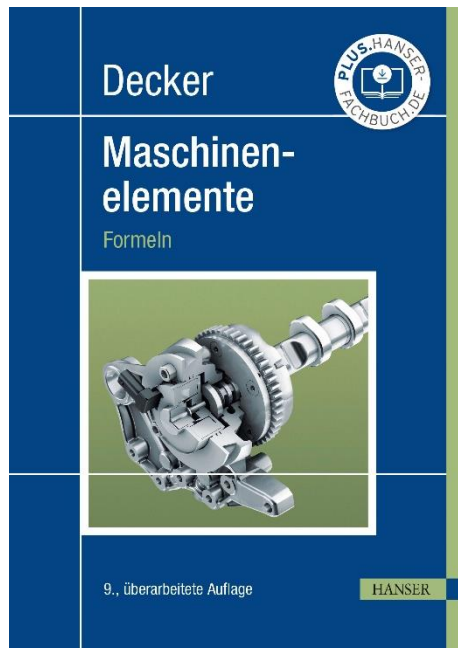


# HANSER



## Leseprobe

zu

## Decker Maschinenelemente: Formeln

Bearbeitet von Frank Rieg, Frank Weidermann, Gerhard Engelken, Reinhard Hackenschmidt, Bettina Alber-Laukant und Stephan Tremmel

Print-ISBN: 978-3-446-47331-7

E-Book-ISBN: 978-3-446-47450-5

Weitere Informationen und Bestellungen unter

<https://www.hanser-kundencenter.de/fachbuch/artikel/9783446473317>

sowie im Buchhandel

© Carl Hanser Verlag, München

# Inhalt

<b>Vorwort</b> .....	<b>XI</b>
<b>1 Konstruktionstechnik</b> .....	<b>1</b>
Maße, Abmaße und Toleranzen .....	1
ISO-Toleranzsystem .....	1
Passungen .....	1
Rauheit der Oberflächen .....	2
<b>3 Festigkeitsberechnungen</b> .....	<b>3</b>
Kräfte .....	3
Momente .....	3
Allgemeine Festigkeitsberechnung .....	3
Beanspruchungen .....	4
Knickung .....	6
Hertz'sche Pressung .....	8
Beanspruchbarkeit .....	9
Kerbwirkung .....	11
Betriebsfestigkeit nach der FKM-Richtlinie .....	13
<b>4 Schmelzschweißverbindungen</b> .....	<b>31</b>
Berechnung der Spannungen in Schweißnähten .....	31
Schweißverbindungen im Maschinen- und Gerätebau .....	35
<b>5 Pressschweißverbindungen</b> .....	<b>36</b>
Punktschweißverbindungen .....	36
Buckelschweißverbindungen .....	37
<b>6 Lötverbindungen</b> .....	<b>38</b>
Berechnung von Lötverbindungen .....	38
<b>7 Klebverbindungen</b> .....	<b>39</b>
Berechnung von Klebverbindungen .....	39
<b>8 Nietverbindungen</b> .....	<b>41</b>
Berechnung von Nietverbindungen .....	41
<b>9 Reibschlüssige Welle-Nabe-Verbindungen</b> .....	<b>44</b>
Grundlagen der Berechnung zylindrischer Pressverbände .....	44
Berechnung bei rein elastischer Beanspruchung .....	45
Berechnung bei elastisch-plastischer Beanspruchung .....	50
Einpresskraft und Füge Temperaturen .....	51

	Spannelementverbindungen .....	52
	Klemmverbindungen .....	53
<b>10</b>	<b>Befestigungsschrauben .....</b>	<b>55</b>
	Gewinde .....	55
	Berechnung: Vordimensionierung und Überschlag .....	55
	Schraubenanziehmoment, Anziehungsfaktor .....	56
	Berechnung: Nachgiebigkeit von Schraube und Bauteilen .....	57
	Berechnung: Bleibende Verformung durch Setzen .....	59
	Berechnung: Betriebskräfte Zug, Druck und Schwingungen auf vorgespannte Schraubenverbindungen .....	59
	Haltbarkeit der Schraubenverbindungen .....	60
	Standardisierte Vorgehensweise .....	61
	Berechnung querbeanspruchter Schraubenverbindungen .....	63
<b>11</b>	<b>Bewegungsschrauben .....</b>	<b>64</b>
	Gewinde, Wirkungsgrad .....	64
	Berechnung der Haltbarkeit und der Stabilität .....	65
<b>12</b>	<b>Formschlüssige Welle-Nabe-Verbindungen .....</b>	<b>67</b>
	Längskeilverbindungen .....	67
	Passfederverbindungen .....	67
	Keilwellenverbindungen .....	67
	Zahnwellenverbindungen .....	68
	Polygonwellenverbindungen .....	68
	Kegelverbindungen .....	68
	Stirnzahnverbindungen .....	69
<b>13</b>	<b>Stift- und Bolzenverbindungen .....</b>	<b>70</b>
	Gelenkstifte oder Bolzen .....	70
	Steckstifte unter Biegekraft .....	71
	Querstifte unter Drehmoment .....	71
	Längsstifte unter Drehmoment .....	72
<b>14</b>	<b>Federn .....</b>	<b>73</b>
	Federsteifigkeit, Federarbeit, Schwingverhalten .....	73
	Zusammenwirken mehrerer Federn .....	74
	Zylindrische Schraubenfedern aus runden Drähten oder Stäben .....	75
	Tellerfedern als Druckfedern .....	81
	Spannungen in den Punkten OM, I bis IV .....	82
	Gewundene Schenkelfedern als Drehfedern .....	84
	Stabfedern als Drehfedern .....	87
	Spiralfedern als Drehfedern .....	88
	Blattfedern als Biegefedern .....	89

