dass wir das Malzeichen (Produktzeichen, Multiplikationszeichen)  $\cdot$  in zwei verschiedenen

Bedeutungen verwendet haben und auch noch verwenden werden: reelle Zahl mal reelle Zahl, reelle Zahl mal reelles Tupel.

Oft wird ein reelles geordnetes Tupel reeller Vektor genannt. In moderner Mathematik ist ein Vektor ein Element eines Vektorraumes. Vektorräume werden wir in Kapitel 4 studieren. In Kapitel 4 werden wir zeigen, dass die Menge  $\mathbb{R}^n$  mit den beiden gewöhnlichen Verknüpfungen  $+$  und  $\cdot$  aus diesem Kapitel ein reeller Vektorraum ist. Dann ist es gerechtfertigt eine reelles geordnetes Tupel einen reellen Vektor aus  $\mathbb{R}^n$  zu nennen. In Kapitel 4 werden wir noch mehr sehen: Die Menge  $\mathbb{R}^n$  ist ein reeller Vektorraum der Dimension  $n$ , ja noch mehr, er ist der Prototyp der reellen Vektorräume der Dimension  $n$ .

Es ist  $M$  eine beliebige Menge. Jede Abbildung  $\phi : M \times M \rightarrow M$  heißt *innere Verknüpfung auf  $M$* . Somit ist die Tupeladdition eine innere Verknüpfung auf  $\mathbb{R}^n$ . Es sind  $M, N$  beliebige Mengen mit  $M \neq N$ . Jede Abbildung  $\phi : N \times M \rightarrow M$  heißt *äußere Verknüpfung von  $M$  mit  $N$* . Somit ist die reelle Multiplikation eine äußere Verknüpfung von  $\mathbb{R}^n$  mit  $\mathbb{R}$ .

Bitte beachten Sie: Bilder haben oft nur eine symbolische Bedeutung; sie geben die Situation stark vereinfacht wieder. Trotzdem sind solche Bilder als Denk- und Anschauungshilfe nicht zu verachten.

Jetzt möchte ich Ihnen noch ein paar Literaturhinweise geben. Zur Linearen Algebra gibt es viele Bücher, zumal in fast jedem Buch über Mathematik ein Kapitel zur Linearen Algebra enthalten ist. Tiefer gehende theoretische Ergebnisse, weitere Anwendungen, Modelle und Aufgaben zur Linearen Algebra finden Sie in [5, 4, 6, 10, 12, 15, 16, 20, 21, 22]. Die Renner unter den deutschsprachigen Büchern sind [3, 7, 11, 15]. Doch jetzt viel Erfolg bei den Aufgaben!

## 1.4 Aufgaben

**1.1** Kreuzen Sie die wahre(n) Aussage(n) an. Es ist  $n \in \mathbb{N}$ . Dann besteht  $\mathbb{R}^n$  aus

- $n$  reellen Zahlen.   $n$ -Tupeln natürlicher Zahlen.
- $n$ -Tupeln reeller Zahlen.  Keine Aussage ist wahr.

Lösung: 

	×		
--	---	--	--

 (Spaltenweise)

**1.2** Kreuzen Sie die wahre(n) Aussage(n) an. Es ist  $\text{Lin}((1, 0), (0, 1))$  gleich

- $\mathbb{R}^2$ .
- $\{r(1, 0) \mid r \in \mathbb{R}\}$ .
- $\{r(0, 1) \mid r \in \mathbb{R}\}$ .
- $\{r(1, 0) + r(0, 1) \mid r \in \mathbb{R}\}$ .
- $\{r_1(1, 0) + r_2(0, 1) \mid r_1, r_2 \in \mathbb{R}\}$ .

- $\{r_1(1, 0) + r_2(2, 0) \mid r_1, r_2 \in \mathbb{R}\}$ .
- $\{r_1(2, 0) + r_2(0, -2) \mid r_1, r_2 \in \mathbb{R}\}$ .
- $\{r_1(0, 0) + r_2(1, 0) + r_3(0, 1) \mid r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{R}\}$ .
- Keine Aussage ist wahr.

Lösung: 

×				×		×	×	
---	--	--	--	---	--	---	---	--

**1.3** Kreuzen Sie die wahre(n) Aussage(n) an. Der Menge  $\text{Lin}((1, 1), (2, 2))$  entspricht geometrisch

- |   |  |
|---|--|
| <input type="checkbox"/> eine Strecke.    | <input type="checkbox"/> eine Ellipse.           |
| <input type="checkbox"/> eine Gerade.     | <input type="checkbox"/> eine Ebene.             |
| <input type="checkbox"/> eine Halbgerade. | <input type="checkbox"/> einem Parallelogramm.   |
| <input type="checkbox"/> ein Kreis.       | <input type="checkbox"/> Keine Aussage ist wahr. |

Lösung: 

	×						
--	---	--	--	--	--	--	--

 (Spaltenweise)

**1.4** Gegeben sind  $a = (2, 1)$  und  $b = (-1, 1)$  aus  $\mathbb{R}^2$ . Bestimmen Sie  $a + b$  und visualisieren Sie die reellen Zahlenpaare.

