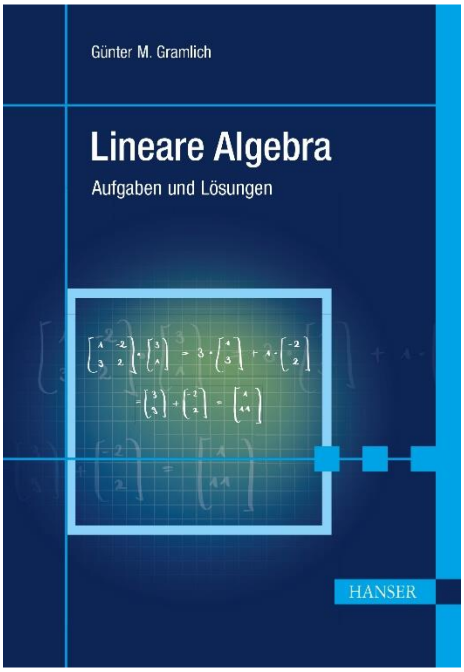

Leseprobe

zu

Lineare Algebra

von Günter M. Gramlich

Print-ISBN: 978-3-446-47302-7
E-Book-ISBN: 978-3-446-47308-9

Weitere Informationen und Bestellungen unter
https://www.hanser-kundencenter.de/fachbuch/artikel/9783446473027
sowie im Buchhandel

Vorwort

Dieses Buch möchte Ihnen helfen, sich anhand von gelösten Aufgaben mit der Linearen Algebra näher vertraut zu machen. Sie finden im Folgenden sowohl Aufgaben als auch deren Lösungen. Diese Aufgaben und Lösungen habe ich meinen Studierenden in den zurückliegenden Semestern und vergangenen Jahren zur Verfügung gestellt.

Die Aufgaben sind Rechenaufgaben, Beweisaufgaben, Verständnisaufgaben, Computeraufgaben und Konstruktionsaufgaben. Ob eine Aufgabe schwierig oder leicht ist, hängt auch von Ihren Vorkenntnissen und bisherigen Umgang mit Mathematik ab. Wesentlich ist, dass Sie sich mit Aufgaben beschäftigen, um zu verstehen, was Lineare Algebra ausmacht, um sie gewinnbringend anwenden zu können.

Lösungen sind dabei als Musterlösungen zu verstehen. Das soll heißen, Sie können die Aufgaben so lösen, wie ich es vorgemacht habe, oder mit anderen Methoden, die vielleicht sogar einfacher oder eleganter sind. In diesem Sinne ist eine angegebene Lösung eine Musterlösung. Lösungen sind also Lösungsvorschläge.

In der Lehre der Mathematik gibt es Unterschiede zwischen verschiedenen Hochschulen, Fachhochschulen, verschiedenen Universitäten und zwischen verschiedenen Studiengängen. Selbst an derselben Hochschule und in demselben Fach setzt der eine Dozent vielleicht einen anderen Schwerpunkt als der andere Dozent. Das ist zulässig und gewollt. Daher empfehle ich Ihnen, (zunächst) solche Aufgaben zu bearbeiten, deren Thema Sie aus der eigenen Vorlesung kennen oder kennen sollten.

Dieses Buch ist nicht als Lehrbuch konzipiert, um neue Inhalte zu lehren, sondern als Begleittext zu Vorlesungen zur Linearen Algebra. Es soll Ihnen Muster zur Verfügung stellen, um Aufgaben zur Lineare Algebra erfolgreich bearbeiten zu können. Deshalb wird vorausgesetzt, dass grundsätzliche Kenntnisse aus der Linearen Algebra vorhanden sind.

Das vorliegende Aufgabenbuch ist wie das von mir verfasste Lehrbuch zur Linearen Algebra [8] strukturiert und dementsprechend gegliedert. Eine Tabelle über die von mir verwendeten mathematischen Symbole finden Sie am Ende des Buches. Um unnötiges Blättern zu vermeiden, habe ich die Lösung jeder Aufgabe direkt im Anschluss an die Aufgabenformulierung aufgeschrieben und somit keine Unterteilung in einen Aufgaben- und Lösungsteil vorgenommen. Trotzdem ist es längerfristig betrachtet sinnvoller, die Aufgaben zuerst selbst zu bearbeiten und erst danach die Lösungen durchzugehen.