	Ringfedern als Druckfedern .....	91
	Luftfedern .....	91
	Gummifedern .....	93
<b>15</b>	<b>Achsen und Wellen .....</b>	<b>94</b>
	Biegemomente, Längskräfte und Torsionsmomente .....	94
	Überschlagrechnung auf Torsion und Biegung .....	94
	Achsen und Wellen gleicher Biegebeanspruchung .....	95
	Berechnung auf Gestaltfestigkeit (Dauerhaltbarkeit) .....	95
	Durchbiegung .....	99
	Verdrehwinkel .....	103
	Kritische Drehzahl .....	103
	Tragfähigkeitsberechnung von Wellen und Achsen nach DIN 743 .....	104
<b>16</b>	<b>Tribologie: Reibung, Schmierung und Verschleiß .....</b>	<b>109</b>
	Schmieröle .....	109
<b>17</b>	<b>Gleitlager .....</b>	<b>111</b>
	Berechnung der Radiallager .....	111
	Berechnung der Axiallager .....	119
<b>18</b>	<b>Wälzlager .....</b>	<b>122</b>
	Tragfähigkeit und Lebensdauer .....	122
	Berechnung von Kegelrollen- und Schrägkugellagern .....	123
	Besondere Belastungsfälle .....	124
	Grenzdrehzahl .....	125
	Schmierung der Wälzlager .....	125
<b>19</b>	<b>Lager- und Wellendichtungen .....</b>	<b>126</b>
<b>20</b>	<b>Wellenkupplungen und -bremsen .....</b>	<b>127</b>
	Kupplungsmomente bei Ausgleichkupplungen .....	127
	Reibungskupplungen .....	132
<b>21</b>	<b>Grundlagen für Zahnräder und Getriebe .....</b>	<b>137</b>
	Übersetzung .....	137
	Evolventenverzahnung .....	137
	Planetengetriebe .....	139
<b>22</b>	<b>Abmessungen und Geometrie der Stirn- und Kegelräder .....</b>	<b>147</b>
	Null-Außenverzahnung .....	147
	Null-Innenverzahnung .....	148
	Null-Schrägverzahnung .....	148
	Profilverschiebung .....	150
	Geometrische Grenzen .....	152

	Profilüberdeckung .....	153
	Geradverzahnte Kegelräder .....	153
	Schräg- und bogenverzahnte Kegelräder .....	155
<b>23</b>	<b>Gestaltung und Tragfähigkeit der Stirn- und Kegelräder .....</b>	<b>158</b>
	Zahnkräfte an Stirnrädern .....	158
	Zahnkräfte an Kegelrädern .....	159
	Wirkungsgrad und Gesamtübersetzung .....	160
	Gestaltung der Räder aus Stahl und aus Gusseisen .....	162
	Gestaltung der Räder aus Kunststoffen .....	164
	Schmierung, Schmierstoffe .....	164
	Allgemeine Einflussfaktoren für die Tragfähigkeit .....	166
	Zahnfußtragfähigkeit der Stirnräder .....	168
	Grübchentragfähigkeit der Stirnräder .....	169
	Zahnfußtragfähigkeit der Kegelräder .....	170
	Grübchentragfähigkeit der Kegelräder .....	171
	Berechnung der Räder aus thermoplastischen Kunststoffen auf Tragfähigkeit und Verformung .....	173
<b>24</b>	<b>Zahnradpaare mit sich kreuzenden Achsen .....</b>	<b>175</b>
	Eingriffsverhältnisse von Schraub-Stirnradpaaren .....	175
	Wirkungsgrad und Zahnkräfte an Schraub-Stirnradpaaren .....	175
	Tragfähigkeit von Schraub-Stirnradpaaren, Schmierung .....	176
	Geometrie der Schneckenradsätze .....	177
	Wirkungsgrad und Zahnkräfte an Schneckenradsätzen .....	179
	Gestaltung der Schnecken und Schneckenräder .....	180
	Schmierung von Schneckenradsätzen .....	180
	Tragfähigkeit von Schneckenradsätzen .....	181
<b>25</b>	<b>Kettentriebe .....</b>	<b>182</b>
	Kettenräder .....	182
	Schmierung der Kettentriebe .....	184
<b>26</b>	<b>Flachriementriebe .....</b>	<b>185</b>
	Theoretische Grundlagen für Riementriebe .....	185
	Riemenscheiben .....	185
	Geometrie der Flachriementriebe .....	186
	Übersetzung, Riemengeschwindigkeit, Biegefrequenz .....	188
	Berechnung der Antriebe mit Leder- und Geweberiemen .....	188
	Berechnung von Antrieben mit Mehrschichtriemen .....	189
	Spannrollentrieb .....	190