Lösung: Es ist  $a + b = (2, 1) + (-1, 1) = (1, 2)$ . Für eine Visualisierung siehe Bild 1.4 (links).

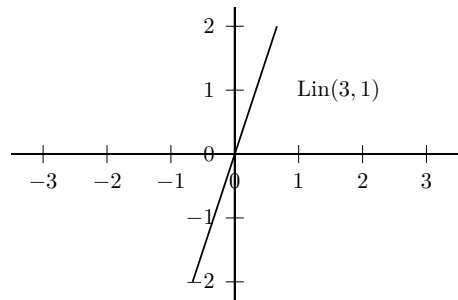
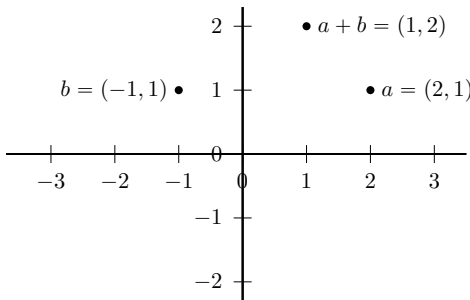


Bild 1.4: Zu Aufgabe 1.4 (links) und Aufgabe 1.5 (rechts).

**1.5** Geben Sie die Menge  $\text{Lin}(1, 3) \subset \mathbb{R}^2$  an. Welcher geometrischen Figur entspricht diese Menge?

Lösung: Es ist  $\text{Lin}(1, 3) = \{r(1, 3) \mid r \in \mathbb{R}\}$ . Die dazugehörige geometrische Figur ist eine Ursprungsgerade mit der Steigung 3 in der Ebene. Siehe Bild 1.4 (rechts).

**1.6** Gegeben sind  $a = (-1, 2)$  und  $b = (-3, -1)$  aus  $\mathbb{R}^2$ . Berechnen Sie  $a + b$  und  $a - 2b$ .

*Lösung:* Es ist  $a + b = (-1, 2) + (-3, -1) = (-1 - 3, 2 - 1) = (-4, 1)$  und  $a - 2b = (-1, 2) - 2(-3, -1) = (-1, 2) - (-6, -2) = (-1 + 6, 2 + 2) = (5, 4)$ .

**1.7** Es sind  $u = (1, -1, 0, 2) \in \mathbb{R}^4$ ,  $v = (-1, 2, 1, 0) \in \mathbb{R}^4$  und  $r = 2 \in \mathbb{R}$ . Berechnen Sie  $u + v$ ,  $ru$  und  $u - v$ .

*Lösung:* Es sind  $u + v = (1, -1, 0, 2) + (-1, 2, 1, 0) = (1 + (-1), (-1) + 2, 0 + 1, 2 + 0) = (0, 1, 1, 2)$ ,  $ru = 2(1, -1, 0, 2) = (2, -2, 0, 4)$  und  $u - v = (2, -3, -1, 2)$ .

**1.8** Gegeben sind  $a = (1, -3, 2, 4)$  und  $b = (3, 5, -1, -2)$  aus  $\mathbb{R}^4$ . Berechnen Sie  $a + b$ ,  $5a$  und  $2a - 3b$ .

*Lösung:* Es ist  $a + b = (1 + 3, -3 + 5, 2 - 1, 4 - 2) = (4, 2, 1, 2)$ ,  $5a = ((5)(1), (5)(-3), (5)(2), (5)(4)) = (5, -15, 10, 20)$  und  $2a - 3b = (2, -6, 4, 8) + (-9, -15, 3, 6) = (-7, -21, 7, 14)$ .

**1.9** Geben Sie die Mengen  $\text{Lin}((1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0)) \subseteq \mathbb{R}^4$  und  $\text{Lin}((1, 0, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 0, 1)) \subseteq \mathbb{R}^5$  an.

*Lösung:* Es ist  $\text{Lin}((1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0)) = \{(r, s, 0, 0) \mid r, s \in \mathbb{R}\}$  und  $\text{Lin}((1, 0, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 0, 1)) = \mathbb{R}^5$ .

**1.10** Es ist  $o = (0, 0, 0, 0) \in \mathbb{R}^4$ . Beweisen Sie die Rechenregel  $a + o = a$  für alle  $a \in \mathbb{R}^4$ .

