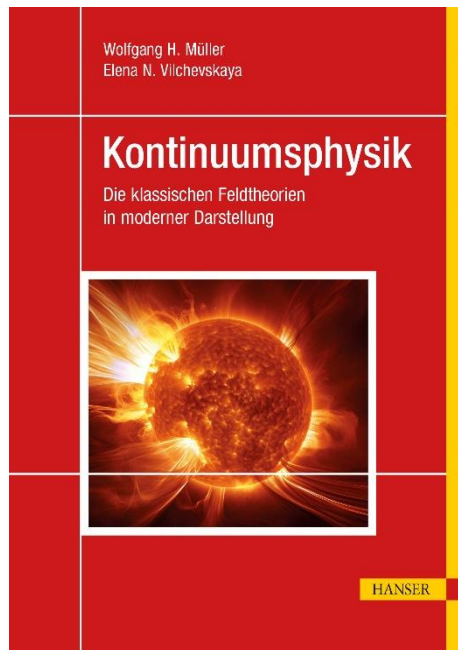


# HANSER



## Leseprobe

zu

## Kontinuumsphysik

von Wolfgang H. Müller und Elena N. Vilchevskaya

Print-ISBN: 978-3-446-47342-3

E-Book-ISBN: 978-3-446-47933-3

Weitere Informationen und Bestellungen unter

<https://www.hanser-kundencenter.de/fachbuch/artikel/9783446473423>

sowie im Buchhandel

© Carl Hanser Verlag, München

# Vorwort

*Es ist offensichtlich, dass alles Kontinuierliche teilbar sein muss in Teilbares, das unendlich teilbar ist. Wenn es nämlich in Unteilbares teilbar wäre, so hätten wir ein Unteilbares in Kontakt mit einem Unteilbarem, weil die Ränder der Dinge, die kontinuierlich miteinander sind, eins sind und in Kontakt.*  
Aristoteles, Physik Buch VI

Die Frage, ob die Welt in ihrer Natur diskret oder kontinuierlich ist, wurde spätestens von den griechischen Philosophen des Altertums gestellt. Beantwortet ist sie bis heute nicht. Eines ist jedoch sicher: Die Kontinuumstheoretische Sichtweise in der Physik hat einen klaren mathematischen Vorteil, da man von mächtigen mathematischen Werkzeugen wie der Tensoranalysis und der Theorie partieller Differentialgleichungen Gebrauch machen kann. Typischerweise hören Studierende der (theoretischen) Physik von kontinuierlichen Feldern zum ersten Mal in einem Kurs zur Elektrodynamik. Ingenieurstudenten des Maschinenbaus und der Physikalischen Ingenieurwissenschaften hingegen begegnen diesem Konzept in Vorlesungen zur Fluidmechanik oder (allgemeiner) in der Kontinuumsmechanik. Letztere umfasst alle Aggregatzustände der Materie, fest, flüssig und gasförmig. Die Studierenden lernen hier zwischen Bilanzen der Erhaltungsgrößen wie Masse, Impuls, Drehimpuls und Energie auf der einen und den Material- bzw. Stoffgleichungen auf der anderen Seite zu unterscheiden. Erstere haben Allgemeingültigkeit, letztere können, wie der Name andeutet, nur zur Beschreibung des Verhaltens bestimmter Materialien verwendet werden. In der Tat komplettieren sie die Bilanzen der Erhaltungsgrößen, und man gelangt letztendlich zu einem System partieller Differentialgleichungen, das man (im schlimmsten Fall numerisch) unter Verwendung von Anfangs- und Randbedingungen löst. Um die Vielfalt bei Materialgleichungen zu reduzieren, verwendet man sog. Prinzipie, wie z. B. das Entropie- oder Isotropieprinzip.

In diesem Buch werden wir diesen Weg gehen: Von der Mechanik über die Thermodynamik bis hin zur Elektrodynamik soll diese Modellierungsmethode vorgestellt werden, um zu zeigen, dass sie in allen Bereichen der Physik anwendbar ist und in gleicher Weise vorgeht. Natürlich kann man hier nur einen ersten Eindruck gewinnen. Studierende sollten danach jedoch in der Lage sein, die einschlägigen Fachbücher zu lesen. Deshalb finden sich in diesem Buch auch zahlreiche Literaturhinweise und eine umfangreiche Diskussion bzw. Vergleich verschiedener Zugänge und Meinungen. Diese grau unterlegten Stellen kann man beim ersten Lesen übergehen.

Ein paar zusätzliche Bemerkungen zu den einzelnen Kapiteln. [Kapitel 1](#) über Tensorrechnung ist so geschrieben, dass es für sich gelesen werden kann und eine erste Einführung in die Thematik bildet, auch wenn man nicht speziell Kontinuumstheorien studieren will. Die [Kapitel 4](#) und [5](#) über Thermodynamik sowie Elektrodynamik sind im Geiste kontinuumsphysikalischer Begriffsbildungen verfasst. Das ist bei beiden Fächern ungewöhnlich, insbesondere wenn man vom Ingenieurwesen her kommt und Technische Thermodynamik und Theoretische Elektrotechnik gehört hat. Vorgebildete wird dieser Zugang erstaunen, und dennoch ist es nur fair,

dass in diesem Buch versucht wird, an vielen Stellen eine Brücke zu von anderswo her bekannten Modellvorstellungen zu schlagen. Insbesondere bei der Elektrodynamik haben wir uns entschieden, explizit Vergleiche mit der gängigen Physikkliteratur zu ziehen und darüber hinaus den historischen Kontext herausgearbeitet. Im übrigen ist es stets unser Ziel, die Lesenden an wissenschaftliche Arbeitsweisen zu gewöhnen. So werden z. B. Formeln referenziert, auf konsistente Schreibweise geachtet, und es wird erwartet, dass man auch die in diversen Sprachen verfasste, zitierte Literatur im Original konsultiert.

Viele interessante Themen werden in der Kontinuumsliteratur nur sehr stiefmütterlich behandelt. Wir haben uns daher dazu entschlossen, auch für sie hier in diesem Buch eine Lanze zu brechen und diese – natürlich immer aus unserer Sichtweise – etwas ausführlicher behandelt. Das erste Thema sind Spiegelungen und die zu ihrer Beschreibung nötigen Transformationen. Das hier präsentierte Wissen kann man dann z. B. in der Kristallphysik gebrauchen. Zweitens der Unterschied zwischen Beobachterwechsel und Koordinatentransformation, was in vielen Büchern als gleichwertig abgetan wird. In diesem Zusammenhang schlagen wir dann auch die Brücke zur d’Alembert’schen Methode des Freischnittes mit Scheinkräften. Außerdem findet sich hier ein Zugang in die Wissenschaftsphilosophie in Gestalt des Begriffes und der Existenz des Inertialsystems der Mechanik. Drittens geben wir eine unserer Meinung nach logische Einführung in die Notwendigkeit der Einführung von *zwei* Paaren für die elektromagnetischen Feldgrößen und erläutern ihren Zusammenhang. Auch hier taucht der Begriff des Inertialsystems wieder auf, jedoch in über die Mechanik hinausgehender Form in Gestalt der sogenannten Maxwell-Lorentz-Äther-Relationen.

Das Buch ist mit zahlreichen Übungsaufgaben durchsetzt. Die Endlösungen oder Hinweise zur Lösung aus der Literatur sind angegeben aber der detaillierte Lösungsweg nicht. Nur selber lösen macht schlau. Den besten Lernerfolg wird man erzielen, wenn man alle Aufgaben bearbeitet. Aber um schneller voranzukommen, genügt es in einem ersten Schritt, sich wenigstens den Sinn des Gesagten klarzumachen.

Abschließend sei darauf hingewiesen, dass wenn jemand schon „offensichtlich“ sagt, und sei es Aristoteles persönlich, man davon ausgehen kann, dass es nicht offensichtlich ist. Genauso verhält es sich mit dem Begriff „Kontinuum“ in der Physik und eine der ersten Aufgaben wird es sein zu klären, was man sich unter diesem Kontinuum vorzustellen hat und wo mögliche Grenzen dieser Vorstellung liegen.

Und nicht zu vergessen, wollen wir Frau Ana Stanković und Herrn Jonas Eckardt für das Schreibfehlerfinden danken.

Berlin und Göteborg im Januar 2024

Wolfgang H. Müller und Elena N. Vilchevskaya

Internetseite der Verfasser:

<https://www.tu.berlin/lkm>

Internetseite der Verfasser zum Grundkurs der Mechanik:

<https://www.tu.berlin/lkm/studium-lehre/lehrveranstaltungen>

# Inhalt

<b>1</b>	<b>Tensorrechnung</b> .....	<b>1</b>
1.1	Historie und Literaturhinweise .....	1
1.2	Tensoralgebra .....	3
1.2.1	Vektoren und Tensoren im dreidimensionalen Raum .....	3
1.2.1.1	Bezugsrahmen und Koordinatensysteme, polare und axiale Objekte .....	3
1.2.1.2	Skalare oder Tensoren nullter Stufe .....	4
1.2.1.3	Der Vektorraum oder Tensoren erster Stufe .....	4
1.2.1.4	Der Tensorraum oder Tensoren beliebiger Stufe .....	7
1.2.1.5	Vektor- und Tensorbasen sowie Tensor-Koordinaten .....	9
1.2.2	Operationen für Tensoren zweiter Stufe .....	11
1.2.2.1	Symmetrische und antisymmetrische Tensoren .....	11
1.2.2.2	Tensormultiplikation .....	12
1.2.2.3	Der Einheitstensor und der Levi-Civita-Tensor .....	17
1.2.2.4	Die Spur eines Tensors zweiter Stufe .....	20
1.2.2.5	Vektorinvariante und assoziierter Vektor .....	21
1.2.2.6	Lineare Zuordnungen .....	23
1.2.2.7	Determinante eines Tensors .....	23
1.2.2.8	Inverser Tensor und Cayley-Hamilton-Theorem .....	25
1.2.2.9	Norm eines Tensors zweiter Stufe sowie Tensorreihen .....	28
1.2.3	Orthogonale Drehungen .....	29
1.2.3.1	Der Rotationstensor .....	31
1.2.3.2	Projektoren und Spiegelungstensoren .....	37
1.2.3.3	Anschauliches zu Spiegelungen, polaren und axialen Vektoren .....	38
1.2.4	Zerlegung von Tensoren zweiter Stufe .....	40
1.2.4.1	Spektrale Zerlegung eines Tensors .....	40
1.2.4.2	Zerlegung eines Tensors in Kugel- und Deviatoranteil .....	43
1.2.4.3	Polare Zerlegung .....	45
1.2.5	Tensoren höherer Stufe .....	48
1.2.5.1	Grundlegende Tensoroperationen .....	48
1.2.5.2	Symmetrie von Tensoren und isotrope Tensoren .....	50
1.2.5.3	Tensoren vierter Stufe und spezielle Tensorbasen .....	53