<b>27</b>	<b>Keilriementriebe</b> .....	<b>192</b>
	Berechnung der Antriebe mit Keilriemen und Keilrippenriemen .....	192
<b>28</b>	<b>Synchron- oder Zahnriementriebe</b> .....	<b>194</b>
	Übersetzung und Geometrie der Synchronriementriebe .....	194
	Berechnung von Antrieben mit Synchron- oder Zahnriemen .....	196
<b>29</b>	<b>Rohrleitungen</b> .....	<b>198</b>
	Temperaturbedingte Längenänderung .....	198
	Berechnung von Rohrleitungen .....	198



Der Verlag und die Autoren haben sich mit der Problematik einer gendergerechten Sprache intensiv beschäftigt. Um eine optimale Lesbarkeit und Verständlichkeit sicherzustellen, wird in diesem Werk auf Gendersternchen und sonstige Varianten verzichtet; diese Entscheidung basiert auf der Empfehlung des Rates für deutsche Rechtschreibung. Grundsätzlich respektieren der Verlag und die Autoren alle Menschen unabhängig von ihrem Geschlecht, ihrer Sexualität, ihrer Hautfarbe, ihrer Herkunft und ihrer nationalen Zugehörigkeit.

# Vorwort

**Decker Maschinenelemente – Formeln** ist eine Ergänzung zum ebenfalls im Carl Hanser Verlag erschienenen Lehrbuchklassiker **Decker Maschinenelemente**. Die vorliegende 9. Auflage ist umfassend auf die 21. Auflage des Lehrbuchs (ISBN 978-3-446-47230-3) abgestimmt. Sie enthält alle wichtigen Gleichungen zur Berechnung von Maschinenelementen in übersichtlicher Anordnung. Bei der Vielzahl an Formeln für die Bemessung und den Festigkeitsnachweis von Maschinenelementen ist es zweckmäßig, eine Zusammenfassung in kompakter Form zur Verfügung zu haben, was von vielen Benutzern des Lehrbuches gewünscht wurde.

Die Formelsammlung kann auch unabhängig vom Lehrbuch genutzt werden, die Systematik, die Formelnummerierungen und die Bezeichnungen der zu berechnenden Größen stimmen jedoch vollständig mit dem Lehrbuch überein. Ihre Bedeutung ist erläutert und die vorzugsweise anzuwendenden Einheiten sind angegeben. Zum besseren Verständnis der Zusammenhänge wurden Abbildungen eingefügt. Die Angabe von Normen und anderen wichtigen Hinweisen, die beim Berechnen von Maschinenelementen zu beachten sind, ergänzen das Angebot der Berechnungsunterlagen.

An den entsprechenden Stellen wird auf Tabellen und Diagramme verwiesen, die für die Bestimmung der erforderlichen Werte von Festigkeiten, Sicherheiten, zulässigen Spannungen, Berechnungsfaktoren, Reibzahlen, Normteil- und Profilabmessungen, Toleranzen und dergleichen hinzugezogen werden können. All diese für die Berechnungen benötigten Werte sind in **Decker Maschinenelemente – Tabellen und Diagramme** zu finden. Der Tabellenband liegt dem Lehrbuch bei.

Mit dieser Formelsammlung liegt eine Arbeitshilfe vor, die eine rationelle Lösung von Aufgabenstellungen zur Berechnung von Maschinenelementen während des Studiums und in der Praxis ermöglicht. Sie ist insbesondere für den Einsatz in Klausuren und Prüfungsarbeiten geeignet. Auch für das Durchrechnen von Übungsaufgaben bietet sie Vorteile, da ein aufwendiges Blättern im Lehrbuch entfällt. In diesem Zusammenhang soll auf **Decker Maschinenelemente – Aufgaben** (17. Auflage, ISBN 978-3-446-47332-4) verwiesen werden. Diese Aufgabensammlung mit Übungsaufgaben zur Berechnung von Maschinenelementen ist ebenfalls vollständig auf das Lehrbuch abgestimmt.

Unter [plus.hanser-fachbuch.de](http://plus.hanser-fachbuch.de) stehen über 100 Excel-Berechnungsprogramme und zahlreiche Videos als ergänzende Arbeitsmaterialien bereit. Hinzu kommt das Programmpaket BayMP (Bayreuther Maschinenelemente-Programme). Die kostenlos unter [www.baymp.de](http://www.baymp.de) erhältlichen Programme ermöglichen die Auslegung wichtiger Maschinenelemente (Wellen, Lager, Federn, Getriebe, Kupplungen usw.) – sei es online, computergestützt unter Windows, Linux bzw. macOS oder auf verschiedenen wissenschaftlichen Taschenrechnern.

Die Nutzung der Berechnungssoftware **MDESIGN Student**, die kostenfrei unter <https://mde.sign.de/decker> bezogen werden kann, ermöglicht es Studierenden und Auszubildenden, als zukünftige Mitarbeiter in Konstruktion und Entwicklung professionelle Werkzeuge für die Auslegung und Berechnung von Maschinenelementen kennenzulernen und zu nutzen.

Der Verlag und die Verfasser hoffen, dass auch diese Auflage der Formelsammlung allen Benutzerinnen und Benutzern eine wertvolle Hilfe sein wird. An dieser Stelle sei allen Kolleginnen und Kollegen herzlich für ihre Ratschläge gedankt.