*Lösung:* Es ist  $a + o = (a_1, a_2, a_3, a_4) + (0, 0, 0, 0) = (a_1 + 0, a_2 + 0, a_3 + 0, a_4 + 0) = (a_1, a_2, a_3, a_4) = a$  für jedes  $a = (a_1, a_2, a_3, a_4)$  aus  $\mathbb{R}^4$ . (Bitte beachten Sie. Wir haben im Beweis außer der Definition der Tupeladdition aus diesem Kapitel die Rechenregel  $r + 0 = r$  für jede reelle Zahl  $r$  verwendet haben. Außerdem ist das Zeichen  $+$  in zweifacher Bedeutung verwendet worden, als Tupeladdition in  $\mathbb{R}^4$  und als gewöhnliche Addition zweier reeller Zahl.)

**Sie sollten nun mit folgenden Begriffen umgehen können**

Tupel,  $\mathbb{R}^n$ , Linearkombination, lineare Hülle.

## 2 Reelle Matrizen

Es sind  $m$  und  $n$  aus  $\mathbb{N}$ . Ein  $n$ -Tupel von  $m$ -Tupeln von Elementen aus  $\mathbb{R}$

$$\left( (a_{11}, \dots, a_{m1}), \dots, (a_{1n}, \dots, a_{mn}) \right) \in \underbrace{\mathbb{R}^m \times \dots \times \mathbb{R}^m}_n$$

geschrieben in der Form

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

heißt **reelle Matrix der Ordnung**  $(m, n)$ . Die reellen Zahlen  $a_{ij}$  sind die **Einträge** oder **Komponenten** der Matrix. Das reelle  $n$ -Tupel  $(a_{i1}, \dots, a_{in}) \in \mathbb{R}^n$  ist die  **$i$ -te Zeile** der Matrix für  $i = 1 : m$  und das reelle  $m$ -Tupel  $(a_{1j}, \dots, a_{mj}) \in \mathbb{R}^m$  ist die  **$j$ -te Spalte** der Matrix für  $j = 1 : n$ . Der erste Index  $i$  von  $a_{ij}$  wird **Zeilenindex** und der zweite Index  $j$  wird **Spaltenindex** genannt. Der Matrixeintrag  $a_{ij}$  steht in der  $i$ -ten Zeile und  $j$ -ten Spalte. Die natürliche Zahl  $m$  gibt die Anzahl der Zeilen und die natürliche Zahl  $n$  gibt die Anzahl der Spalten der Matrix an.

*Beispiel 2.1* Die reelle Matrix  $((1, 7), (\sqrt{2}, -3), (-2, \pi)) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$  geschrieben in der Form

$$\begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} & -2 \\ 7 & -3 & \pi \end{bmatrix}$$

hat  $m = 2$  Zeilen,  $n = 3$  Spalten und  $2 \cdot 3 = 6$  Einträge. Es ist  $a_{11} = 1$ ,  $a_{12} = \sqrt{2}$ ,  $a_{13} = -2$ ,  $a_{21} = 7$ ,  $a_{22} = -3$  und  $a_{23} = \pi$ . Zum Beispiel ist  $(1, \sqrt{2}, -2)$  die erste Zeile und  $(-2, \pi)$  die dritte Spalte der Matrix. Die Ordnung der Matrix ist  $(2, 3)$ .  $\square$

Die Matrixeinträge  $a_{ij}$  sind in diesem Buch fast immer reelle Zahlen, also  $a_{ij} \in \mathbb{R}$  (oder natürlich Variablen, die für reelle Zahlen stehen). Gelegentlich ist es jedoch erforderlich, für die Matrixeinträge auch andere mathematische Objekte zuzulassen, zum Beispiel komplexe Zahlen, Funktionsterme oder Matrizen selbst.

Matrizen bezeichnen wir gewöhnlich mit großen lateinischen Buchstaben, zum Beispiel  $A, B, C$ , usw. Ist  $A$  eine reelle Matrix der Ordnung  $(m, n)$ , so schreiben wir dafür auch



$[a_{ij}]$  mit  $i = 1 : m$  und  $j = 1 : n$ . Die Menge aller reellen  $(m, n)$ -Matrizen bezeichnen wir mit  $\mathbb{R}^{m \times n}$ ; es gilt also

$$\mathbb{R}^{m \times n} = \{[a_{ij}] \mid a_{ij} \in \mathbb{R}, i = 1 : m \text{ und } j = 1 : n\}.$$

*Beispiel 2.2* Konstruieren Sie die Matrix  $A = [a_{ij}]$  mit  $a_{ij} = 3i - j^2$  für  $i = 1 : 2$  und  $j = 1 : 3$ .