1.3	Tensorfunktionen .....	56
1.3.1	Einleitende Bemerkungen .....	56
1.3.2	Isotrope Funktionen und Invarianten von Tensorsystemen .....	57
1.3.3	Differentialoperationen .....	60
1.3.3.1	Differentiation von Tensoren nach einem skalaren Argument .....	60
1.3.3.2	Differentiation einer skalarwertigen Funktion .....	62
1.3.3.3	Ableitung einer Skalarfunktion nach einem Tensorargument..	67
1.4	Tensorfelder .....	70
1.4.1	Krummlinige orthogonale Koordinaten .....	70
1.4.2	Hamiltons Nabla-Operator .....	72
1.4.3	Differentialoperationen an einem Produkt .....	75
1.4.4	Zweite Ableitungen .....	77
1.4.5	Orthogonale Koordinatensysteme .....	79
1.4.5.1	Zylinderkoordinaten .....	79
1.4.5.2	Kugelkoordinaten .....	81
1.4.6	Integralausdrücke.....	84
1.4.6.1	Umwandlung eines Volumenintegrals in ein Oberflächenintegral.....	84
1.4.6.2	Stokes'scher Satz .....	86
1.5	Nicht-orthogonale Koordinatensysteme .....	87
1.5.1	Haupt- und reziproke Basis.....	87
1.5.1.1	Basistransformationen .....	88
1.5.1.2	Metrik .....	89
1.5.2	Vektorprodukt und Tensordeterminante .....	91
1.5.3	Kovariante Differentiation .....	93
1.5.3.1	Der Nabla-Operator in nicht-orthogonaler Basis .....	93
1.5.3.2	Ableitungen von Basisvektoren und Christoffelsymbole .....	94
1.5.3.3	Umwandlung der Christoffelsymbole.....	97
1.5.3.4	Kovariante Differentiation eines Tensors zweiter Stufe .....	98
1.5.3.5	Differentialoperationen in krummlinigen Koordinaten .....	99
	Literatur .....	101
<b>2</b>	<b>Grundbegriffe .....</b>	<b>103</b>
2.1	Mathematische Beschreibung von Feldgrößen .....	103
2.1.1	Die Kontinuumshypothese .....	103
2.1.2	Raum, Zeit und Beobachter – Teil I .....	106
2.1.3	Räumliche oder Euler'sche Beschreibungsweise .....	109
2.1.4	Transporttheoreme volumetrischer Feldgrößen in räumlicher Darstellung.....	112

2.1.5	Transporttheoreme für Flussfeldgrößen in räumlicher Darstellung	116
2.1.6	Materielle oder Lagrange'sche Beschreibungsweise	119
2.2	Allgemeine Bilanzgleichungen	122
2.2.1	Bilanzen volumetrischer Feldgrößen – globale Formulierung	122
2.2.2	Bilanzen für Flußfeldgrößen – globale Formulierung	124
2.2.3	Bilanzen für Volumen und offene Flächen im singulären Fall	124
2.2.4	Materielle Zeitableitung	128
2.3	Raum, Zeit und Beobachter – Teil II	129
2.3.1	Das mathematische Pendel: eine Fundgrube zur Klärung der Begriffe Beobachter- und Koordinatenwechsel	129
2.3.2	Lösung im Inertialsystem und Koordinatensystemswechsel	130
2.3.3	Bezugssystemwechsel	134
2.3.4	Koordinaten- und Beobachterwechsel im Nichtinertialsystem	141
2.4	Die euklidische Beobachtertransformation	143
2.4.1	Begriffliches	143
2.4.2	Beobachter- vs. Koordinatenwechsel	144
2.4.3	Geschwindigkeit bei Beobachterwechsel	148
2.4.4	Beschleunigung bei Beobachterwechsel	153
	Literatur	155

**3 Mechanik** ..... **157**

3.1	Zielsetzung der Kontinuumsmechanik	157
3.2	Bilanzen der Kontinuumsmechanik	158
3.2.1	Massenbilanz	158
3.2.2	Teilchenzahlbilanz	164
3.2.3	Impulsbilanz	166
3.2.4	Bilanz der kinetischen Energie	169
3.2.5	Bilanz des Drehimpulses (moment of momentum)	170
3.2.6	Bilanz des Gesamtdrehimpulses (angular momentum)	173
3.2.6.1	Vorbemerkungen	173
3.2.6.2	Die Begriffe des verallgemeinerten linearen Impulses und des Spins	174
3.2.6.3	Die Bilanz des verallgemeinerten linearen Impuls	178
3.2.6.4	Die Bilanz des Gesamtdrehimpulses	179
3.2.6.5	Die Bilanz des Bahndrehimpulses	179
3.2.6.6	Die Bilanz des dynamischen Spins	180
3.2.6.7	Die Bilanz der kinetischen Energie für mikropolare Kontinua	180
3.2.6.8	Ein Beispiel zu den Möglichkeiten des Koppeltensors $\mathbf{B}$ und des Mikroträgheitstensors $\mathbf{J}$	181

3.3	Materialgleichungen einfacher Kontinua .....	183
3.3.1	Der linear-elastische Hooke'sche Festkörper .....	183
3.3.2	Das Navier-Stokes-Fourier-Fluid .....	186
3.4	Feldgleichungen der klassischen Kontinuumsmechanik .....	188
3.4.1	Vorbemerkungen .....	188
3.4.2	Die Navier-Lamé'schen partiellen Differentialgleichungen .....	189
3.4.3	Beispiel zu Navier-Lamé-Gleichungen .....	189
3.4.4	Bewegungsgleichungen für ein reibungsfreies Fluid (Eulerfall) .....	191
3.4.5	Beispiel zum reibungsfreien Eulerfluid .....	191
3.4.6	Die Navier-Stokes'schen partiellen Differentialgleichungen .....	194
3.4.7	Beispiel zu Navier-Stokes-Gleichungen .....	195
3.5	Materialgleichungen polarer Kontinua .....	196
3.5.1	Der lineare isotrope mikropolare Festkörper .....	196
3.5.2	Feldgleichungen für mikropolare Festkörper .....	198
3.5.3	Beispiel für den mikropolaren Festkörper .....	199
3.5.4	Viskose Fluide mit Momentenspannungen .....	201
3.5.5	Feldgleichungen für polare Fluide .....	203
3.5.6	Beispiel für polare Fluide .....	203
3.6	Mechanische Felder und euklidischer Beobachterwechsel .....	206
3.6.1	Der Distanzvektor .....	206
3.6.2	Nochmals polare und axiale Vektoren und Tensoren .....	209
3.6.3	Der Gradient oder Nabla-Operator .....	216
3.6.4	Der Geschwindigkeitsgradient und seine Varianten .....	216
3.6.5	Das Feld der Dichte und die Massenbilanz .....	218
3.6.6	Volumen-, Oberflächenkraft und Spannungstensor .....	220
3.6.7	Felder der Spinbilanz .....	221
3.6.8	Die Impulsbilanz .....	222
3.6.9	Hooke'sches Gesetz .....	223
3.6.10	Navier-Stokes-Materialgleichung .....	224
3.6.11	Momentenspannungstensor .....	224
	Literatur .....	225
<b>4</b>	<b>Thermodynamik .....</b>	<b>227</b>
4.1	Energiebilanzen .....	227
4.1.1	Bilanz der Gesamtenergie für klassische Kontinua .....	227
4.1.2	Bilanz der inneren Energie .....	229
4.1.3	Bilanz der Gesamtenergie für mikropolare Kontinua .....	230
4.1.4	Bilanz der inneren Energie für mikropolare Kontinua .....	230

---

4.2	Entropie .....	231
4.2.1	Ein erster Zugang zur Entropie nach Eckart .....	232
4.2.2	Entropiebilanz und 2. Hauptsatz der Thermodynamik .....	243
4.3	Auswertung der Entropieungleichung .....	244
4.3.1	Thermodynamik irreversibler Prozesse: die Kraft-Fluss-Methode .....	244
4.3.1.1	Vorbemerkungen .....	244
4.3.1.2	Thermodynamische Kräfte und Flüsse .....	245
4.3.1.3	Kritik der Kraft-Fluss-Methode .....	250
4.3.1.4	Kraft-Fluss-Methode und Stabilität .....	250
4.3.1.5	Thermodynamische Stabilität .....	254
4.3.2	Das Verfahren nach Coleman-Noll .....	260
4.3.2.1	Vorbemerkungen .....	260
4.3.2.2	Der Fall des linear-elastischen Festkörpers .....	260
4.3.2.3	Der Fall der Navier-Stokes-Fourier-Flüssigkeit .....	264
4.3.3	Die Methode der Lagrange'schen Multiplikatoren .....	266
4.3.3.1	Vorbemerkungen .....	266
4.3.3.2	Zustandsraum und Darstellung der Materialfunktionen, Isotropieprinzip .....	266
4.3.3.3	Formulierung des Entropieprinzips und ergänzende Bemerkungen .....	271
4.3.3.4	Die Auswertung des Entropieprinzips .....	273
4.3.4	Die Methode der reduzierten Energiebilanz nach Zhilin .....	281
4.3.4.1	Vorbemerkungen .....	281
4.3.4.2	Materielle Zeitableitungen und integrierender Faktor .....	283
4.3.4.3	Legendretransformationen und die freie Energie .....	288
4.3.4.4	Der 2. Hauptsatz der Thermodynamik in verschärfter Form ..	289
4.3.5	Materialgleichungen für mikropolare Medien .....	290
4.3.5.1	Reduzierte Form der Bilanz für die innere Energie .....	290
4.3.5.2	Cauchy-Green-Beziehungen für mikropolare Medien .....	292
4.3.5.3	Fourier- und Planck-Ungleichungen für mikropolare Medien	292
4.4	Thermodynamische Felder und euklidischer Beobachterwechsel .....	293
4.4.1	Euklidische Skalare .....	293
4.4.2	Euklidische Vektoren .....	293
4.4.3	Bilanz der inneren Energie .....	293
Literatur	.....	294