*Frank Rieg*

*Frank Weidermann*

*Gerhard Engelken*

*Reinhard Hackenschmidt*

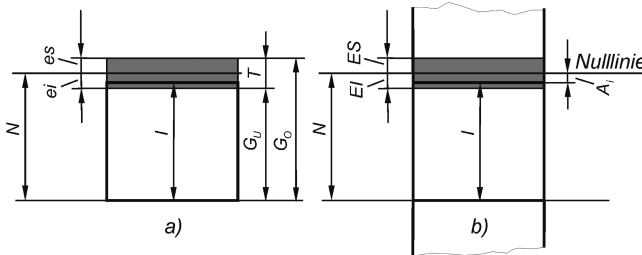
*Bettina Alber-Laukant*

*Stephan Tremmel*



# 1 Konstruktionstechnik

## Maße, Abmaße und Toleranzen



**Bild 1.1**  
Maße und Abmaße  
a) an einer Welle,  
b) an einer Bohrung

Oberes Abmaß  $ES$  (bzw.  $es$ ) =  $G_o - N$

Unteres Abmaß  $EI$  (bzw.  $ei$ ) =  $G_u - N$

Istmaß  $A_i = I - N$

Maßtoleranz  $T = G_o - G_u$  oder  $T = ES - EI$  (bzw.  $es - ei$ )

$N$  Nennmaß,  $I$  Istmaß,  $G_o$  Höchstmaß,  $G_u$  Mindestmaß

Allgemeintoleranzen nach DIN ISO 2768-1 (siehe Tabelle 1.7)

## ISO-Toleranzsystem

Für die Grundtoleranzgrade IT 5 bis IT 18 und Nennmaße bis 500 mm:

$$\text{Toleranzfaktor } i = 0,45\sqrt[3]{D} + 0,001D \text{ in } \mu\text{m} \quad (1.1)$$

Für Nennmaße über 500 mm bis 3150 mm:

$$\text{Toleranzfaktor } I = 0,004D + 2,1 \text{ in } \mu\text{m} \quad (1.2)$$

$D = \sqrt{D_1 \cdot D_2}$  geometrisches Mittel aus den Zahlenwerten der Grenzwerte  $D_1$  und  $D_2$  des Nennmaßbereichs.

Eine ISO-Grundtoleranz  $T$  ist ein Vielfaches des Toleranzfaktors  $i$  bzw.  $I$  (siehe Tabelle 1.2). Die errechneten Werte sind nach vorgegebenen Regeln zu runden, und zwar die nach Formel 1.1 bis 100  $\mu\text{m}$  auf 1  $\mu\text{m}$ , bis 200  $\mu\text{m}$  auf 5  $\mu\text{m}$  und bis 500  $\mu\text{m}$  auf 10  $\mu\text{m}$  genau. Verbindliche Werte der Grundtoleranzen bis 3150 mm sind in DIN EN ISO 286-1 angegeben (Auszug siehe Tabelle 1.2). Für Nennmaße über 3150 mm gilt weiterhin DIN 7172.

## Passungen

Spielpassung:

$$\text{Höchstspiel } S_g = ES - ei = G_{oB} - G_{uW} \quad (1.3)$$

$$\text{Mindestspiel } S_k = EI - es = G_{uB} - G_{oW} \quad (1.4)$$

Übermaßpassung:

$$\text{Höchstübermaß } U_g = es - EI = G_{oW} - G_{oB} \quad (1.5)$$

$$\text{Mindestübermaß } U_k = ei - ES = G_{uW} - G_{oB} \quad (1.6)$$

Übergangspassung:

Höchstspiel  $S_g$  nach Formel 1.3 und Höchstübermaß  $U_g$  nach Formel 1.5

$ES, EI, es, ei$  oberes und unteres Abmaß der Bohrung bzw. der Welle,  
 $G_{oB}, G_{uB}, G_{oW}, G_{uW}$  Höchstmaß und Mindestmaß der Bohrung bzw. der Welle.

Toleranz der Passung:

$$\text{Passtoleranz } T_p = S_g - S_k \quad \text{bei Spielpassung} \quad (1.7)$$

$$T_p = S_g + U_g \quad \text{bei Übergangspassung} \quad (1.8)$$

$$T_p = U_g - U_k \quad \text{bei Übermaßpassung} \quad (1.9)$$

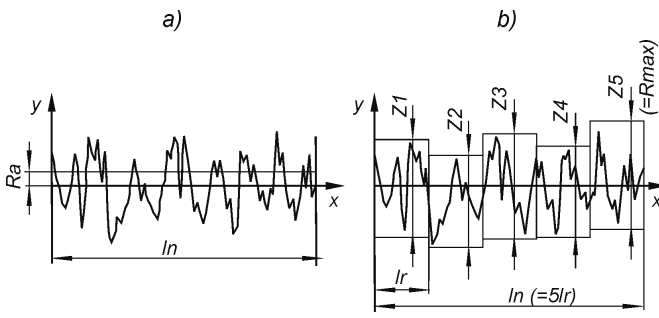
$$T_p = T_B + T_W \quad \text{allgemein} \quad (1.10)$$

Zur Auswahl von Passungen siehe Tabelle 1.9.