Weitere Hinweise, Tipps und Bemerkungen:

- Versuchen Sie sich an Aufgaben zuerst selbst.

- Holen Sie sich erst dann Hinweise, wenn Sie nach intensiver Beschäftigung mit einer Aufgabe nicht weitergekommen sind.
- Formulieren Sie Ihre Lösungen so, dass jemand anderes Ihre Gedankengänge verstehen und nachvollziehen kann.
- Lesen Sie die Aufgabenstellung genau.
- Ist Ihr Ergebnis plausibel?
- Was sind in den Aufgaben die Voraussetzungen? Welche Begriffe kommen vor?
- Seien Sie nicht demotiviert, wenn Sie eine Aufgabe nicht gleich lösen können. Man lernt auch beim Versuchen.
- Bearbeiten Sie möglichst viele Aufgaben. Übung macht den Meister.
- Wie haben wir Beispiele und Aufgaben in der Vorlesung und im Buch gelöst?
- Gibt es andere Lösungswege, eventuelle elegantere oder schnellere?
- Wird eine Voraussetzung nicht benutzt, so ist das Ergebnis selten richtig.
- Geben Sie an, woher (aus welchen Mengen) die Variablen sind. So haben Sie immer Kontrolle über Ihre Elemente.

In den folgenden Büchern finden Sie weitere gelöste Aufgaben zur Linearen Algebra: [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 17, 16, 18, 19, 20]. Lehrbücher zur Linearen Algebra habe ich in [8] angegeben, in diesen finden sich ebenfalls Aufgaben.

Das vorliegende Buch habe ich vollständig in LaTeX mit der Hauptklasse `scrbook` des KOMA-Script-Pakets erstellt, das Literaturverzeichnis mit `biblatex`, und alle Bilder mit PSTricks. Ohne diese schönen Tools wäre dies alles viel schwieriger oder gar unmöglich gewesen.

Danke an das Team vom Carl Hanser Verlag Frau Silakova-Herzberg und Frau Kubiak für Hinweise zur Gestaltung des Buches.

Für jede Anregung, nützlichen Hinweis oder Verbesserungsvorschlag bin ich dankbar. Sie können mich per Post oder über E-Mail `Guenter.Gramlich@thu.de` erreichen.

Ich wünsche Ihnen viel Freude und Erfolg mit diesem Buch und mit der Beschäftigung der Linearen Algebra.

Ulm, im Herbst 2021 Günter M. Gramlich

Inhaltsverzeichnis

1 Reelle geordnete Tupel

1.1 Kreuzen Sie die wahre(n) Aussage(n) an. Es ist $n \in \mathbb{N}$. Dann besteht $\mathbb{R}^n$ aus

- ☐ n reellen Zahlen.
- ☐ n-Tupeln reeller Zahlen.
- ☐ n-Tupeln natürlicher Zahlen.
- ☐ Keine Aussage ist wahr.

Lösung: | | × | | | (spaltenweise)

1.2 Es ist $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Begründen Sie, weshalb $(x_1, \ldots, x_n) \neq \{x_1, \ldots, x_n\}$ ist.

Lösung: Das n-Tupel $(x_1, \ldots, x_n)$ ist etwas anderes als die Menge $\{x_1, \ldots, x_n\}$, da es bei einem n-Tupel zum Beispiel auf die Reihenfolge der Elemente ankommt und bei einer Menge nicht. So ist zum Beispiel $(1, 2, 3) \neq (2, 1, 3)$, aber $\{1, 2, 3\} = \{2, 1, 3\}$.

1.3 Gegeben ist $(4, 2, 3) \in \mathbb{R}^3$. Finden Sie a, b aus $\mathbb{R}$, so dass

$$(4, 2, 3) = (a, 2, b)$$

ist.