*Lösung:* Ist  $a_{ij} = 3i - j^2$ , dann ist  $a_{11} = (3)(1) - 1^2 = 3 - 1 = 2$ ,  $a_{12} = -1$ ,  $a_{13} = -6$ ,  $a_{21} = 5$ ,  $a_{22} = 2$  und  $a_{23} = -3$ . Also ist

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -6 \\ 5 & 2 & -3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 3}. \quad \square$$

**Satz 2.1** Sind  $A = [a_{ij}]$  und  $B = [b_{ij}]$  aus  $\mathbb{R}^{m \times n}$ , so gilt  $A = B$  genau dann, wenn  $a_{ij} = b_{ij}$  für  $i = 1, 2, \dots, m$  und  $j = 1, 2, \dots, n$  ist.

*Beweis:* Aus der Mengenlehre ist bekannt, dass zwei  $n$ -Tupel genau dann gleich sind, wenn ihre entsprechenden Koordinaten (Komponenten) gleich sind. Damit gelten folgende Überlegungen. Es ist  $A = B$  genau dann, wenn

$$((a_{11}, \dots, a_{m1}), \dots, (a_{1n}, \dots, a_{mn})) = ((b_{11}, \dots, b_{m1}), \dots, (b_{1n}, \dots, b_{mn}))$$

genau dann, wenn  $(a_{1j}, \dots, a_{mj}) = (b_{1j}, \dots, b_{mj})$  für  $j = 1 : n$  genau dann, wenn  $a_{ij} = b_{ij}$  für  $i = 1 : m, j = 1 : n$ .  $\square$

*Beispiel 2.3* Die beiden Matrizen

$$\begin{bmatrix} 1 & x \\ y & -2 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

sind genau dann gleich, wenn  $x = -1$  und  $y = 2$  ist.  $\square$

Besteht eine Matrix aus einer einzigen Spalte, so heißt sie **Spaltenmatrix**, analog wird eine Matrix mit nur einer Zeile als **Zeilenmatrix** bezeichnet. Eine  $(1, 1)$ -Matrix ist sowohl Zeilen- als auch Spaltenmatrix und damit einfach eine reelle Zahl; man schreibt dann statt  $[a]$  auch einfach  $a$  (Abschnitt 2.3). Für Spaltenmatrizen verwenden wir auch kleine lateinische Buchstaben  $a, u, v, x, y$ , usw. Da es nicht notwendig ist, ihre Einträge doppelt zu indizieren, können wir die Spaltenmatrix  $a$  mit  $m$  Einträgen auch als

$$a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$$

schreiben. Mit  $\mathbb{R}^{m \times 1}$  bezeichnet man die Menge der Spaltenmatrizen mit  $m$  reellen Einträgen, und mit  $\mathbb{R}^{1 \times n}$  die Menge der Zeilenmatrizen mit  $n$  reellen Einträgen.

## 2.1 Spezielle Matrizen

Vertauscht man Zeilen und Spalten einer Matrix  $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , so erhält man die **transponierte Matrix**  $A^T \in \mathbb{R}^{n \times m}$  mit  $n$  Zeilen und  $m$  Spalten:  $A^T = [a_{ji}]$ . Hierbei ist  $i = 1 : m$  und  $j = 1 : n$ .

*Beispiel 2.4* Die Matrix

$$a = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 1} \quad \text{ist eine Spaltenmatrix und} \quad a^T = [1 \quad 2] \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$$

ist ihre Transponierte, sie ist eine Zeilenmatrix. Die Transponierte der Matrix

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 2} \quad \text{ist die Matrix} \quad B^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 3}. \quad \square$$

Eine Matrix  $A$  mit  $n$  Zeilen und  $n$  Spalten heißt **quadratische Matrix der Ordnung  $n$** . Ist eine quadratische Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  gegeben, dann bilden die Einträge  $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$  die **Hauptdiagonale** von  $A$ .

Die Matrix

$$O_{nn} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n},$$

deren sämtliche Einträge Null sind, heißt **Nullmatrix**. Für die Nullmatrix aus  $\mathbb{R}^{n \times n}$  schreibt man statt  $O_{nn}$  oft kurz  $O_n$ . Die Indizes kann man auch weglassen, wenn die Größe klar ist.

Eine Matrix  $D = [d_{ij}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$  ist eine **Diagonalmatrix**, wenn  $d_{ij} = 0$  für  $i \neq j$  gilt. Ist  $n = m$ , so hat eine Diagonalmatrix die folgende Struktur

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & & & \\ & d_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_{nn} \end{bmatrix}.$$

Vereinbarung: Schreiben wir in einer Matrix die Einträge nicht explizit, so steht dafür die Zahl Null.