## Rauheit der Oberflächen

Rauheitsmessgrößen:

- **Arithmetischer Mittenrauwert  $R_a$**  (kurz Mittenrauwert) = arithmetisches Mittel der absoluten Beträge der Profilabweichungen  $y$  von der Mittellinie innerhalb der Gesamtmessstrecke  $l_n$  (Bild 1.2a).
- **Gemittelte Rautiefe  $R_z$**  =  $(Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4 + Z_5)/5$  als arithmetisches Mittel aus den Einzelrautiefen  $Z_i$  fünf aneinander grenzender Einzelmessstrecken  $l_e$  (Bild 1.2b).
- **Maximale Rautiefe  $R_{max}$**  = größte der auf der Gesamtmessstrecke  $l_n$  vorkommenden Einzelrautiefen  $Z_i$ , z. B.  $R_{max} = Z_5$  in Bild 1.2b.



**Bild 1.2**  
 Rauheitskenngrößen  
 a) arithmetischer Mittelrauwert  $R_a$ , b) Einzelrautiefen als Grundlage für die Bestimmung der gemittelten Rautiefe  $R_z$  und von  $R_{max}$

Näherungsweise gilt  $R_a \approx 0,1 R_z$  und  $R_z \approx R_{max}$ .

## 3 Festigkeitsberechnungen

### Kräfte

$$\text{Allg. Kraft} \quad F = m \cdot a \quad (3.1)$$

$F$  in N Kraft,  
 $m$  in kg Masse,  
 $a$  in  $\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$  Beschleunigung.

Mehrere Einzelkräfte können im Spezialfall unter Anwendung des Satzes des Pythagoras zu einer Resultierenden zusammengefasst werden:

$$F_R^2 = F_1^2 + F_2^2 \rightarrow F_R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} \quad (3.2)$$

$F$  in N Kraft.

### Momente

$$\text{Allg. Moment} \quad M = F \cdot l \quad (3.3)$$

$M$  in Nm Moment,  
 $F$  in N Kraft,  
 $l$  in m Hebelarm.

In der Statik können damit sechs Gleichgewichtsbedingungen für den Raum aufgestellt werden.

$$\sum F_X = 0 \quad \sum F_Y = 0 \quad \sum F_Z = 0 \quad (3.4)$$

$$\sum M_X = 0 \quad \sum M_Y = 0 \quad \sum M_Z = 0 \quad (3.5)$$

$F_x$  in N Kraft in x-Richtung,  
 $F_y$  in N Kraft in y-Richtung,  
 $F_z$  in N Kraft in z-Richtung,  
 $M_x$  in Nm Moment um x-Achse,  
 $M_y$  in Nm Moment um y-Achse,  
 $M_z$  in Nm Moment um z-Achse.

## Allgemeine Festigkeitsberechnung

Die Spannung  $\sigma$  ist ein Maß für die Beanspruchung:

$$\text{Spannung} \quad \sigma = \frac{F}{A} \quad (3.6)$$

$\sigma$  in  $\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$  Spannung,  
 $F$  in N Kraft,  
 $A$  in  $\text{mm}^2$  beanspruchte Querschnittslänge.

Die Verformung (z. B. Verlängerung eines Stabes infolge einer Zugkraft) bezogen auf den Ausgangszustand (Ausgangslänge des Stabes) liefert ein dimensionsloses Maß für die auftretende Verformung, die sogenannte Dehnung  $\varepsilon$ :

$$\text{Dehnung } \varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{l_1 - l_0}{l_0} \quad (3.7)$$

$\varepsilon$	Dehnung,
$\Delta l$ in m	Verlängerung/Verkürzung,
$l_0$ in m	Ausgangslänge,
$l_1$ in m	Länge im belasteten Zustand.

Der Zusammenhang zwischen der Beanspruchung, also der inneren Spannung  $\sigma$ , und der Dehnung  $\varepsilon$  wird durch ein Stoffgesetz beschrieben. Im Falle eines isotropen, linear-elastischen Materials gilt beispielsweise:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad (3.8)$$

$\sigma$ in $\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$	Spannung,
$E$ in $\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$	E-Modul,
$\varepsilon$	Dehnung.

## Beanspruchungen

### Grundbeanspruchungsarten

Zugbeanspruchung:  $\sigma_z = \frac{F_z}{A}$

Druckbeanspruchung:  $\sigma_D = \frac{F_D}{A}$

$$\text{Flächenpressung } p = \frac{F}{A} \text{ bzw.} \quad (3.9)$$

$$p = \frac{F}{A_{\text{proj}}} \text{ (beispielsweise Zapfen in einer Lagerschale)} \quad (3.10)$$

$$\text{Biegebeanspruchung } \sigma_b(z) = \frac{M_b}{I_y} \cdot z \quad (3.11)$$

$$\text{Maximale Biegespannung } \sigma_{b,\max} = \frac{M_b}{W_{b,y}} \quad (3.12)$$

$$\text{Schubbeanspruchung } \tau_m = \frac{Q}{A} \quad (3.13)$$

$$\text{Torsionsbeanspruchung } \tau_t(z) = \frac{M_t}{I_t} \cdot z \quad (3.14)$$

$$\text{Maximale Torsionsspannung } \tau_{t,\max} \left( z = \frac{D}{2} \right) = \frac{M_t}{I_t} \cdot \frac{D}{2} = \frac{M_t}{W_t} \quad (3.15)$$