Lösung: Zwei (reelle) Zahlenpaare sind genau dann gleich, wenn ihre entsprechenden Koordinaten gleich sind. Also ist $a = 4$ und $b = 3$.

1.4 Berechnen Sie $v + w$, $u + v + w$ und $2u + 2v + w$ für die reellen Tupel $u = (1, 2, 3)$, $v = (-3, 1, -2)$ und $w = (2, -3, -1)$ aus $\mathbb{R}^3$.

Lösung: Es ist $v + w = (-1, -2, -3)$, $u + v + w = (0, 0, 0)$ und $2u + 2v + w = (-2, 3, 1)$.

1.5 Gegeben sind die reellen Tripel $a = (5, 4, -3)$, $b = (1, 1, 0)$ und $c = (1, 0, -3)$ aus $\mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie die reellen Werte für r und s so, dass gilt $a + rb + sc = o_3$.

Lösung: Durch Lösen des überbestimmten linearen Gleichungssystems

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

erhält man die (eindeutige) Lösung $r = -4$, $s = -1$.

1.6 Es ist $v + w = (3, 1)$ und $v - w = (1, 3)$. Bestimmen Sie v und w.

Lösung: Es ist $v = (2, 2)$ und $w = (1, -1)$.

1.7 Finden Sie die Koordinaten von $3v + w$, $v - 3w$ und $rv + sw$ für $v = (2, 1)$ und $w = (1, 2)$. r und s sind reelle Zahlen.

Lösung: Es ergibt sich $3v+w = (7, 5)$, $v-3w = (-1, -5)$ und $rv+\beta w = (2r+s, r+2s)$.

1.8 Es sind v, w aus $\mathbb{R}^4$. Begründen Sie, warum die Gleichung $v+2w+3 = (1, -2, 4, 1)$ sinnlos ist.

Lösung: Ein reelles Tupel aus $\mathbb{R}^4$ und die reelle Zahl 3 kann man nicht addieren.

1.9 Es ist $a = (1, 2)$ und $b = (3, -4, 0)$. Ist es möglich $a + b$ zu berechnen? Falls ja, dann tun Sie es, falls nein, dann begründen Sie warum nicht.

Lösung: Es ist nicht möglich $a + b$ zu berechnen, da die Addition zweier Tupel nur dann definiert ist, wenn die Anzahl der Koordinaten gleich ist.

1.10 Visualisieren Sie das reelle Paar $(3, 2) \in \mathbb{R}^2$ als Punkt und als Pfeil (gerichtete Strecke).

Lösung: Siehe Bild 1.1.

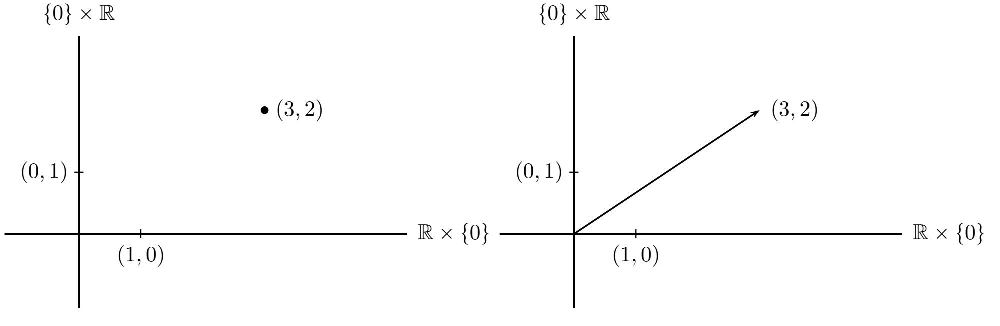

Bild 1.1: Das reelle Paar $(3, 2)$ visualisiert.