<b>5</b>	<b>Elektrodynamik .....</b>	<b>297</b>
5.1	Das Induktionsgesetz oder der erste Satz der Maxwell'schen Gleichungen ....	298
5.1.1	Experimentelle Beobachtungen .....	298
5.1.2	Mathematische Verallgemeinerung .....	302
5.2	Ladungserhaltung oder der zweite Satz der Maxwell'schen Gleichungen .....	316
5.2.1	Der experimentelle Nachweis .....	316
5.2.2	Ladungs- und Strompotential .....	318
5.3	Dimensionen und Einheiten der elektromagnetischen Felder .....	327
5.3.1	Die Maxwell-Lorentz-Äther-Beziehungen .....	327
5.3.2	Das Coulomb'sche und das Biot-Savart'sche Gesetz neu betrachtet ....	328
5.4	Transformationseigenschaften der elektromagnetischen Felder .....	338
5.4.1	Weltensornotation der Maxwell-Gleichungen .....	338
5.4.2	Euklidische Transformationen und objektive Tensoren des Elektromagnetismus .....	342
5.4.3	The Maxwell-Lorentz-Äther-Beziehungen und die Lorentz-Transformationen .....	345
5.5	Polarisation und Magnetisierung .....	352
5.5.1	Additive Zerlegung von Ladungs- und Stromdichten .....	352
5.5.2	Einfachste Materialgleichungen für Polarisation und Magnetisierung..	354
5.6	Unstetigkeiten bei elektromagnetischen Feldern .....	357
5.6.1	Bilanzen für Volumen und offene Flächen, die von singulären Flächen und singulären Linien durchquert werden .....	357
5.6.2	Sprungbilanzen der elektromagnetischen Felder in der Physik .....	359
5.7	Der Äther, verschiedene Arten der Zeitdifferentiation und andere kuriose Dinge aus der Elektrodynamik .....	361
5.7.1	Der Äther .....	361
5.7.2	Verschiedene Arten der Zeitableitung .....	367
	Literatur .....	370
	<b>Abbildungsverzeichnis .....</b>	<b>376</b>
	<b>Index .....</b>	<b>379</b>

# 1

## Tensorrechnung

### ■ 1.1 Historie und Literaturhinweise

Die historischen Vorläufer der Tensoren waren Spalten- und Zeilenvektoren, Matrizen und Systeme der linearen Algebra mit Indizes, die in Algebra, Geometrie, Oberflächentheorie, Mechanik und anderen Wissenschaftsgebieten verwendet wurden. Die zugehörigen Operationen waren sehr umständlich und erforderten schließlich die Entwicklung eines neuen abstrakten mathematischen Apparats. So präsentierte Mitte des 19. Jahrhunderts der Amerikaner Josiah Willard Gibbs eine Vektoralgebra mit Additionsoperationen, Skalar- und Vektormultiplikation und Vektoranalysis eine Theorie der Differentialrechnung mit Vektorfeldern [Gi1901]. Ungefähr zur gleichen Zeit erschien das Buch von Heaviside [He1893], in dem der Differentialoperator Nabla zum ersten Mal auftritt und wo für die abstrakte Notation ebenfalls eine Lanze gebrochen wird. Bald darauf verallgemeinerte der Italiener Gregorio Ricci-Curbastro und sein Student, der später berühmte Mathematiker Tullio Levi-Civita, die Vektorrechnung auf Systeme mit beliebig vielen Indizes. Mitte des 20. Jahrhunderts hatte sich die Tensorrechnung zu einem effektiven mathematischen Apparat entwickelt, der in verschiedenen Bereichen der Wissenschaft weit verbreitet war: in der Mechanik, der Differentialgeometrie, der Elektrodynamik, der Relativitätstheorie und vielen anderen. Eine ausführlichere Beschreibung der Entwicklungsgeschichte des Tensorkalküls findet sich beispielsweise in den modernen Lehrbüchern [Di2013], [Zh2001].

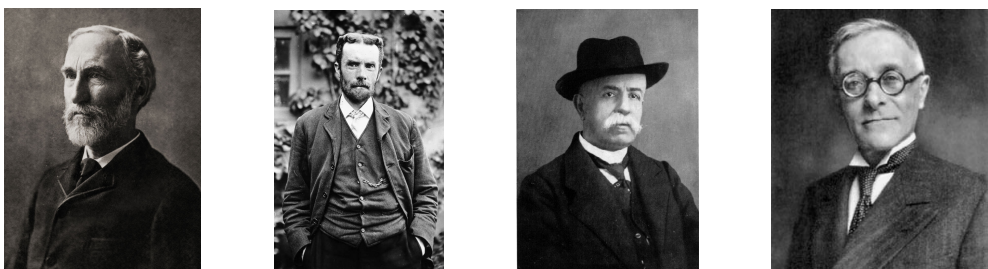
Derzeit gibt es zwei Hauptansätze für die Darstellung der Tensortheorie: der koordinatenbasierte und der abstrakte Zugang, manchmal auch „direkte Notation“ genannt. Im Koordinatenansatz ist ein Tensor eine Matrix, deren Komponenten beim Übergang von einer Koordinatenbasis zu einer anderen nach bestimmten Formeln transformiert werden (siehe z. B. [Ra1964], [Ko1965], [Di2013], [Er2018]). Beim abstrakten Ansatz wird der Tensor als ein Element eines linearen Raums behandelt, das man durch eine spezielle Multiplikation von Vektorräumen erhält. In diesem Fall sind keine Koordinatensysteme beteiligt und die Tensoren selbst hängen nicht von der Wahl des Koordinatensystems ab.

Von der direkten Notation eines Tensors ist es einfach, zu seiner Koordinatendarstellung überzugehen, indem man eine Basis im Tensorraum einführt. Aus rein mathematischer Sicht sind also beide Ansätze gleichwertig. Dennoch ist es die Sprache der direkten Tensorrechnung, die das Wesen der grundlegenden Konzepte und Ideen der Kontinuumstheorie am besten widerspiegelt und sich daher gut für die Probleme der Elastizitätstheorie, der Dynamik starrer Körper, der Hydrodynamik, der Theorie der Plastizität, der Thermodynamik und der Elektrodynamik eignet.

Eine große Anzahl grundlegender Monographien und Lehrbücher ist der Theorie der Tensoren gewidmet (siehe z. B. [Ve1978], [Di2013], [So1951]). Ohne einen detaillierten Literaturüberblick geben zu wollen, erwähnen wir hier für Studierende die Bücher von [Po1986], [Re2008], [Zu2006], die Anfänger in die Grundlagen der Tensorrechnung einführen, das Buch

von McConnell ([Mc2014]) für Anwendungen von Tensormethoden in der analytischen und der Differentialgeometrie, das aber auch für die Festkörperdynamik, die Strömungsdynamik und die elektromagnetischen Feldtheorie gut ist. Die Werke von Eremeyev und Koautoren [Le2010], [Er2018]) behandeln Tensoranwendungen in der Elastizitätstheorie und der Platten- und Schalentheorie. Besondere Erwähnung verdienen die Bücher von Lurie ([Lu2010], [Lu2012]), wo in der Sprache der direkten Tensorrechnung grundlegende Definitionen und Formeln zur Tensoralgebra und der Tensoranalysis zu finden sind, die man für das Studium der Elastizitätstheorie benötigt. Das Buch von Zhilin [Zh2001] enthält eine Darstellung der Vektor- und Tensorrechnung mit Anwendungen zur Beschreibung von Körperbewegungen, der Symmetrie von Tensoren, Tensorfunktionen, der Einführung von axialen Objekten und vieles mehr. Schließlich sei noch das Buch von Palmov erwähnt [Pa2008], in dem die Grundlagen der Tensoralgebra und der Tensoranalysis in zugänglicher Form einfach und verständlich dargestellt werden. Die Zweckmäßigkeit und Kompaktheit der mithilfe der direkten Tensorkalkulation abgeleiteten Gleichungen der Mechanik werden dort demonstriert und die Invarianz der Tensorbeziehungen diskutiert.

Die Ausführungen in unserem Lehrbuch stützen sich in erster Linie auf [Lu2012], [Lu2012], [Zu2006], [Zh2001], [Pa2008]. Es werden nachfolgend die wichtigsten Aussagen der Tensoralgebra, die Theorie der Tensorfunktionen und der Tensoranalysis behandelt sowie die Theorie der Symmetrie von Tensoren und Tensorfunktionen vorgestellt. Der größte Teil des Materials in unserem Lehrbuch wird vom Standpunkt der direkten Tensorrechnung aus präsentiert, wodurch es möglich wird, die Koordinatennotation bei der Ableitung und Analyse der wichtigsten Gleichungen der Kontinuumsmechanik zu vermeiden, was die Formeln in Multi-Indexnotation oft umständlich erscheinen lässt, die das Verständnis der betreffenden Phänomene erschwert. Dennoch ist die Koordinatenschreibweise manchmal bequemer, um Zwischenableitungen beim Nachweis von Tensorrelationen vorzunehmen. In diesem Fall ist es sinnvoll, das einfache kartesische Koordinatensystem zu verwenden und nach Erhalt des Endergebnisses zur invarianten Schreibweise zurückzukehren. In der letzten Phase der Problemstellung werden auch Koordinaten eingeführt, wobei die Wahl des Koordinatensystems durch die Besonderheiten eines bestimmten Problems bestimmt wird.