# Stichwortverzeichnis

Alle **fett** gedruckten Seitenzahlen sind Referenzen auf die Definition des jeweiligen Begriffs. Demgegenüber geben normal gedruckte Seitenzahlen die Seiten einer Verwendung des Begriffs wieder.

- Abbildung, 141
- Abbildung, adjungierte, **187**
- Abbildung, idempotente, **196**
- Abbildung, identische, **148**
- Abbildung, linear, **142**
- Abbildung, orthogonale, **194**
- Abbildung, projektive, **198**
- Abbildung, symmetrische, **189**
- Abbildung, transponierte, **187**
- Abbildung, Verknüpfungstreue, 109
- Abbildung, verträglich, 33
- Abstand, **167**
- Abstand, zwischen zwei Vektoren, **167**
- Addition mit Vektoren, **90**
- Addition, von Matrizen, **23**
- adjungierte Abbildung, **187**
- äquivalente Gleichungssysteme, **56**
- äußeres Produkt, **183**
- äußere Verknüpfung, 16
- allgemeine Lösung, **55**
- allgemeine Lösung, eines Gleichungssystems, 120
- Auswahlaxiom, 137
- Axiomensystem, 136
  
- Basis, 112, **112**, 171, 218, 237
- Basis, natürliche, 113, **113**
- Basis, orthogonale, **171**
- Basis, orthonormale, **171**
- Basisvariablen, **70**
- Basiswechsel, 240
- Betrag, eines Vektors, **165**
- Betrag, Euklidischer, **165**
- Bild, 151, **151**, 152, 153
- Bild, einer linearen Abbildung, **151**
- Bildmenge, 141
- Bildraum, 136
  
- charakteristische Gleichung, **224**
- charakteristisches Polynom, **224**
  
- Definitionsmenge, 141
- Determinante, 211–214, **215**, 216, 218, 219, 225, 240
- Determinante, einer (2, 2)-Matrix, **211**
- Determinante, einer (3, 3)-Matrix, **213**
- Determinante, einer (n, n)-Matrix, **215**
- diagonalisierbare Matrix, **233**
- Diagonalmatrix, **21**, 22, 236
- Differenzgleichung, 100
- Differenzialgleichung, 100
- Differenzialoperatoren, 240
- Dimension, **115**
- direkte orthogonale Summe, **177**
- direkte Summe, 134, **134**
- Drehung, 149
- Dreiecksmatrix, **23**, 227
- dyadisches Produkt, **28**, 237
  
- Eigenfunktion, 240
- Eigenpaar, **222**
- Eigenraum, **228**, 236
- eigentliche Untervektorräume, **97**
- Eigenvektoren, 225, 226, 228–230, 233, 234
- Eigenvektoren von  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , **222**
- Eigenvektoren von  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , **222**
- Eigenvektorenmatrix, **232**, 234–237
- Eigenwert, 223, 224, 226, 228, 230
- Eigenwert von  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , **222**
- Eigenwert von  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , **221**
- Eigenwertaufgabe, 226, 240
- Eigenwerte, 225
- eindeutig lösbar, **55**
- Einheitsmatrix, **22**, 192
- Einheitsvektor, **166**
- Einheitsvektoren, natürliche, **166**

Einsvektor, 165  
elementare Gleichungsumformung, **57**  
elementare Zeilenumformung, **58**  
erweiterte Koeffizientenmatrix, **56**  
Erzeugendensystem, **104**, 114, 116  
Euklidische Länge, **165**  
Euklidische Norm, 165  
Euklidischer Vektorraum, **164**

Filter, 93  
Fourier-Entwicklung, **172**  
Fourier-Koeffizient, **172**  
Fourier-Transformation, 137  
freie Variablen, **70**  
führende Eins, **60**  
führende Variablen, **70**  
Fundamentträume, 106, **106**, 107, 123,  
180, 181  
Fundamentalsatz der Algebra, 225  
Funktion, 141  
Funktionalanalysis, 137

Gauß-Jordan-Verfahren, **66**  
Gauß-Verfahren, **62**  
Gegentupel, **12**  
Gegenvektor, **90**, 94  
Geometrie, 183  
Geschichte, der Linearen Algebra, 137  
gewöhnliches Skalarprodukt, **163**  
Gleichung, charakteristische, **224**  
Gleichungssystem, überbestimmtes, **70**  
Gleichungssystem, bestimmtes, **70**  
Gleichungssystem, homogenes, **55**  
Gleichungssystem, inhomogenes, **55**  
Gleichungssystem, inkonsistentes, **55**  
Gleichungssystem, konsistentes, **55**  
Gleichungssystem, lösbares, **55**  
Gleichungssystem, lineares, **55**  
Gleichungssystem, quadratisches, **70**  
Gleichungssystem, unlösbares, **55**  
Gleichungssystem, unterbestimmtes, **70**  
Gleichungssysteme, äquivalente, **56**  
Gleichungssysteme, gleichwertige, **56**  
Gleichungsumformung, elementare, **57**  
gleichwertige Gleichungssysteme, **56**  
Graph, 141  
Graphen, 33  
Gruppen, 33