1.11 Es ist $n \in \mathbb{N}$. Geben Sie für die Elemente aus $\mathbb{R}^n$ eine geometrische Interpretation.

Lösung: Der Fall $n = 1$. $\mathbb{R}^1$ entspricht geometrisch der Zahlengerade und jedem Element aus $\mathbb{R}^1$, also jeder reellen Zahl, entspricht ein Punkt auf dieser Geraden. Der Fall $n = 2$. Seit R. Descartes[1] ist es üblich, nach Wahl eines Koordinatensystems, die Punkte der Ebene durch Zahlenpaare, also Elemente aus $\mathbb{R}^2$, darzustellen. Umgekehrt gibt die Ebene eine Veranschaulichung der Zahlenpaare und damit der Menge $\mathbb{R}^2$. Jedem Element aus $\mathbb{R}^2$ entspricht ein Punkt der Ebene; die Menge $\mathbb{R}^2$ wird mit der Ebene identifiziert. Der Fall $n = 3$. Ebenso wie Punkte der Ebene mit Zahlenpaare identifiziert werden können, können nach Wahl eines Koordinatensystems die Punkte des Anschauungsraumes mit Zahlentripel aus $\mathbb{R}^3$ identifiziert werden. Der Fall $n = 4$. Zu

[1] R. Descartes (1596-1650) war ein französischer Philosoph, Mathematiker und Naturwissenschaftler.

Beginn des 20. Jahrhunderts schlug A. Einstein[2] in seiner speziellen Relativitätstheorie vor, den $\mathbb{R}^4$ als geometrisches Modell für den uns umgebenden Raum zu verwenden, wobei die Zeit als vierte Koordinate interpretiert wird. Erst wenige Jahre vorher war es in der Mathematik üblich geworden, geometrische Betrachtungen auch in mehr als drei Dimensionen durchzuführen.

Es ist auch üblich, die Elemente von $\mathbb{R}^n$ als Pfeile (gerichtete Strecken) darzustellen.

1.12 Beschreiben Sie $\mathrm{Lin}\big((1,0,1),(1,0,2)\big)$. Welcher geometrischen Figur entspricht diese Menge?

Lösung: Es ist $\mathrm{Lin}\big((1,0,1),(1,0,2)\big) = \mathbb{R} \times \{0\} \times \mathbb{R}$. Geometrisch entspricht dieser Menge die x,z-Ebene im x,y,z-Raum.

1.13 Kreuzen Sie die wahre(n) Aussage(n) an. Der Menge $\mathrm{Lin}\big((1,1),(2,2)\big)$ entspricht geometrisch

- ☐ eine Strecke.
- ☐ eine Gerade.
- ☐ eine Halbgerade.
- ☐ ein Kreis.
- ☐ eine Ellipse.
- ☐ eine Ebene.
- ☐ einem Parallelogramm.
- ☐ Keine Aussage ist wahr.

Lösung:

	×						

(spaltenweise)

1.14 Gegeben sind p und $u \neq o_2 = (0,0)$ in $\mathbb{R}^2$. Welches geometrische Objekt wird durch die Menge

$$S = \{v \in \mathbb{R}^2 \mid v = p + tu, t \in [0,1]\}$$

beschrieben? Geben Sie ein Beispiel.

Lösung: Die Menge S beschreibt eine Strecke in der Ebene. Genauer: Die Strecke zwischen den beiden Punkten p und $p+u$.

Ist zum Beispiel $p = (0,1)$ und $u = (2,0)$, so ist S die Strecke zwischen den Punkten $(0,1)$ und $(2,1)$.

1.15 Gegeben sind p und $u \neq o_2 = (0,0)$ in $\mathbb{R}^2$. Welches geometrische Objekt wird durch die Menge

$$H = \{v \in \mathbb{R}^2 \mid v = p + tu, t \in [0,\infty[\,\}$$

beschrieben? Geben Sie ein Beispiel.

[2] A. Einstein (1879-1955) war ein deutscher Physiker mit Schweizer und US-amerikanischer Staatsbürgerschaft.

Lösung: Die Menge H beschreibt eine Halbgerade in der Ebene. Genauer: Die Halbgerade beginnend im Punkt p und durch den Punkt $p + u$ gehend.

Ist zum Beispiel $p = (0, 0)$ und $u = (1, 0)$, so ist H die positive x-Achse.