**Bild 1.1** Pioniere der Vektor- und Tensorrechnung: Josiah Willard Gibbs (1839–1903), Oliver Heaviside (1850–1925), Gregorio Ricci-Curbastro (1853–1925), Tullio Levi-Civita (1873–1941)

Die meisten klassischen Arbeiten zur Kontinuumsmechanik verwenden „materielle“ Koordinaten, die im Körper „eingefroren“ sind, so dass man die Änderung der inneren Geometrie des Körpers auf natürliche Weise mit seiner Verformung in Verbindung bringen kann (siehe [Er1980], [Ma1970], [Tr2004]). Diese Koordinaten führen zu einer nicht-orthogonalen Basis, die wiederum die Einführung einer reziproken Basis, kovarianter und kontravarianter Komponen-

ten, Christoffel-Symbole usw. nach sich zieht. Die grundlegenden Konzepte und Operationen der Tensoralgebra und der Tensoranalysis in einer solchen nicht-orthogonalen Basis werden im letzten Abschnitt dieses Kapitels behandelt.

## ■ 1.2 Tensoralgebra

### 1.2.1 Vektoren und Tensoren im dreidimensionalen Raum

#### 1.2.1.1 Bezugsrahmen und Koordinatensysteme, polare und axiale Objekte

In der Begriffswelt der direkten Tensorrechnung ist der Begriff des Vektors und des Tensors einer beliebigen Stufe außerhalb eines *Bezugsrahmens* oder *Bezugssystems* bedeutungslos (vgl. auch [Abschnitt 2.3](#)). Dabei ist der Bezugsrahmen eher ein philosophisches Konzept, dessen Existenz nicht bewiesen, sondern nur postuliert werden kann. Einen Bezugsrahmen zu definieren, bedeutet insbesondere, ein Modell des absoluten Raums zu konstruieren, bei dem alle Punkte durch die Einführung von drei unabhängigen Richtungen und einer Längenskala im gegebenen Bezugsrahmen parametrisiert sind.

Die klassische Mechanik postuliert die Existenz einer unendlichen Anzahl gleicher Bezugsrahmen, und alle physikalischen Gesetze müssen diesbezüglich invariant sein, d. h. ihre Form bleibt beim Übergang von einem Rahmen zum anderen erhalten. Man spricht von *Forminvarianz* oder manchmal auch vom *Kovarianzprinzip*. Außerdem kann die Position eines beliebigen Punktes in einem bestimmten Bezugssystem durch ein Zahlentripel angegeben werden. Die Art und Weise, wie jeder Punkt in einem Bezugssystem in eine Eins-zu-Eins-Korrespondenz mit einem Zahlentripel gebracht wird, wird als Wahl des Koordinatensystems bezeichnet. In einem Bezugsrahmen können viele verschiedene Koordinatensystemen eingerichtet werden, die alle gleichwertig sind. Der Unterschied zwischen einem Bezugsrahmen und einem Koordinatensystem muss klar verstanden werden. Insbesondere hängen viele physikalische Größen (Geschwindigkeit, Beschleunigung, kinetische Energie usw.) von der Wahl des Bezugssystems ab, aber keine physikalische Größe hängt von der Wahl des Koordinatensystems in einem bestimmten Bezugssystem ab.

In dem gewählten Bezugssystem muss eine zusätzliche Vereinbarung darüber getroffen werden, welche Drehungen als positiv zu betrachten sind, d. h. es muss die Ausrichtung des Raums gewählt werden. Ein Bezugssystem wird *rechtsorientiert* genannt, wenn eine Drehung *gegen den Uhrzeigersinn* als positiv, und *linksorientiert*, wenn eine *Drehung im Uhrzeigersinn* als positiv angesehen wird.

Alle physischen Objekte werden hinsichtlich der Wahl der Orientierung im Bezugssystem in zwei Typen unterteilt (siehe auch [Abschnitt 3.6.2](#)). Objekte, die nicht von der Ausrichtung des Bezugssystems abhängen, werden als *polar* bezeichnet. Objekte, die mit dem Faktor  $-1$  multipliziert werden, wenn die Ausrichtung des Bezugssystems umgekehrt wird, werden als *axial* bezeichnet. Zum Beispiel sind Temperatur, Verschiebung und Translationsgeschwindigkeit polare Objekte. Axiale Objekte beziehen sich in der Regel auf die Ausrichtung von Körpern im Raum. Typische Beispiele für axiale Objekte sind das Drehmoment, der Rotationsvektor, die Winkelgeschwindigkeit und die Winkelbeschleunigung.

Es ist zu beachten, dass die Ausrichtung des Bezugsrahmens erfolgt, bevor irgendwelche Operationen an Objekten im Rahmen durchgeführt werden, und dass keine weiteren Operationen an Objekten die ursprünglich gewählte Ausrichtung ändern. Insbesondere bleibt die Orientierung des Raums bei Spiegelungen erhalten.

### 1.2.1.2 Skalare oder Tensoren nullter Stufe



**Definition:** Ein Skalar oder Tensor nullter Stufe ist eine physikalische Größe, die von der Wahl des Koordinatensystems unabhängig ist und durch eine einzige reelle Zahl definiert wird.

Beispiele für Skalare in der Physik sind physikalische Größen wie Temperatur, Dichte, Energie, Ladung, usw. Nicht alle Zahlen können als Skalare bezeichnet werden. So sind beispielsweise Vektorkoordinaten keine Skalare, da sie von der Wahl des Koordinatensystems abhängen. Es ist zu beachten, dass skalare Größen oft gleich bleiben aber sich manchmal auch ändern können, wenn man das Bezugssystem ändert. So ändern sich Temperatur, Dichte und innere Energie nicht, wenn man in einen anderen Bezugsrahmen wechselt, während die kinetische Energie von der Wahl des Bezugsrahmens abhängt, weil sich dieser gegenüber dem ursprünglichen Rahmen mit einer anderen Geschwindigkeit bewegen kann. Skalare können Funktionen von Raumpunkten in einem Bezugssystem sein, z. B. die Temperaturverteilung in einem Körper. In diesem Fall handelt es sich um ein skalares *Feld*.

Betrachten wir die Menge der Skalare als Elemente der Menge der reellen Zahlen, also  $\mathcal{T}_0 \equiv \mathbb{R}$ ,\* auf denen die Operationen der Addition, Multiplikation und Division nach den Regeln der elementaren Arithmetik eingeführt werden. Als physikalische Größen haben Skalare Dimensionen. Nur skalare Größen desselben Typs, die dieselben Dimensionen und Einheiten haben, können direkt addiert und subtrahiert werden. Andererseits können Skalare verschiedener Dimensionen geteilt und multipliziert werden.

### 1.2.1.3 Der Vektorraum oder Tensoren erster Stufe

Das Grundelement des Vektorraums ist ein Vektor oder Tensor erster Stufe, der als „gerichteter Pfeil“ verstanden und durch seine Länge und Richtung definiert wird. Ein Beispiel für solche Vektorgrößen in der Mechanik sind Verschiebung, Translations- und Winkelgeschwindigkeit sowie der Rotationsvektor. Wir nennen einen Nullvektor einen Vektor, dessen Länge gleich Null ist. Die Richtung des Nullvektors spielt natürlich keine Rolle.

Folgende vier Regeln werden auf der Menge der Vektoren erklärt:



1. **Vektoradditionsregel:** Sie setzt in eindeutiger Weise zwei Vektoren  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  desselben Typs mit einem dritten Vektor  $\mathbf{c}$  desselben Typs gemäß der Parallelogramm- oder Dreiecksregel in Verbindung. Die folgenden Eigenschaften der Additionsoperation gilt es festzuhalten:

\* Das Symbol  $\mathcal{T}$  weist auf Tensorraum hin, der nachfolgende Index kennzeichnet die Stufe.

- Kommutativität:  $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$ ,
  - Assoziativität:  $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$ ,
  - Existenz eines Nullvektors:  $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{a} = \mathbf{a}$ ,
  - Existenz des Gegenvektors:  $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$ .
2. Die Regel der **Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar**: Jedem Vektor  $\mathbf{a}$  und Skalar  $\alpha$  kann eindeutig ein Vektor  $\mathbf{b} = \alpha \mathbf{a}$  zugeordnet werden, der die Länge  $|\alpha| |\mathbf{a}|$  und die Richtung hat, die mit der Richtung von  $\mathbf{a}$  übereinstimmt, wenn  $\alpha > 0$  und entgegengesetzt ist, wenn  $\alpha < 0$ . Diese Vorschrift hat folgende Eigenschaften:

$$(\alpha + \beta)\mathbf{a} = \alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{a}, \quad \alpha(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \alpha \mathbf{a} + \alpha \mathbf{b}, \quad \alpha(\beta \mathbf{a}) = (\alpha \beta)\mathbf{a}. \quad (1.1)$$

Der Vektortyp bleibt bei der Multiplikation mit einem polaren Skalar erhalten und wird bei der Multiplikation mit einem axialen Skalar umgekehrt.

Die Menge der Vektoren, für welche die beiden oben genannten Bildungsgesetze gelten, heißt *linearer Vektorraum*.

3. **Skalarmultiplikation von Vektoren**: Die Skalarmultiplikation setzt jedes Paar von Vektoren  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  zu einem Skalar  $\alpha = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  in Beziehung und hat die folgenden Eigenschaften:

- Kommutativität:  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$ ,
- Distributivität:  $(\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \alpha(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) + \beta(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$ ,
- Positivdefinitheit:  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \geq 0$ ,  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a} = \mathbf{0}$ .