- $F$  in N Kraft,  
 $A$  in  $\text{mm}^2$  beanspruchte Querschnittsfläche,  
 $A_{\text{proj}}$  in  $\text{mm}^2$  beanspruchte projizierte Querschnittsfläche (siehe Bild 3.23 in ME),  
 $\sigma$  in  $\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$  Spannung,  
 $\tau$  in  $\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$  Spannung,  
 $M_b$  in Nmm Biegemoment,  
 $I$  in  $\text{mm}^4$  Flächenträgheitsmoment,  
 $z$  in mm Randfaserabstand,  
 $W_b$  in  $\text{mm}^3$  Biege widerstandsmoment,  
 $Q$  in N Querkraft,  
 $M_t$  in Nmm Torsionsmoment,  
 $I_t$  in  $\text{mm}^4$  Torsionsflächenträgheitsmoment,  
 $W_t$  in  $\text{mm}^3$  Torsionswiderstandsmoment.

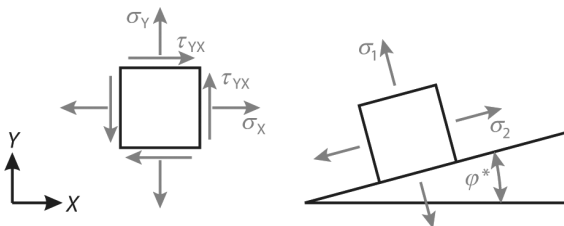
### Zusammengesetzte Beanspruchungen

Die Hauptspannungen im ebenen Spannungszustand berechnen sich wie folgt:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left( \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (3.16)$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left( \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (3.17)$$

Bild 3.1 erläutert die Spannungskomponenten.



**Bild 3.1**

Ebener Spannungszustand (links) und Hauptnormalspannungen mit Hauptachsensystem (rechts)

Die Art und Weise der Überführung des mehrachsigen Spannungszustands in den einachsigen ist abhängig von der Richtung der Spannungskomponenten. Sind die Komponenten gleich gerichtet, wie es bei auftretender Zug-/Druckbeanspruchung zusammen mit Biegebeanspruchung der Fall ist, können die Spannungskomponenten mit dem aus der Mechanik bekannten Superpositionsprinzip zusammengefasst werden.

$$\sigma_{\max} = \sigma_z + \sigma_{b,\max}$$

$$\sigma_{\min} = \sigma_z - \sigma_{b,\max}$$

Zur Überführung in den einachsigen Spannungszustand gibt es grundsätzlich eine Reihe von Festigkeitshypothesen, in der Praxis haben sich jedoch die im Folgenden genannten Hypothesen bewährt.

### Normalspannungshypothese

Die Hauptspannungen werden nachfolgend mit  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  und  $\sigma_3$  bezeichnet und sind absteigend sortiert, sodass  $\sigma_1$  die größte Hauptspannung darstellt.

$$\text{Vergleichsspannung } \sigma_V = |\sigma_1| < K \quad (3.18)$$

$$\text{Vergleichsspannung im mehrachsigen Spannungszustand } \sigma_V = \sigma_{\max} = 2 \cdot \tau_{\max} \quad (3.19)$$

$\sigma_V$  in  $\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$  Spannung,

$\sigma_1$  in  $\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$  Spannung,

$\sigma_{\max}$  in  $\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$  Spannung,

$\tau_{\max}$  in  $\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$  Schubspannung,

$K$  in  $\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$  Werkstoffkennwert.

### Gestaltänderungsenergiehypothese

Für den räumlichen Spannungszustand ergibt sich die Vergleichsspannung wie folgt:

$$\sigma_V = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - (\sigma_x \cdot \sigma_y + \sigma_y \cdot \sigma_z + \sigma_x \cdot \sigma_z) + 3 \cdot (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)} \quad (3.20)$$

Die Vergleichsspannung für den zwei- und einachsigen Spannungszustand vereinfacht sich zu folgenden Gleichungen:

$$\sigma_V = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \cdot \sigma_y + 3 \cdot \tau_{xy}^2} \quad (3.21)$$

$$\sigma_V = \sqrt{\sigma_x^2 + 3 \cdot \tau_{xy}^2} \quad (3.22)$$

### Knickung

Knickung kann bei schlanken (wesentlich kleinere Querschnittsfläche im Vergleich zur Stablänge) druck- und/oder torsionsbelasteten Stäben auftreten. Maßgeblich beeinflusst wird die Knickung von der Querschnittsfläche und vom Flächenträgheitsmoment  $I$ , woraus sich der Trägheitsradius  $i$  ergibt:

$$\text{Knickung } i = \sqrt{\frac{I}{A}} \quad (3.23)$$

$i$  in mm Trägheitsradius,

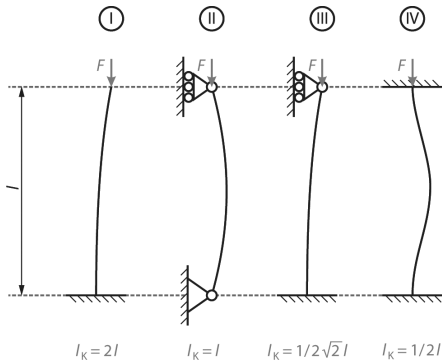
$I$  in  $\text{mm}^4$  Flächenträgheitsmoment,

$A$  in  $\text{mm}^2$  Querschnittsfläche.

$$\text{Schlankheitsgrad } \lambda = \frac{l_K}{i} \quad (3.24)$$

$l_K$  in mm freie Knicklänge nach Bild 3.2,

$\lambda$  Schlankheitsgrad.