1.16 Gegeben sind p und $u \neq o_2 = (0, 0)$ in $\mathbb{R}^2$. Welches geometrische Objekt wird durch die Menge

$$G = \{v \in \mathbb{R}^2 \mid v = p + tu, t \in \mathbb{R}\}$$

beschrieben? Geben Sie ein Beispiel.

Lösung: Die Menge G beschreibt eine Gerade in der Ebene. Genauer: Die Gerade durch die Punkte p und $p + u$.

Ist zum Beispiel $p = (0, 0)$ und $u = (0, 1)$, so ist G die y-Achse.

2 Reelle Matrizen

2.1 Gegeben sind die Matrizen $A = \big((1,2,3)\big) \in (\mathbb{R}^3)^1$ und $B = \big((-1),(2)\big) \in (\mathbb{R}^1)^2$. Schreiben Sie die beiden Matrizen in rechteckiger Form. Um welche speziellen Matrizen handelt es sich?

Lösung: Es ist A die Spaltenmatrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 1}$$

und B die Zeilenmatrix $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times 2}$. Die Matrix A hat eine Spalten und drei Zeilen. Zum Beispiel ist (2) die zweite Zeile von A. Die Ordnung der Matrix A ist $(3,1)$. Die Matrix A hat drei Elemente. Die Matrix B hat eine Zeile und zwei Spalten. Zum Beispiel ist (-1) die erste Spalte von B. Die Ordnung der Matrix B ist $(1,2)$. Die Matrix B hat zwei Elemente.

2.2 Gegeben ist $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{3\times 1}$. Finden Sie x, y aus $\mathbb{R}$, so dass

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 2 \\ y \end{bmatrix}$$

ist.

Lösung: Zwei (reelle) Matrizen sind genau dann gleich, wenn ihre entsprechenden Elemente gleich sind. Also ist $x = 4$ und $y = 3$.

2.3 Eine Matrix $D = [d_{ij}] \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit $m, n \in \mathbb{N}$ ist eine Diagonalmatrix, wenn gilt $d_{ij} = 0$ für $i \neq j$. Kreuzen Sie die wahre(n) Aussage(n) an.

☐ Die Matrix $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ ist eine Diagonalmatrix.

☐ Die Matrix $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ ist eine Diagonalmatrix.

☐ Die Matrix $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ ist eine Diagonalmatrix.

☐ Die Matrix $\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$ ist eine Diagonalmatrix.

☐ Die Matrix $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ ist eine Diagonalmatrix.

☐ Keine angegebene Aussage ist wahr.

Lösung:

×			×	×	

2.4 Kreuzen Sie die wahre(n) Aussage(n) an.

☐ Die Matrix $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ist invertierbar.

☐ Die Matrix $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ist invertierbar.

☐ Die Matrix $\begin{bmatrix} 6 & -18 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}$ ist invertierbar.

☐ Die Matrix $\begin{bmatrix} 1 & 0.9 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ist invertierbar.

☐ Die Matrix $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ist invertierbar.

☐ Die Matrix $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ ist invertierbar.

☐ Die Matrix $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$ ist invertierbar.

☐ Die Matrix $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ ist invertierbar.

Lösung:

		×				×	×

2.5 Welche der Matrizen ist symmetrisch?

☐ $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

Lösung:

	×	

2.6 Zeigen Sie, dass die beiden Matrizen $A^T A$ und AA^T symmetrisch sind, wenn A eine beliebige reelle Matrix ist.

Lösung: Es gilt mit den Rechenregeln für transponierte Matrizen $(A^T A)^T = A^T (A^T)^T = A^T A$ und $(AA^T)^T = (A^T)^T A^T = AA^T$, daher sind die beiden Matrizen symmetrisch.

2.7 Beweisen Sie die Rechenregel $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ für den Fall $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

Lösung: Ist

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \text{so ist} \quad A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Somit ist einerseits

$$(A^{-1})^T = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}.$$

Andererseits ist zunächst

$$A^T = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \quad \text{und damit} \quad (A^T)^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}.$$

Damit gilt die Gleichheit.