Das Ergebnis der Skalarmultiplikation ist ein polarer Skalar, wenn die beteiligten Vektoren den gleichen Typ haben, und ein axialer Skalar, wenn die Vektortypen unterschiedlich sind.

Die **Norm eines Vektors** ist seine Länge:

$$|\mathbf{a}| = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a})^{1/2}. \quad (1.2)$$

Die Menge der Vektoren, für welche die drei oben genannten Kompositionsgesetze gelten, heißt *linear normierter Raum* oder *euklidischer Raum*.

Zwei Vektoren, die nicht Null sind, werden *orthogonal* genannt, wenn ihr Skalarprodukt Null ist.

Der *Einheitsvektor* eines Vektors  $\mathbf{a}$  zeigt dessen Richtung an und hat die Länge 1:

$$\mathbf{e}_a = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}, \quad |\mathbf{a}| \neq 0. \quad (1.3)$$

Die *Projektion* eines Vektors  $\mathbf{a}$  auf die Richtung von  $\mathbf{b}$  ist der Vektor

$$\mathbf{a}_b = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{e}_b. \quad (1.4)$$

Oft hat die Projektion eines Vektors  $\mathbf{a}$  auf einen Vektor  $\mathbf{b}$  die Länge

$$|\mathbf{a}_b| = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_b). \quad (1.5)$$

4. **Vektorielle Multiplikation oder Kreuzprodukt** von Vektoren. Im Gegensatz zu den vorangegangenen Gesetzen ist dieses Bildungsgesetz nur in einem orientierten Bezugsrahmen sinnvoll. Das Vektorprodukt der Vektoren  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  ist ein Vektor  $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ , dessen Länge gegeben ist durch  $|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  und dessen Richtung orthogonal zu der über die Vektoren  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  aufgespannten Ebene ist. Vom Ende des Vektors  $\mathbf{c}$  aus betrachtet, entsteht dieser im rechtsorientierten Bezugssystem durch kürzeste Drehung vom ersten auf den zweiten Vektor gegen den Uhrzeigersinn, im linksorientierten Bezugssystem im Uhrzeigersinn. Der Typ des Vektors  $\mathbf{c}$  hängt vom Typ der Vektoren  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  ab. Wenn beide Quellvektoren vom gleichen Typ sind, dann ist  $\mathbf{c}$  ein Axialvektor. Wenn einer der Vektoren polar und der andere axial ist, dann ist der Vektor  $\mathbf{c}$  polar.

Eigenschaften des Vektorprodukts sind:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}, \quad (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}. \quad (1.6)$$

Folgende Produkte dreier Vektoren werden häufig verwendet, das sog. *gemischte* (oder *Spatprodukt*),  $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ , und das *doppelte Vektorprodukt*,  $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ . Der Betrag des gemischten Produkts ist gleich dem Volumen des Parallelepipeds, das aus den gegebenen Vektoren gebildet wird. Man beachte, dass ein gemischtes Produkt ein Axialskalar ist, wenn alle Vektoren, die es enthält, vom gleichen Typ sind oder zwei von ihnen axial sind.

Erinnert sei in diesem Zusammenhang an die folgenden Identitäten:



#### Spat- und doppeltes Kreuzprodukt:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}); \quad (1.7)$$

dies ist sogenannte *Spatproduktregel*, da diese Größe das Volumen des von den drei Vektoren aufgespannten Volumens bestimmt.

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}); \quad (1.8)$$

dies ist die sogenannte *bakzap-Regel*, wobei sich der Name aus den Buchstaben der gewählten Vektoren erklärt.

Die eingeführte Menge gerichteter Segmente mit den obigen Bildungsgesetzen ist ein vektororientierter Raum  $\mathcal{T}_1$ . Schließlich ist zu beachten, dass die Divisionsoperation nicht auf einer Vektormenge definiert ist, da sie nur auf Mengen definiert werden kann, in denen es ein einziges Einheitselement gibt. Beim Vektorraum ist das nicht der Fall, da er eine unendliche Anzahl von Einheitsvektoren unterschiedlicher Richtung enthält.



#### Übungsaufgabe Kreuzprodukt

1. Zeige, dass  $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2$ .
2. Beweise, dass  $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{0}$ .

### 1.2.1.4 Der Tensorraum oder Tensoren beliebiger Stufe

Skalare und Vektoren sind nur ein Teil der ganzen Vielfalt an Größen und Begriffen, welche die moderne Naturwissenschaft benötigt. Tensoren höherer Stufe entstehen in der Mechanik als Verallgemeinerung von Vektorräumen. Betrachten wir als Beispiel ein System, das aus drei Federn mit unterschiedlichen Federsteifigkeiten  $k_i$  besteht (Bild 1.2). Geben wir dem Mittelpunkt der Federbindung eine Verschiebung  $\Delta \mathbf{r}$ . Es liegt auf der Hand, dass die Rückstellkraft die Summe der in den Federn erzeugten elastischen Kräfte ist,  $\mathbf{F} = F_1 \mathbf{e}_1 + F_2 \mathbf{e}_2 + F_3 \mathbf{e}_3$ , wobei  $\mathbf{e}_i$  ein Einheitsvektor ist, der entlang der  $i$ -ten Feder zeigt, und die Größe der Kraft  $F_i$  proportional zur Projektion des Kopplungsmittelpunktes auf die entsprechende Einheitsrichtung ist,  $F_i = -k_i \mathbf{e}_i \cdot \Delta \mathbf{r}$ . Wir haben also  $\mathbf{F} = -(k_1 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + k_2 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 + k_3 \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3) \cdot \Delta \mathbf{r} = -\mathbf{K} \cdot \Delta \mathbf{r}$ , wobei der Tensor  $\mathbf{K}$ , der sich aus der Summe von drei Paaren von Vektoren multipliziert mit den entsprechenden Federsteifigkeiten ergibt, als Tensorsteifigkeit des Federsystems interpretiert werden kann. Man beachte, dass in diesem Fall die soeben verwendeten Vektorpaare  $\mathbf{e}_i \mathbf{e}_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  als Ganzes wirken, wobei der erste Vektor dieses Paares die Richtung der Feder und der zweite Vektor die Richtung der Kraft angibt, die beide in diesem Problem zusammenfallen. Um diesen Unterschied zu verdeutlichen, untersuchen wir, wie der Spannungszustand in einem verformbaren Körper beschrieben wird.

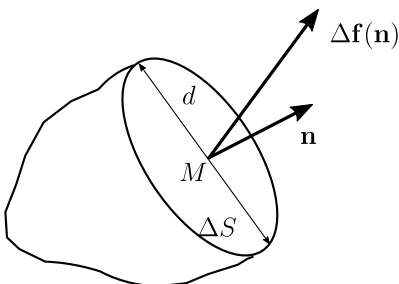


**Bild 1.2** Steifigkeitstensor eines Federsystems

Schneiden wir den Körper gedanklich durch die Fläche  $\Delta S$  in zwei Teile und betrachten einen der Teile. Bezeichnen wir mit  $\mathbf{n}$  die äußere Normale zur Oberfläche. Auf die Fläche  $\Delta \mathbf{f}(\mathbf{n})$  wirkt von der Seite des deformierten Teils eine Kraft  $\Delta S$ , die von der Ausrichtung der Fläche abhängt (Bild 1.3). Der *Spannungsvektor* in einem Punkt  $M$ , der auf ein infinitesimales Flächenelement  $\Delta S$  wirkt, ist der Grenzwert des Verhältnisses

$$\mathbf{t}(\mathbf{n}) = \lim_{d \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{f}}{\Delta S}, \tag{1.9}$$

wobei  $d$  der größte Durchmesser des Bereichs ist.



**Bild 1.3** Zum Spannungstensor



Um die Spannung im Punkt  $M$  zu bestimmen, ist es also notwendig, eine orientierte Fläche zu definieren, die durch die Normale  $\mathbf{n}$  und den auf diese Fläche wirkenden Spannungsvektor definiert ist. Der *Spannungstensor* ist also ein geordnetes Paar von Vektoren  $\mathbf{n}$  und  $\mathbf{t}$ , von denen der erste die Fläche und der zweite die auf diese Fläche wirkende Kraft definiert. Die Reihenfolge der Faktoren ist dabei von grundlegender Bedeutung und darf – einmal festgelegt – nicht geändert werden. Man beachte in diesem Zusammenhang, dass die Paare  $\mathbf{nt}$  und  $\mathbf{tn}$  unterschiedlich sind. Um den Spannungszustand im Punkt  $M$  vollständig zu beschreiben, müssen die Spannungsvektoren in allen Ebenen, die durch  $M$  verlaufen, angegeben werden. Es gibt eine unendliche Anzahl solcher Ebenen. Mit einer Standardargumentation, siehe z. B. [Pa2008], kann gezeigt werden, dass der Spannungszustand an einem Punkt vollständig definiert ist, wenn eine ungeordnete Menge von drei geordneten Vektorpaaren gegeben ist.

Das formale Produkt zweier Vektoren  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$ , die zu der Menge  $\mathcal{T}_1$  gehören, heißt *Tensormultiplikation* oder *dyadisches Produkt*. Es sei erwähnt, dass in der Literatur häufig ein spezielles Zeichen für diese Tensormultiplikation, nämlich  $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ , verwendet wird, das auch in diesem Lehrbuch gelegentlich zum Einsatz kommt. Der Begriff Tensormultiplikation zeigt an, dass diese Operation einige Eigenschaften einer gewöhnlichen Multiplikationsoperation hat.