**Bild 3.2**  
Die vier Knickfälle nach Euler

Im Anschluss an die Berechnung des Schlankheitsgrads ist zum Vergleich der Grenzschlankheitsgrad  $\lambda_{\text{Grenz}}$  zu ermitteln:

$$\text{Grenzschlankheitsgrad } \lambda_{\text{Grenz}} = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_p}} \quad (3.25)$$

$E$  in  $\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$  E-Modul,

$\sigma_p$  in  $\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$  Proportionalitätsgrenze.

Unter Verwendung des Schlankheitsgrads  $\lambda$  und des Grenzschlankheitsgrads  $\lambda_{\text{Grenz}}$  erfolgt die Differenzierung zwischen der elastischen Knickung nach Euler und der unelastischen Knickung nach Tetmajer:

$$\lambda < \lambda_{\text{Grenz}}: \text{Knickung nach Tetmajer} \quad (3.26)$$

$$\lambda \geq \lambda_{\text{Grenz}}: \text{Knickung nach Euler} \quad (3.27)$$

Kann für den vorliegenden Knickfall eine elastische Knickung nach Euler angenommen werden, ermittelt sich die Knickspannung ( $\sigma_K$ ) wie folgt:

$$\text{Knickspannung } \sigma_K = \sigma_{K,\text{Euler}} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2} \quad (3.28)$$

Im Falle unelastischer Knickung nach Tetmajer ergeben sich folgende materialabhängige Zusammenhänge:

$$\sigma_K = \sigma_{K,\text{Tetmajer}} = 310 - 1,14 \cdot \lambda \quad \text{für Stähle S235J, E335} \quad (3.29)$$

$$\sigma_K = \sigma_{K,\text{Tetmajer}} = 335 - 0,62 \cdot \lambda \quad \text{für Federstahl} \quad (3.30)$$

$$\sigma_K = \sigma_{K,\text{Tetmajer}} = 776 - 12 \cdot \lambda + 0,053 \cdot \lambda^2 \quad \text{für Grauguss} \quad (3.31)$$

Die nach einer der vorangegangenen Gleichungen ermittelte Knickspannung  $\sigma_K$  dient abschließend dem Knicknachweis:

$$S = \frac{\sigma_K}{\sigma_{\text{vorh}}} = \frac{\sigma_K}{\sigma_d} > \begin{array}{l} 5 \dots 10 \text{ Knickfall nach Euler} \\ 3 \dots 8 \text{ Knickfall nach Tetmajer} \end{array} \quad (3.32)$$

## Hertz'sche Pressung

### 3

#### Kugel gegen Kugel

Die Abplattung im Kugel-Kugel-Kontakt beschreibt einen Kreis mit dem Radius  $a$  als Berührfläche:

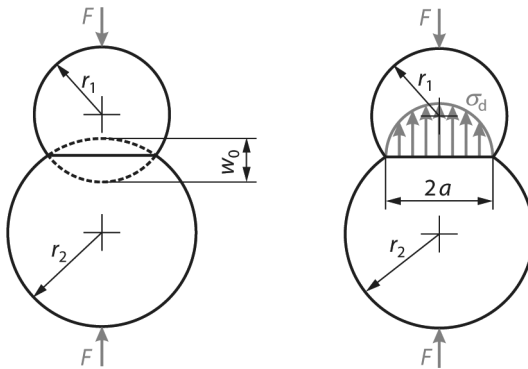
$$a = \sqrt[3]{\frac{1,5 \cdot F \cdot (1 - \nu^2)}{E \cdot \varrho}} \quad (3.33)$$

Das Maximum  $\sigma_{d,\max}$  ist mittig in der Berührfläche und wird als  $p_0$  bezeichnet:

$$\sigma_{d,\max} = -\varrho_0 = \frac{1}{\pi} \sqrt[3]{\frac{1,5 \cdot F \cdot E^2 \cdot \varrho^2}{(1 - \nu^2)^2}} \quad (3.34)$$

$$\text{Maximum der Abplattung } w_0 = \sqrt[3]{\frac{2,25 \cdot F^2 \cdot (1 - \nu^2)^2 \cdot \varrho}{E^2}} \quad (3.35)$$

- $a$  in mm Radius,  
 $F$  in N Kraft,  
 $\nu$  Querkontraktion,  
 $E$  in  $\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$  E-Modul,  
 $\varrho$  in  $\text{mm}^{-1}$  Summe der reziproken Radien,  
 $w_0$  in mm Abplattung.



**Bild 3.3**

Resultierende Spannungsverhältnisse (rechts) infolge Hertz'scher Pressung zwischen zwei Kugeln (links)

#### Kugel gegen Ebene

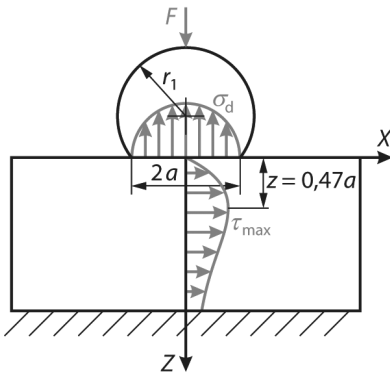
Im Falle eines Kugel-Ebene-Kontakts ist lediglich die Krümmung  $p_2$  der Ebenen null zu setzen (eine Ebene besitzt einen unendlich großen Radius).

$$\tau_{\max} = 0,31 \cdot \sigma_{d,\max} \quad (3.36)$$

$$z = 0,47 \cdot a \quad (3.37)$$

- $z$  in mm Tiefenort des Maximums.