2.8 Ist $A \in \mathbb{R}^{m\times r}$ und $B \in \mathbb{R}^{r\times n}$, so gilt $(AB)^T = B^T A^T$. Beweisen Sie dies.

Lösung: Erste Methode. Es ist $AB = [c_{ij}]$. Dann gilt $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + \cdots + a_{ir}b_{rj}$. Diese Zahl ist das Element der j-ten Zeile und i-ten Spalte der Matrix $(AB)^T = [c_{ij}]^T$. Die Elemente $b_{1j}, \ldots, b_{rj}$ der j-ten Spalte von B sind die Elemente der j-ten Zeile von B^T. Die Elemente $a_{i1}, \ldots, a_{ir}$ der i-ten Zeile von A sind die Elemente der i-ten Spalte von A^T. Das Element der j-ten Zeile und i-ten Spalte von $B^T A^T$ ist $b_{1j}a_{i1} + \cdots + b_{rj}a_{ir}$; das ist $a_{i1}b_{1j} + \cdots + a_{ir}b_{rj}$. Somit ist $(AB)^T = B^T A^T$.

Zweite Methode. Es ist einerseits

$$A = \begin{bmatrix} — & z_1^T & — \\ & \vdots & \\ — & z_m^T & — \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times r}, \qquad B = \begin{bmatrix} | & & | \\ b_1 & \cdots & b_n \\ | & & | \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{r\times n}$$

und damit

$$AB = \begin{bmatrix} z_1^T b_1 & \cdots & z_1^T b_n \\ \vdots & & \vdots \\ z_m^T b_1 & \cdots & z_m^T b_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n} \quad \text{und} \quad (AB)^T = \begin{bmatrix} z_1^T b_1 & \cdots & z_m^T b_1 \\ \vdots & & \vdots \\ z_1^T b_n & \cdots & z_m^T b_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times m}.$$

Es ist andererseits

$$A^T = \begin{bmatrix} | & & | \\ z_1 & \cdots & z_m \\ | & & | \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{r\times m}, \qquad B^T = \begin{bmatrix} — & b_1^T & — \\ & \vdots & \\ — & b_n^T & — \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times r}$$

und damit

$$B^T A^T = \begin{bmatrix} b_1^T z_1 & \cdots & b_1^T z_m \\ \vdots & & \vdots \\ b_n^T z_1 & \cdots & b_n^T z_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n}.$$

Nun ist aber $z_i^T b_j = b_j^T z_i$ für alle $i = 1 : m$ und alle $j = 1 : n$. Damit ist alles bewiesen.

2.9 Es ist eins $\in \mathbb{R}^{n\times 1}$ die Spaltenmatrix, die aus lauter Einsen besteht. Es ist $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Berechnen Sie $A \cdot \text{eins}$.

Lösung: Es ist

$$A \cdot \text{eins} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \vdots & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{1n} \\ \vdots \\ a_{m1} + a_{m2} + \cdots + a_{mn} \end{bmatrix}.$$

In der Spaltenmatrix $A \cdot \text{eins} \in \mathbb{R}^{m\times 1}$ stehen die Zeilensummen von A.

2.10 Es ist $e_j \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ die Spaltenmatrix, die in der j-ten Zeile eine Eins sonst lauter Nullen hat. Es ist $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Berechnen Sie $A \cdot e_j$.

Lösung: Es ist für $j = 1, \ldots, n$

$$A \cdot e_j = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \vdots & \\ a_{j-1,1} & \cdots & a_{j-1,n} \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ a_{j+1,1} & \cdots & a_{j+1,n} \\ & \vdots & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{j-1,j} \\ a_{jj} \\ a_{j+1,j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}.$$

Die Spaltenmatrix $A \cdot e_j$ enthält die j-ten Spaltenelemente der Matrix A.