Man betrachte die endliche Summe der Dyaden:

$$\mathbf{A} = \mathbf{ab} + \mathbf{cd} + \mathbf{ef} + \dots \quad (1.10)$$

Die Elemente von  $\mathbf{A}$  werden als Tensoren zweiter Stufe bezeichnet, wenn folgende Äquivalenzbedingungen erfüllt sind ( $\alpha$  ist ein Skalar):

$$\begin{aligned} \mathbf{ab} + \mathbf{cd} &= \mathbf{cd} + \mathbf{ab}, \quad \mathbf{a}(\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{ab} + \mathbf{ac}, \\ (\mathbf{a} + \mathbf{b})\mathbf{c} &= \mathbf{ac} + \mathbf{bc}, \quad (\alpha \mathbf{a})\mathbf{b} = \alpha(\mathbf{ab}). \end{aligned} \quad (1.11)$$

Ein Tensor zweiter Stufe ist also eine ungeordnete Menge von geordneten Dyaden.

Bezeichnen wir die Menge der Tensoren zweiter Stufe, die man durch Tensorprodukt dreidimensionaler linearer Räume  $\mathcal{T}_1\mathcal{T}_1$  erhält, mit  $\mathcal{T}_2$ . Wir führen auf der Menge  $\mathcal{T}_2$  die Operationen der Addition und Multiplikation mit einer Zahl ein, so dass die Grenzen der Menge nicht überschritten werden:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{ab} + \mathbf{cd}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{de} + \mathbf{gh}, \\ \mathbf{S} &= \mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{ab} + \mathbf{cd} + \mathbf{de} + \mathbf{gh}, \\ \alpha \mathbf{A} &= (\alpha \mathbf{a})\mathbf{b} + (\alpha \mathbf{c})\mathbf{d} = \alpha(\mathbf{ab}) + \mathbf{c}(\alpha \mathbf{d}). \end{aligned} \quad (1.12)$$

Eine wichtige Eigenschaft des linearen Raums ist das Vorhandensein eines Null- und eines Gegentensors:

Der *Nulltensor* der Stufe 2 ist der Tensor  $\mathbf{0} = \mathbf{oo}$ , der über eine Dyade zweier Nullvektoren (hier zur Unterscheidung mit  $\mathbf{o}$  bezeichnet) entsteht. Wenn wir den Nullvektor in der Form  $\mathbf{o} = \mathbf{0a}$  darstellen, erhalten wir eine alternative Darstellung des Nulltensors:

$$\mathbf{0} = \mathbf{oa} = \mathbf{ao}. \quad (1.13)$$

Der *Gegentensor* ist derjenige Tensor, der bei Summation zu einem Nulltensor führt.

$$\mathbf{\Pi} = (-1)\mathbf{A}. \quad (1.14)$$

Tensoren noch höherer Stufe werden auf die gleiche Weise eingeführt. Wir definieren das Tensorprodukt von  $k$  Vektorräumen:  $\mathcal{T}_k = \underbrace{\mathcal{T}_1 \mathcal{T}_1 \dots \mathcal{T}_1}_k$ . Wir nennen die geordnete Menge aufsteigender Tensoren  $k$ -ter Stufe auch: **ab**-Dyade, **abc**-Triade und **abcd**-Tetrade.

Die Elemente der Menge  $\mathcal{T}_k$ , für die die entsprechenden Äquivalenzbeziehungen erfüllt sind, heißen Tensoren  $k$ -ter Stufe und werden, wenn es nicht aus dem Kontext hervorgeht, in dem Symbol  ${}^k\mathbf{A}$  erfasst. Somit bezeichnet z. B.  ${}^2\mathbf{A} \equiv \mathbf{A}$  einen Tensor zweiter Stufe.

Da der Raum der Tensoren  $k$ -ter Stufe  $\mathcal{T}_k$  ein linearer Raum ist, definiert man Additions- und Multiplikationsoperationen mit einer Zahl wie folgt:

$$\alpha \left( {}^k\mathbf{A} + {}^k\mathbf{B} \right) = \alpha {}^k\mathbf{A} + \alpha {}^k\mathbf{B}. \quad (1.15)$$

Man beachte, dass die Summe von Tensoren nur für Tensoren gleichen Ranges definiert ist.

### 1.2.1.5 Vektor- und Tensorbasen sowie Tensor-Koordinaten

Die Dreidimensionalität des Bezugssystems bedeutet, dass es im eingeführten Raum  $\mathcal{T}_1$  Dreiergruppen linear unabhängiger Vektoren gibt, aber vier (und mehr) beliebige Vektoren erweisen sich als linear abhängig.



**Definition:** Jedes Triplet linear unabhängiger Vektoren wird als **Basis** bezeichnet.

Man beachte, dass alle Operationen mit Tensoren invariant sind und nicht von der gewählten Basis abhängen. Der Einfachheit halber wählen wir daher drei beliebig orientierte orthogonale Einheitsvektoren  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ .\*

$$\mathbf{e}_m \cdot \mathbf{e}_n = \delta_{mn} = \begin{cases} 1, & m = n; \\ 0, & m \neq n, \end{cases} \quad (1.16)$$

wobei  $\delta_{mn}$  das sogenannte *Kroneckersymbol* ist. Eine Basis, welche die [Gleichung \(1.16\)](#) erfüllt, heißt *orthonormal*.

Für jeden Vektor  $\mathbf{a}$  gibt es eine einzige Menge von Zahlen  $a_1, a_2, a_3 \in \mathcal{T}_0$ , die man Koordinaten des Vektors in der gewählten Basis nennt:

$$\mathbf{a} = a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3 = a_i \mathbf{e}_i, \quad a_i = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_i. \quad (1.17)$$

Hier und im Folgenden wird nach der *Einstein'schen Summenkonvention* vorgegangen, d. h. bei zweimal wiederholten Indizes\*\* wird automatisch von 1 bis 3 summiert.

Die skalare Multiplikation der Vektoren  $\mathbf{a} = a_m \mathbf{e}_m$  und  $\mathbf{b} = b_n \mathbf{e}_n$  in Koordinatenschreibweise hat die Form:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_m b_n \delta_{mn} = a_n b_n. \quad (1.18)$$

Wir ordnen nun die Basisvektoren so an, dass sie das rechte Tripel der Vektoren  $(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{e}_3 = 1$  bilden und betrachten das Vektorprodukt zwischen  $\mathbf{e}_i$  und  $\mathbf{e}_j$ ,

$$\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j = \epsilon_{ijk} \mathbf{e}_k \equiv \epsilon_{kij} \mathbf{e}_k, \quad (1.19)$$

\* Die nicht-orthogonale Basis wird in [Abschnitt 1.5](#) betrachtet.

\*\* Für eine nicht-orthogonale Basis wird diese Regel modifiziert (siehe [Abschnitt 1.5](#)).

wobei  $\epsilon_{ijk}$  das sog. *Levi-Civita-Symbol* bezeichnet. Die Werte von  $\epsilon_{ijk}$  sind gleich Null, wenn es sich wiederholende Indizes  $ijk$  gibt, gleich 1 für die Sequenz der Indizes 123 und Sequenzen, die durch zyklische Permutation daraus erhalten werden, und schließlich gleich  $-1$ , wenn diese Ordnung gebrochen ist, d. h. für Sequenzen 132, 213 und 321. Diese Regeln haben wir im letzten Schritt in [Gleichung \(1.19\)](#) bereits angewandt.

Multipliziert man [Gleichung \(1.19\)](#) skalar mit  $\mathbf{e}_n$ , erhält man eine nützliche Formel zur Bestimmung der Komponenten des Levi-Civita-Tensors,

$$\epsilon_{ijk} = (\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j) \cdot \mathbf{e}_k. \quad (1.20)$$

Betrachten wir nun die Tensormultiplikation von Vektoren. Jede Dyade  $\mathbf{ab}$  kann in folgender Form dargestellt werden:

$$\mathbf{ab} = (a_m \mathbf{e}_m)(b_n \mathbf{e}_n) = a_m b_n \mathbf{e}_m \mathbf{e}_n. \quad (1.21)$$

Stellt man in ähnlicher Form alle im Tensorausdruck enthaltenen Dyaden dar, so erhält man, dass jeder Tensor zweiter Stufe durch folgende Erweiterung dargestellt werden kann:

$$\mathbf{A} = A_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j, \quad A_{mn} = \mathbf{e}_m \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_n. \quad (1.22)$$

Die Kombinationen  $\mathbf{e}_m \mathbf{e}_n$  werden als Elemente der Tensorbasis bezeichnet, und Werte von  $A_{mn}$  sind die Tensorkoordinaten in Bezug auf die eingeführte Tensorbasis. Der Tensor des zweiten Ranges kann also als Summe von neun Dyaden dargestellt werden.



**Satz:** Die Dimensionalität des Raumes  $\mathcal{T}_2$  ist 9, d. h. die Elemente der Tensorbasis  $\mathbf{e}_m \mathbf{e}_n$  sind linear unabhängig.

**Beweis:** Lineare Unabhängigkeit der Tensorbasiselemente bedeutet, dass

$$\alpha_{mn} \mathbf{e}_m \mathbf{e}_n = \mathbf{0} \quad (1.23)$$

dann und nur dann möglich ist, wenn  $\alpha_{mn} = 0$  gilt. Durch skalare Multiplikation der [Gleichung \(1.23\)](#) mit  $\mathbf{e}_k$  erhalten wir:  $\alpha_{mn} \mathbf{e}_m \delta_{nk} = \alpha_{mk} \mathbf{e}_m = \mathbf{0}$ ,  $k = 1, 2, 3$ . Aufgrund der linearen Unabhängigkeit der Vektorbasiselemente ergibt sich also, dass  $\alpha_{mn} = 0$ . In einer festen Basis ist ein Tensor zweiter Stufe also vollständig durch seine Koordinatenmatrix der Ordnung  $3 \times 3$  definiert.  $\square$



**Behauptung:** Jeder Tensor zweiter Stufe kann als Summe von drei Dyaden dargestellt werden.

**Beweis durch Konstruktion:** Wenn man die Ausdrücke in der [Gleichung \(1.22\)](#) zusammenfasst, erhält man

$$\mathbf{A} = (A_{m1} \mathbf{e}_m) \mathbf{e}_1 + (A_{m2} \mathbf{e}_m) \mathbf{e}_2 + (A_{m3} \mathbf{e}_m) \mathbf{e}_3 = \mathbf{a}_1 \mathbf{e}_1 + \mathbf{a}_2 \mathbf{e}_2 + \mathbf{a}_3 \mathbf{e}_3. \quad \square \quad (1.24)$$

Man beachte, dass, obwohl jede Dyade ein Tensor zweiter Stufe ist, ein beliebiger Tensor zweiter Stufe nur in Ausnahmefällen auf eine einzelne Dyade reduziert werden kann.