Hauptachsentransformation, 239  
Hauptdiagonale, **21**  
Hauptdiagonaleinträge, 216, 227  
Hilbert-Schmidt-Probleme, 240  
Hintereinanderausführung, **154**  
Hintereinanderausführung, lineare, **154**  
Homomorphismen, 160

idempotent, **196**  
idempotente Abbildung, **196**  
idempotente Matrix, **44**  
Identifikation, 33  
identische Abbildung, **148**  
inkonsistentes Gleichungssystem, **55**  
innere Verknüpfung, 16  
Integraloperatoren, 240  
Inverse, **46**  
inverse Abbildung, **156**  
inverse Abbildung, linear, **156**  
inverse Matrix, **46**  
Inverse, einer Matrix, **46**  
invertierbare Matrix, **46**  
isomorph, 33, 51, 119  
Isomorphie, 33, 34  
Isomorphismus, zwischen Mengen, 33  
Isomorphismus, zwischen Vektorräumen, 33

Körper, 33  
kanonische Basis, **113**  
kartesische Koordinaten, **172**  
Kehrmatrix, **46**  
Kern, 136, 150, **150**, 153  
Kern, einer linearen Abbildung, **150**  
Koeffizienten, **55**  
Koeffizienten, einer Linearkombination von  
Matrizen, **24**  
Koeffizienten, einer Linearkombination von  
Tupeln, **13**  
Koeffizienten, einer Linearkombination von  
Vektoren, **100**  
Koeffizientenmatrix, **56**, 97  
Koeffizientenmatrix, eines linearen Systems,  
**56**  
Koeffizientenmatrix, erweiterte, **56**  
Kombination, lineare von Matrizen, **24**  
Kombination, lineare von Tupeln, **13**  
Kombination, lineare von Vektoren, **100**  
Komplement, orthogonales, **178**  
komplexe Zahlen, 90

- komplexer Vektorraum, 90  
 Komponenten, **117**  
 Komponentenabbildung, 142  
 konsistentes Gleichungssystem, **55**  
 Kontrapositionsregel, 76  
 Koordinaten, **11**, **117**  
 Koordinaten, eines reellen Tupels, **11**  
 Koordinaten, eines Vektors, **117**  
 Koordinatenabbildung, 142  
 Koordinatenursprung, 120  
 Koordinatenvektor, **117**, 172, 173  
 Kreuzprodukt, 183, **183**, 184
- Länge, eines Vektors, **165**  
 Länge, Euklidische, **165**  
 linear abhängig, **109**  
 linear unabhängig, **109**  
 lineare Abbildung, **142**  
 lineare Abbildung, orthogonale, **194**  
 lineare Abbildung, symmetrische, **189**  
 lineare Hülle, **13**, **25**, **102**  
 lineare Hülle, von Matrizen, **25**  
 lineare Hülle, von Tupeln, **13**  
 lineare Hülle, von Vektoren, **102**  
 lineare Hintereinanderausführung, **154**  
 lineare inverse Abbildung, **156**  
 lineare Kombination, von Matrizen, **24**  
 lineare Kombination, von Tupeln, **13**  
 lineare Kombination, von Vektoren, **100**  
 lineare Operatoren, 160  
 lineare Summenabbildung, **158**  
 lineare Transformationen, 160  
 lineare Umkehrabbildung, **156**  
 lineare Verkettung, **154**  
 linearer reeller Raum, **89**  
 lineares Gleichungssystem, **55**  
 lineares Gleichungssystem, universell lösbar, **55**  
 Linearkombination, von Matrizen, **24**  
 Linearkombination, von Tupeln, **13**  
 Linearkombination, von Vektoren, **100**  
 lösbares Gleichungssystem, **55**  
 Lösung, allgemeine, 120  
 Lösung, eines linearen Gleichungssystems, **55**, 120  
 Lösung, linearer Gleichungen, 120  
 Lösung, mehrdeutig, **55**  
 Lösung, triviale, **55**
- Lösung, universell eindeutig, **55**  
 Lösungsraum, 120
- MATLAB, 86, 88, 139, 242  
 Matrix, **19**  
 Matrix, Diagonal-, **21**  
 Matrix, diagonalisierbare, **233**  
 Matrix, Einheits-, **22**  
 Matrix, Eintrag der, **19**  
 Matrix, idempotente, **44**  
 Matrix, inverse, **46**  
 Matrix, invertierbare, **46**  
 Matrix, Komponente der, **19**  
 Matrix, Null-, **21**  
 Matrix, obere Dreiecks-, **23**  
 Matrix, orthogonale, **191**  
 Matrix, orthonormal, **191**  
 Matrix, quadratische, **21**  
 Matrix, reguläre, **46**  
 Matrix, symmetrische, **22**, 228, 236  
 Matrix, transponierte, **21**  
 Matrix, untere Dreiecks-, **23**  
 Matrixeintrag, **19**  
 Matrixfaktorisierung, 240  
 Matrixkomponente, **19**  
 Matrixprodukt, skalares, **24**  
 Matrizenaddition, **23**  
 Matrizenungleichung, 29  
 Matrizenmultiplikation, **26**  
 Matrizen-subtraktion, **25**  
 mehrdeutig lösbar, **55**  
 mehrdeutige Lösung, **55**  
 Mengenisomorphismen, 33  
 Merksregel von Sarrus, 214  
 Modalmatrix, **232**  
 Multiplikation von Matrizen, 26  
 Multiplikation, einer Matrix mit einem Skalar, **24**  
 Multiplikation, reelle Zahl mal Tupel, **12**  
 Multiplikation, reelle Zahl mal Vektor, **90**  
 Multiplikation, skalare, **90**  
 Multiplikation, von Matrizen, **26**
- natürliche Basis, 113, **113**  
 natürlichen Einheitsvektoren, **166**  
 natürliches Skalarprodukt, 28, 37, 78, 163, **163**  
 negative Tupel, **12**  
 negative Vektoren, **90**