**Bild 3.4**  
Resultierende Spannungsverhältnisse infolge Hertz'scher Pressung zwischen einer Kugel und einer Ebene nach [3.12]

### Zylinder gegen Zylinder

Die Breite  $2a$  der resultierenden rechteckförmigen Berührfläche lautet formelmäßig:

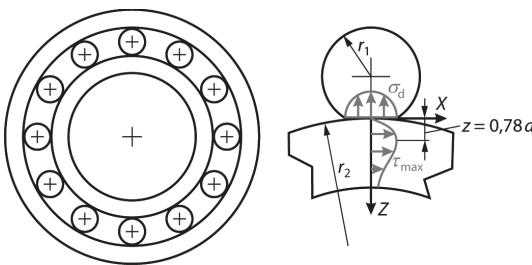
$$a = \sqrt{\frac{8 \cdot F \cdot (1 - \nu^2)}{\pi \cdot E \cdot l \cdot \varrho}} \quad (3.38)$$

Der Druckspannungsverlauf ist auch beim Zylinder-Zylinder-Kontakt halbkreisförmig. Die maximale Druckspannung  $\sigma_{d,\max}$  bzw.  $p_0$  bildet sich in der Mitte der Berührfläche aus:

$$\sigma_{d,\max} = -p_0 = -\sqrt{\frac{F \cdot E \cdot \varrho}{2 \cdot \pi \cdot l \cdot (1 - \nu^2)}} \quad (3.39)$$

$$z = 0,78 \cdot a \quad (3.40)$$

$$\tau_{\max} = 0,30 \cdot \sigma_{d,\max} \quad (3.41)$$



**Bild 3.5**  
Resultierende Spannungsverhältnisse infolge Hertz'scher Pressung zwischen zwei Zylindern am Beispiel eines Wälzlagers

## Beanspruchbarkeit

### Dynamische Beanspruchung

Die Mittelspannung  $\sigma_m$  sowie die Ausschlagspannung  $\sigma_a$  ist aus der *Oberspannung*  $\sigma_o$  und der *Unterspannung*  $\sigma_u$  berechenbar:

$$\text{Mittelspannung } \sigma_m = \frac{\sigma_o + \sigma_u}{2} \quad (3.42)$$

$$\text{Ausschlagspannung } \sigma_a = \frac{\sigma_o - \sigma_u}{2} \quad (3.43)$$

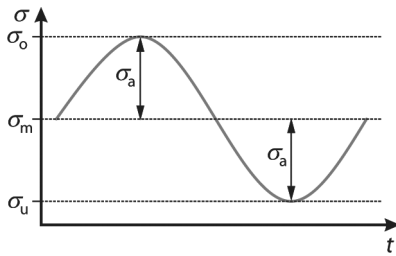
Sind hingegen die Mittelspannung und die Ausschlagspannung bekannt, ist über folgende Beziehungen die Oberspannung  $\sigma_o$  und die Unterspannung  $\sigma_u$  feststellbar:

$$\text{Oberspannung } \sigma_o = \sigma_m + \sigma_a \quad (3.44)$$

$$\text{Unterspannung } \sigma_u = \sigma_m - \sigma_a \quad (3.45)$$

Eine weitere Kenngröße zur Charakterisierung dynamischer Beanspruchungen stellt das Spannungsverhältnis  $R$  dar:

$$\text{Spannungsverhältnis } R = \frac{\sigma_u}{\sigma_o} \quad (3.46)$$



**Bild 3.6**  
Schwingspiel bzw. Lastwechsel

$$\text{Dauerschwingfestigkeit bzw. Dauerfestigkeit } \sigma_D = \sigma_m \pm \sigma_a \quad (3.47)$$

### Dauerfestigkeitsschaubild nach Haigh

Das nach B. P. Haigh benannte Dauerfestigkeitsschaubild stellt eine alternative Darstellungsweise zum Smith-Diagramm dar. Es bietet die Möglichkeit, die Ausschlagspannungen  $\sigma_a$  zum einen für den Dauerfestigkeitsbereich, aber zum anderen auch für den Zeitfestigkeitsbereich in Abhängigkeit von der Mittelspannung  $\sigma_m$  und dem Spannungsverhältnis  $R$  zu ermitteln. Analog zum Smith-Diagramm liegt beim Haigh-Diagramm die Mittelspannung  $\sigma_m$  auf der Abszisse. Auf der Ordinate ist die Ausschlagspannung  $\sigma_a$  aufgetragen.

$$\tan \alpha = \frac{\sigma_a}{\sigma_m} = \frac{1-R}{1+R} \quad (3.48)$$

$$\sigma_a = \sigma_w \sqrt{1 - \left( \frac{\sigma_m}{R_m} \right)} \quad (3.49)$$

$$\sigma_a = \sigma_w \left( 1 - \frac{\sigma_m}{R_m} \right) \quad (3.50)$$