# Index

## A

Abbildungsgeschwindigkeit 111  
Ableitung eines Tensors 60  
Absolutbeschleunigung 154  
Absolutgeschwindigkeit 150  
additive Dekomposition 185  
adiabatische Abschottung 329  
aktuellen Platzierung 110  
Ampère-Øersted'sches Gesetz 318  
Anisotropie 185, 265  
antisymmetrischer Tensor 12  
Assoziativität 4  
assoziierter Vektor des Tensors 22  
Ausdehnung 184  
äußere Differentialformen 349  
äußeres Skalarprodukt 15  
axial 3, 38  
axialer euklidischer Skalar 214

## B

Bahndrehimpuls 173  
Bakzap-Regel 6  
Basis 87  
Basisvektoren 107  
Beobachter 108  
Beobachterabhängigkeit 261  
Beobachtungspunkt 110  
Berechnung des inversen Tensors 26  
Bernoulligleichung 194  
Bewegung 299  
Bezugsraum 107  
Bezugssystem 3, 106, 108  
Bild 136  
Bildvektor bei Beobachterwechsel 137  
Biot-Savart-Gesetz 329  
body force 167  
body of reference 107  
Boltzmannkontinuum 174

Boostabstand 143  
Boostbeschleunigung 154

## C

Cauchy-Green-Beziehungen 286, 288, 289, 292  
Cauchykontinuum 174  
Cauchy'sches Tetraederargument 166  
Cayley-Hamilton-Theorem 26  
cgs-System 329  
charakteristische Gleichung 41, 59  
charakteristische Länge 200  
chemisches Potential 166  
Christoffelsymbole erster Art 95  
Christoffelsymbole zweiter Art 94  
Clausius-Duhem-Ungleichung 238, 264, 290  
Clausius-Planck-Ungleichung 236, 282  
coefficient of thermal expansion 185  
coldness 277, 282  
Coleman-Noll-Verfahren 260  
constitutive equations 185  
convected time-flux 313  
Coriolisbeschleunigung 154  
Corioliskraft 138  
Cosseratkontinua 174  
Cosseratpseudokontinuum 197  
Coulomb-Eichung 362  
Coulomb'sches Gesetz 329  
current placement 110

## D

Darstellungssatz 248, 265  
Deformationsgradient 112, 183  
Dehnungspotential 264  
Determinante eines Tensors 23  
Determinantenregeln 25  
Deviator 44, 188  
dielektrische Suszeptibilität 354

Differentialoperationen für krummlinige  
 Koordinaten 99  
 Dimension 328  
 direkte Notation 1  
 Dirichletbedingung 190, 196  
 Dissipation 237  
 Distributivität 5  
 Divergenz 73, 159  
 Divergenztheorem 85  
 doppelte innere Vektormultiplikation 16  
 doppeltes äußeres Vektorprodukt 15  
 doppeltes Vektorprodukt 6  
 Drall 173  
 Drehimpuls 171  
 Drehtensor 31, 144  
 Drehwinkel 33  
 Dreibein 106  
 Duhamel-Neumann-Gesetz 185  
 Duhamel-Neumann'sche Erweiterung 185  
 Dyade 8, 9  
 dyadisches Produkt 8  
 dynamischer Spin 177  
 dynamisches Kräftegleichgewicht 133

## E

Eigensystemsbasis 42  
 eigentliche Drehung 30  
 Eigenvektoren 41  
 Eigenwerte 41  
 Einheit 328  
 Einheitsvektor 5  
 Einstein'sche Summenkonvention 9  
 elastische Dehnungen 185  
 Elastizitätsmodultensor 53  
 elektrische Anregung 321  
 elektrische Permittivität des Vakuums 332  
 elektrische Spannung 303  
 elektrisches Feld 298  
 Elektromotor 303  
 elektromotorische Kraft 301, 305  
 elektrostatische Einheit 329  
 empirische Temperatur 266  
 Energieerhaltungssatz 228  
 entarteter Tensor 24  
 Enthalpie 256, 288  
 Entropie 231

Entropiebilanz 243  
 Entropiefluss 234  
 Entropieproduktion 235, 244  
 Entropieungleichung 238  
 Entropieungleichung in lokaler Form regulär  
 244  
 Erhaltung des elektromagnetischen Fluss in  
 Weltensorform 340  
 Erhaltungsgröße 123, 170, 172, 229, 230, 244  
 Erhaltungssatz 123  
 erste Maxwell'sche Gleichung regulär 299  
 erste Maxwell'sche Gleichung singular 300  
 1. Hauptsatz der Thermodynamik 230  
 erstes Axiom der Elektrodynamik 305  
 Eshelby tensor 289  
 esu 329  
 Euklidische Tensoren der Elektrodynamik  
 344  
 euklidische Transformation 143, 342  
 euklidischer Raum 5  
 euklidischer Tensor 208  
 euklidischer Vektor 207  
 Eulerbeschleunigung 153, 154  
 Eulerfluid 186  
 Eulerkraft 133  
 Euler-Rodrigues-Formel 31  
 Euler'sche Darstellung des Kontinuums 112  
 Euler'sche materielle Beschreibung 120  
 Exponentialfunktion eines Tensors 28  
 exponentielles Wachstum 166  
 externe Entropieproduktion 289  
 externe Symmetrie 50

## F

Faraday'scher Käfig 363  
 Faraday'sches Induktionsgesetz 302  
 Feld 4  
 Feldgleichung 230  
 Feldgleichungen der Kontinuumsmechanik  
 157  
 Fernwirkung 361  
 fictitious forces 137  
 Finger-Tensor 285  
 Flüssigkeitsreibung 187  
 Forminvarianz 3, 223  
 Fourier'sche Ungleichung 283

Fourier'sches Wärmeleitungsgesetz 237, 249,  
263, 265, 281  
frame of reference 106, 108  
freie Energie 256  
freie Enthalpie 256, 263, 288  
freie Momentendichte 179  
freies Randwertproblem 194  
Führungsbeschleunigung 154  
Führungsgeschwindigkeit 150  
Fundamentalmatrix 90  
Funktionalgleichungen isotroper  
Tensorfunktionen 268

**G**

Galilei'scher Inertialbeobachter 108  
Galilei-Transformationen 343  
Gasdynamik 115  
Gauß-Ostrogradski Integralssatz 84  
Gauß'sches Gesetz der Elektrostatik 319  
Gauß'sches Gesetz für singuläre Punkte 358  
Gauß-System 329  
geführte Bewegung 134  
Gegentensor 8  
gemeinsame Invariante von Tensoren 59  
gemischte Koordinaten 91  
gemischtes Vektorprodukt 6  
Generator 303  
Gesamtdehnung 184  
Gesamtstromdichte 318  
Geschwindigkeit eines Beobachtungspunktes  
299  
Geschwindigkeitsgradient 187  
Gewicht des Welttensors 339  
Gibbs'sche freie Energie 256, 263, 288  
Gibbs'sche Gleichung 234, 277, 281, 286  
Gibbs'sche Gleichung für den  
linear-elastischen Festkörper 262  
Gibbs'sches Kreuz 21  
Gleichgewichtsentropie 262  
Gleichrichter 304  
Gradiententheorien 105  
Gravitationskonstante 361  
Gravitationspotential 361  
Grenzflächen 114

**H**

Hauptinvarianten 26, 41, 59  
Hauptrichtung 41  
Hauptwerte 41  
heat supply 260  
Heating 282  
Heaviside 1  
Heaviside-Lorentz-System 329  
Homogenisierung 110  
Hooke'sches Gesetz 185, 263  
Hypothese des lokalen Gleichgewichts 186,  
233, 236, 246

**I**

ideal gas relation 187  
ideales Gas 187  
Impulsbilanz global 167  
Impulsbilanz lokal in regulären Punkten 167  
Induktionsexperiments 301  
Inertialbeobachter 108, 109  
Inertialsystem 108, 327, 338  
inkompressibel 159  
innere Dissipation 283  
innere Energie 170, 227, 228, 230  
innere Entropie 235  
innere Freiheitsgrade 105  
innere Symmetrie 50  
inneres Skalarprodukt 14  
integrierender Faktor 233, 262  
interne Entropieproduktion 290  
Invarianten eines Tensors 26  
inverser Tensor 25  
invertierbarer Tensor 4. Stufe 54  
irreversibel 237  
Irreversibilität 231  
isotrop 52  
isotrope Funktion 57  
Isotropie 265  
Isotropieprinzip 267

**J**

Jacobian 113  
Jacobideterminante 113

**K**

Kalorik 228  
 Kältefunktion 277  
 Kapazität 363  
 Kapazität des Plattenkondensators 365  
 Kelvin-Planck-Formulierung des  
   2. Hauptsatzes 283  
 Kommutativität 4, 5  
 Kompressibilität 191, 253, 259  
 Kompression 184  
 Kompressionsmodul 263  
 Kontinuitätsgleichung 159  
 Kontinuums-hypothese 105  
 Kontinuumskartoffel 143  
 kontravariante Koordinaten 89  
 Kontrollvolumen 110  
 konvektiver Transport 122  
 Koordinaten 9  
 Koordinatentransformation 132  
 Koppelgrößen 268  
 Koppeltensor 176  
 Koppelzahl 200  
 Kopplungskoeffizient 205  
 Körperpunkt 181  
 kovariante Ableitung 94  
 kovariante Ableitung der kovarianten  
   Koordinate 97  
 kovariante Koordinaten 89  
 Kovarianzprinzip 3  
 Kraft-Fluss Konzept 246  
 Kreuzprodukt 6  
 Kroneckersymbol 9  
 Kugelanteil 188  
 Kugelkondensator 362  
 Kugelkoordinaten 81  
 Kugeltensor 44