2.11 Die folgenden Matrizen haben jeweils eine Inverse. Berechnen Sie diese.

(a) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 0 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

Lösung: Es ist

(a) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{(0)(0)-(1)(1)} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$

(b) $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{(3)(2)-(1)(7)} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -7 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 7 & -3 \end{bmatrix}.$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{(1)(1)-(0)(3)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}.$

Eine Bestätigung in MATLAB[1]:

```
>> inv([0 1;1 0])
ans =
0     1
1     0
>> inv([3 1;7 2])
ans =
-2.0000   1.0000
7.0000  -3.0000
>> inv([1 0;3 1])
ans =
1     0
-3     1
```

2.12 Geben Sie eine Matrix aus $\mathbb{R}^{4\times 4}$ an, die obere und untere Dreiecksmatrix zugleich ist.

Lösung: Zum Beispiel

$$E_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2.13 Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

(a) Eine Nullmatrix ist eine Diagonalmatrix.
(b) Eine Einheitsmatrix ist symmetrisch.
(c) Eine quadratische Matrix ist immer symmetrisch.
(d) Eine symmetrische Matrix ist immer quadratisch.

Lösung: (a),(b) und (d) sind richtig.

2.14 Welche Bedingungen müssen zwei Matrizen erfüllen, damit sie entweder addiert oder multipliziert werden können?

Lösung: Beide Matrizen müssen die gleiche Anzahl von Zeilen und die gleiche Anzahl von Spalten haben, damit sie addiert werden können.

Die Anzahl der Spalten der ersten Matrix muss gleich der Anzahl der Zeilen der zweiten Matrix sein, damit die multipliziert werden können.

[1] MATLAB ® ist eingetragenes Warenzeichen von The MathWork Inc.

2.15 Berechnen Sie A^2, A^3 und A^n $(n \in \mathbb{N})$ für die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

Lösung: Es ist

$$A^2 = \begin{bmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{bmatrix}, \quad A^3 = \begin{bmatrix} a^3 & 0 \\ 0 & b^3 \end{bmatrix}, \quad A^n = \begin{bmatrix} a^n & 0 \\ 0 & b^n \end{bmatrix}.$$

2.16 Zeigen Sie, dass E_2 das neutrale Element der Matrizenmultiplikation in $\mathbb{R}^{2\times 2}$ ist.

Lösung: Es ist

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

für alle a, b, c und d aus $\mathbb{R}$. Somit ist E_2 das neutrale Elemente bezüglich der Matrizenmultiplikation.

2.17 Berechnen Sie die Inverse der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Lösung: Es ist

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = A.$$

2.18 Bestimmen Sie die Inverse der Matrix

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

für $a \neq b$ und $a \neq -b$.

Lösung: Die Inverse dieser (symmetrischen) Matrix ist

$$\frac{1}{a^2 - b^2}\begin{bmatrix} a & -b \\ -b & a \end{bmatrix}.$$

Falls $a = b$ oder $a = -b$ ist, ist die Matrix nicht invertierbar.

2.19 Welche der folgenden Regeln sind für alle reellen quadratischen und invertierbaren Matrizen gültig, welche nicht?

Mathematische Symbole

Die folgende Tabelle enthält mathematische Symbole und eine kurze Beschreibung ihrer Bedeutungen. Diese Symbole verwende ich in diesem Buch und habe sie in [8] eingeführt.