- negatives Element, **90**
- neutrales Element, der Tupeladdition, **12**
- neutrales Tupel, **12**
- Norm, eines Vektors, **165**
- Norm, Euklidische, **165**
- Normalisieren, **166**
- Normieren, **166**
- normierte Zeilenstufenform, 66, 67
- Nullabbildung, **148**
- Nullelement, **90**
- Nullmatrix, **21**
- Nullraum, 98, **98**, 99, 105, 106, 122, 131, 132, 136, 218, 228
- Nulltupel, **12**
- Nullunterraum, **98**
- Nullvektor, **90**
- Nullvektorraum von  $V$ , **97**
- numerisch stabil, 192
  
- obere Dreiecksmatrix, **23**
- Ordnung, der Matrix, **19**
- Orthogonalbasis, **171**, 173
- orthogonale Abbildung, **194**
- orthogonale Basis, **171**
- orthogonale direkte Summe, **177**
- orthogonale lineare Abbildung, **194**
- orthogonale Matrix, **191**
- orthogonale Projektion, 149, **200**
- orthogonale Projektionsmatrix, **45**, 203
- orthogonale projektive Abbildung, **200**
- orthogonale Summe, **177**
- orthogonale Teilmenge, **176**
- orthogonale Vektoren, **167**
- orthogonaler Projektionsvektor, **168**
- orthogonales Komplement, **178**
- Orthogonalisierungsverfahren, 174, 175
  - nach Gram-Schmidt, 174, 175
- Orthogonalkomplement, **178**
- Orthogonalprojektion, **200**
- Orthonormalbasis, **171**
- orthonormale Basis, **171**
- orthonormale Matrix, **191**
- orthonormale Vektoren, **167**
- Orthonormalisierungsverfahren, 176
  - nach Gram-Schmidt, 176
  
- Parallelogramm, 217
- Parallelotop, 217
- Polynom, charakteristisches, **224**
  
- Produkt von Matrizen, 26
- Produkt, dyadisches, **28**
- Produkt, reelle Zahl mit Vektor, **12**
- Produkt, skalares Matrixprodukt, **24**
- Produktabbildung, 142, **159**
- Projektion, **198**
- Projektionsmatrix, **198**
- Projektionsmatrix, orthogonale, **45**, 203
- Projektionsmatrix, senkrechte, 203
- Projektionsvektor, **198**
- projektive Abbildung, **198**
  
- quadratische Matrix der Ordnung  $n$ , **21**
  
- Randwertaufgaben, 240
- Rang, **72**, 73–75
- Rang, einer Matrix, **72**
- rechte Seite, **55**
- reduzierte Staffelform, 49, 84
- reduzierte Treppenform, 49, 84
- reelle geordnete Tupel, **11**
- reelle Matrix, **19**
- reelle Multiplikation, **12**
- reelle Tupel, **11**
- reeller linearer Raum, **89**
- reeller Vektorraum, **89**
- reguläre Matrix, **46**
- Relationen, 33
- Ringe, 33
- Rückwärtssubstitution, 63
  