Mathematisches Symbol	*Bedeutung*
$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$	Menge der natürlichen Zahlen
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen
$\mathbb{R}^n$	Menge der reellen n-Tupel
$\mathbb{R}^{m \times n}$	Menge der reellen (m, n)-Matrizen
$\mathbb{R}^{m \times 1}$	Menge der reellen Spaltenmatrizen mit m Einträgen
$\mathbb{R}^{1 \times n}$	Menge der reellen Zeilenmatrizen mit n Einträgen
E_n	Einheitsmatrix, Einheitsmatrix aus $\mathbb{R}^{n \times n}$
O_{mn}, O_n	Nullmatrix aus $\mathbb{R}^{m \times n}$, Nullmatrix aus $\mathbb{R}^{n \times n}$
A^T	Transponierte Matrix von A
$\mathrm{Det}(A)$	Determinante von A
A^{-1}	Inverse der regulären Matrix A
$S(A)$	Spaltenraum von A
$N(A)$	Nullraum von A
$Z(A)$	Zeilenraum von A
$\mathrm{Rang}(A)$	Rang von A
$(\mathbb{R}^n, +, \cdot, \mathbb{R})$	Der natürliche Vektorraum der reellen n-Tupel
$(\mathbb{R}^{m \times n}, +, \cdot, \mathbb{R})$	Der natürliche Vektorraum der reellen Matrizen
$\mathrm{Abb}(X, Y)$	Menge der Abbildungen von X nach Y
$\mathrm{Abb}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$	Menge der reellen Abbildungen von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^m$
$(\mathrm{Abb}(M, \mathbb{R}^n), +, \cdot, \mathbb{R})$	Der natürliche Vektorraum der Abbildungen von M nach $\mathbb{R}^n$
$v \cdot w$	Skalarprodukt von v und w
$v \times w$	Vektorprodukt von v und w
$p = u(v \cdot u)/\lvert u\rvert^2$	Orthogonaler Projektionsvektor von v auf $\mathrm{Lin}(u)$
e_j	$(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$, an der j-ten Stelle steht die 1
$e_1, \ldots, e_n$	natürliche Basisvektoren im $\mathbb{R}^n$
$v \perp w$	Orthogonale Vektoren v und w
o_V	Nullvektor aus dem Vektorraum V
$o_n = o_{\mathbb{R}^n}$	Nullvektor aus $\mathbb{R}^n$
$\lvert v\rvert$	Die natürliche (EUKLIDische) Länge des Vektors $v \in \mathbb{R}^n$
$\mathrm{Lin}(v_1, v_2, \ldots, v_r)$	Lineare Hülle von $v_1, v_2, \ldots, v_r$
eins_n	Tupel aus $\mathbb{R}^n$ mit nur Einsen
$\mathrm{Eins}_{m,n}$	Matrix aus $\mathbb{R}^{m \times n}$ mit nur Einsen

$U, V, W, \ldots$	Vektorräume, Unterräume
$\mathrm{Dim}(V) = \mathrm{Dim}\, V$	Dimension des Vektorraumes V
$T \subseteq V$	Teilmenge des Vektorraumes V
$U_1 + U_2$	Summe zweier Untervektorräume
$((\mathbb{R}^n, +, \cdot, \mathbb{R}), \cdot)$	Der natürliche EUKLIDische Vektorraum der reellen n-Tupel
$U_1 \oplus U_2$	Direkte Summe zweier Untervektorräume
$T^\perp$	Orthogonales Komplement von T
$U_1 \ominus U_2$	Orthogonale direkte Summe zweier Unterräume
$T_1 \perp T_2$	Teilmenge T_1 orthogonal zu Teilmenge T_2
$F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$	Abbildung von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^m$
F^{-1}	Umkehrabbildung von F
$F_1 + F_2$	Summe der Abbildungen F_1, F_2
rF	Produkt der reellen Zahl r mit der Abbildungen F
$F_1 \circ F_2$	Verkettung der Abbildungen F_1, F_2
$\mathrm{Id} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$	(Lineare) identische Abbildung von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^n$
$O : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, O_{nm}	(Lineare) Nullabbildung von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^m$
$\mathrm{Kern}(L) = \mathrm{Kern}\, L$	Kern der linearen Abbildung L
$\mathrm{Bild}(L) = \mathrm{Bild}\, L$	Bild der linearen Abbildung L
A_L	Natürliche Darstellungsmatrix von L
$L^T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$	Transponierte Abbildung von $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$
$\mathbb{R}_{\leqslant n}[x]$	Polynomfunktionen vom Grad kleiner gleich n
$\mathrm{Eig}(\lambda, A) = \mathrm{Eig}_A(\lambda)$	Eigenraum der Matrix A zum Eigenwert λ
$\mathrm{Spur}(A)$	Spur der quadratischen Matrix A
A^+	Pseudoinverse von A