- Sarrussche Merkregel, 214
- Satz des Pythagoras im  $\mathbb{R}^n$ , 167
- Signal, 92
- Signalverarbeitung, 93
- singulär, **46**
- Skalar, **90**
- skalare Multiplikation, **12**, **90**
- skalares Matrixprodukt, **24**
- Skalarmultiplikation, **90**
- Skalarprodukt, 28, 37, 78, 163, **163**, 164, 165, 167, 172, 179, 183, 194, 209
- Skalarprodukt, gewöhnliches, **163**
- Skalarprodukt, natürliches, 28, 37, 78, 163, **163**
- Spaltenmatrix, 20, **20**, 28, 163
- Spaltenraum, 105, **105**, 106–109, 131, 136
- Spat, 217
- Spektraldarstellung, 237, 238

- Spektralsatz, 239  
 Spektraltheorie, 240  
 Spektrum, **222**  
 Spiegelungen, 148  
 Staffelform, 49, 84  
 Staffelnormform, 49, 84  
 Standardbasis, 113, **113**  
 Standardskalarprodukt, **163**  
 strukturgleich, 33, 34, 51, 109, 119, 161  
 Strukturgleichheit, 33, 161  
 Strukturgleichheit, zwischen Mengen, 33  
 Sturm-Liouville-Probleme, 240  
 Subtraktion von Vektoren, **91**  
 Summe, **133**  
 Summe, direkte, 134  
 Summe, orthogonale, **177**  
 Summe, von Matrizen, **23**  
 Summenabbildung, 142, **158**  
 Summenabbildung, linear, **158**  
 symmetrische Abbildung, **189**  
 symmetrische lineare Abbildung, **189**  
 symmetrische Matrix, **22**, 228, 236
- Teilmenge, orthogonale, **176**  
 Teilraum, **94**  
 Tensorprodukt, **28**  
 Trägermenge, **90**  
 Transformation, 148  
 transponierte Abbildung, **187**  
 transponierte Matrix, **21**  
 Treppenform, 49, 84  
 Treppennormform, 49, 84  
 triviale Lösung, **55**  
 triviale Untervektorräume, **97**  
 Tupeladdition, **11**  
 Tupelsubtraktion, **12**
- Umkehrabbildung, **156**  
 Umkehrabbildung, linear, **156**  
 Umkehrmatrix, **46**  
 universell eindeutig lösbar, **55**  
 universell eindeutige Lösung, **55**  
 universell lösbar, **55**, 108  
 unlösbares Gleichungssystem, **55**  
 untere Dreiecksmatrix, **23**  
 Unterraum, **94**, 104–106, 120, 228, 238  
 Unterraum, aufgespannter, 104  
 Unterraum, erzeugter, 104  
 Unterraumkriterium, 94
- Untervektorräume, eigentliche, **97**  
 Untervektorräume, triviale, **97**  
 Untervektorraum, **94**  
 Urbildmenge, 141
- Variablen, führende, **70**  
 Variablen, freie, **70**  
 Vektoren, **89**  
 Vektoren, orthogonale, **167**  
 Vektoren, orthonormale, **167**  
 Vektorenaddition, **90**  
 Vektorenprodukt, 183  
 Vektorenprodukt, äußeres, **183**  
 Vektorenprodukt, vektorielles, **183**  
 Vektorgleichung, 110  
 vektorielles Vektorenprodukt, **183**  
 Vektorräume, 33  
 Vektorraum, 16, 48, 90, 137, 141, **164**, 167, 221  
 Vektorraum, Euklidischer, **164**  
 Vektorraum, reeller, **89**  
 Vektorraumaxiome, 6, 89, 90, 94, 95, 136  
 Vektorraumgesetze, 89  
 Vektorraumisomorphismus, 51  
 Vektorraumregeln, 89, 91, 93  
 Vektorsubtraktion, **91**  
 Verfahren, nach Gauß, **62**  
 Verfahren, nach Gauß-Jordan, **66**  
 Verkettung, **154**  
 Verkettung, lineare, **154**  
 Verkettungszeichen, 154  
 Verknüpfung, äußere, 16  
 Verknüpfung, innere, 16  
 verknüpfungstreu, 109  
 verknüpfungstreue Abbildung, 109  
 verträgliche Abbildung, 33  
 vier Fundamentalräume, **106**
- Wavelets, 137  
 Winkel, **168**  
 Winkel, zwischen zwei Vektoren, **168**
- Zeilenmatrix, **20**, 28, 163  
 Zeilenraum, 105, **105**, 106, 131, 132  
 Zeilenstufenform, 49, **59**, 60–67, 74, 84, 131  
 Zeilenstufenform, normierte, **65**  
 Zeilenstufenform, reduzierte, **65**  
 Zeilenstufenmatrix, **59**, 66, 68, 70, 73, 75–77, 82, 83, 124–126, 128–132, 217  
 Zielmenge, 141