**L**

Ladungserhaltung 317  
 Ladungserhaltung in Welttensorform 341  
 Ladungspotential gesamt 318  
 Ladungspotential in polarisierbarer Materie  
   353  
 Ladungsstrompotentialtensor 342  
 Lagrange multipliers 239

Lagrange Multiplikatoren 238  
 Lagrange'sche Beschreibung 120  
 Lagrange'sche Darstellung 183  
 Lagrange'sche Multiplikatoren 266  
 Lagrange'sche Schreibweise 119  
 Lamé-Koeffizienten 71  
 Lamé'sche Elastizitätskonstanten 185, 253  
 Laplace-Operator 77  
 Legendretransformation 263, 288  
 Lenz'sche Regel 301  
 Levi-Civita-Symbol 10  
 Levi-Civita-Tensor 19  
 Lichtgeschwindigkeit 329  
 lineare Elastizitätstheorie 157  
 linearer Abbildungstensor 23  
 linearer Dehnungstensor 184  
 linearer Impuls 177  
 linearer thermischer Ausdehnungskoeffizient  
   185  
 linearer Vektorraum 5  
 linker Spintensor 61  
 linker Winkelgeschwindigkeitstensor 151  
 linker Winkelgeschwindigkeitsvektor 151  
 Linksgradient 167  
 logarithmischer Rotationstensor 35  
 lokale Bilanz 125  
 lokale Bilanz der kinetischen Energie regulär  
   169  
 lokale Bilanz des spezifischen Drehimpulses  
   regulär 171  
 lokale Bilanz für Flußdichten regulär  
   materiell 127  
 lokale Bilanz für Flußdichten regulär  
   räumlich 127  
 lokale Bilanz für Flußdichten singulär  
   materiell 128  
 lokale Bilanz für Flußdichten singulär  
   räumlich 128  
 lokale Bilanz regulär materiell 125  
 lokale Bilanz regulär räumlich 125  
 Lorentz-Boost-Geschwindigkeit 346  
 Lorentzkraft 182, 333  
 Lorentz-Kraftdichte 331  
 Lorentz-Transformationen 345  
 Lorenz-Eichbedingung 361

**M**

magnetische Feldlinien 298  
 magnetische Induktion 298, 305  
 magnetische Monopole 299  
 magnetische Permeabilität des Vakuums 332  
 magnetischer Fluss 299  
 magnetisches Feld 298  
 Makrorotation 196  
 Makrorotationsvektor 196  
 Massenbilanz 158  
 Massenbilanz global 158  
 Massenbilanz integriert 161  
 Massenbilanz lokal in regulären Punkten 158  
 Massenbilanz lokal in singulären Punkten 159  
 Massendichte 161  
 Massenträgheitstensor 176  
 Materialfunktionen 267  
 Materialgesetze 185  
 materielle Schreibweise 119  
 materielle Zeitableitung einer Feldgröße 128  
 materieller Punkt 119  
 materielles Teilchen 119  
 materielles Volumen 119  
 Maxwell-Lorentz-Äther-Beziehung 327  
 Maxwell'scher Verschiebungsstrom 321  
 Metrik 90  
 Metriktensor 91  
 Mikrokontinuum 105  
 mikropolare Kontinua 174  
 mikropolarer Längenskalenparameter 205  
 Mikropolartheorie 105, 290  
 Mikrorotation 196  
 Mikrowinkelgeschwindigkeitsfeld 174  
 Mikrowinkelgeschwindigkeitsvektor 221  
 Minkowski-Magnetisierung 355  
 Mohr'scher Kreis 184  
 moment of momentum 173

**N**

Nabla-Operator 72  
 Nahwirkung 361  
 Nansonformel für Flächen 117  
 Nansonformel für Volumina 113, 117  
 Nansons 1. Formel 112

Nansons 2. Formel 117  
 Navier-Stokes-Gesetz 187, 238, 249, 265, 281  
 Neumann'sche Randbedingung 190, 196  
 Newton'sche Lex Secunda 167  
 Newton'sches Gravitationsgesetz 361  
 Newton'sches Inertialsystem 108  
 Nichtinertialsystem 135  
 Norm eines Vektors 5  
 Normaldehnungen 184  
 Nulltensor 8

**O**

objektiver Tensor 207, 208  
 observer 108  
 offenes Volumen 110  
 Onsager-Casimir'sche  
   Reziprozitätsbeziehungen 247  
 orthogonale Drehung 29  
 orthogonale Gruppe 30  
 orthogonale Transformation 50  
 orthogonaler Tensor 29  
 Orthogonalität von Vektoren 5  
 Orthonormalbasis 9

**P**

Partialmassendichte 165  
 Partialteilchenzahldichte 165  
 perfect gas relation 187  
 phänomenologische Gleichungen 247  
 phänomenologische Koeffizienten 247  
 Pillendosenargument 126  
 Planck'sche Ungleichung 283  
 Plattenkondensator 364  
 Plattenkondensatorspannung 365  
 PMO 268  
 Poissongleichung 62  
 Poissonrelation 149, 151  
 polar 3, 38  
 polare Medien 174, 290  
 polares Zerlegungstheorem 46  
 Positivdefinitheit 5  
 Positivität der Entropieproduktion 232  
 positiv-semidefinite Matrix  
   phänomenologischer Koeffizienten 247  
 Potentialcharakter der inneren Energie 286



Potentialfeld 73  
 primitive Größe 266  
 principle of material frame indifference 239  
 Prinzip der materiellen Objektivität 138, 268  
 Prinzip von d'Alembert 133  
 Prinzips der materiellen Objektivität 349  
 Projektor 37  
 Pseudotensor 339

## Q

quasistatische Prozessführung 186  
 Quellstärke 159

## R

Rangtensor 56  
 räumliche Beschreibung 109  
 räumliche Feldschreibung 112  
 Raum-Zeit-Koordinaten 339  
 Raum-Zeit-Transformation 339  
 Rechenregeln Nabla-Operator 75  
 Rechenregeln zweifache Anwendung des  
 Nabla-Operators 78  
 rechter Cauchy-Green-Tensor 285  
 rechter Spintensor 61  
 rechter Winkelgeschwindigkeitstensor 148  
 rechter Winkelgeschwindigkeitsvektor 61  
 rechter Winkelgeschwindigsvektor 149  
 Rechtsgradient 72  
 reduzierte Bilanz der inneren Energie 285,  
 292  
 reduzierte Energiebilanz 281  
 reduzierte Wärme 235, 246  
 reference placement 110  
 Referenzplatzierung 110, 299  
 Referenztemperatur 185  
 Referenzvolumen 110  
 Reflexionstensor 37  
 Reihen 28  
 Relativbeschleunigung 154  
 relative Permeabilitätszahl 364  
 Relativgeschwindigkeit 150  
 Relativitätsprinzip 144  
 repräsentatives Volumenelement 104, 110  
 Restungleichung 263, 265, 274, 290  
 reversibel 237

reziproke Basis 87  
 Rotation 73  
 rotationsfreies Vektorfeld 73  
 Rotationstensor 30, 31  
 Rotor in Zylinderkoordinaten 176

## S

Satz von Cauchy 166  
 Sätze über isotrope Tensorfunktionen 58  
 Scheinkraft 133, 137, 338  
 Scherdehnung 184  
 Scherviskosität 188, 237  
 Schiefheit 197  
 Schockfront 114  
 Schubmodul 253  
 semiinverser Ansatz 189, 192, 195  
 singuläre Fläche 124  
 singulärer Tensor 24  
 Skalar 4  
 Skalarmultiplikation 5  
 Skalarpotential elektrisches Feld 361  
 solenoides Vektorfeld 78  
 Spannung mechanisch 8  
 Spannungspotential 262  
 Spannungstensor 8  
 Spannungsvektor 7, 167  
 spatial description 109, 112  
 Spatprodukt 6  
 Spatproduktregel 6  
 Spektraldarstellung 42  
 spezifische Wärme 228  
 Spiegelungstensor 37  
 Spin 172, 173, 221  
 Spintensor 61, 73  
 Sprungbilanz Ampère-Øersted-Gesetz 359  
 Sprungbilanz für das Induktionsgesetz 359  
 Sprungbilanz für das totale Ladungspotential  
 358  
 Sprungbilanz Ladungsfluss 358  
 Sprungklammer 115  
 Spur eines Tensors zweiter Stufe 20  
 starke Elliptizität 253  
 Starrkörperrotationen 183  
 Starrkörpertranslation 183  
 Steifigkeitsmatrix 251  
 Steifigkeitstensor 53

Steifigkeitstetrade 251  
 Strahlungsterm 229  
 stress power 282  
 Stromlinie 194  
 Strompotential gesamt 318  
 Strompotential in Materie 354  
 substantielle Zeitableitung 128  
 Symmetriegruppe 51  
 Symmetriegruppe der Tensorfunktion 57  
 symmetrischer Tensor 12

## T

Tangentialkraft 133  
 Teilchenzahlbilanzen lokal 164  
 Temperatur 228  
 Tensor 0. Stufe 4  
 Tensor 1. Stufe 4  
 Tensor 2. Stufe 8  
 Tensor, anschauliches Beispiel 7  
 Tensorbasis 9  
 Tensorbasis für transversal isotrope Tensoren 55  
 Tensorexponential 28  
 Tensorfeld 70  
 Tensorfunktion 56  
 Tensorinvariante 59  
 Tensormultiplikation 8  
 Tensornorm 28  
 Tensorprodukt 9  
 Tetrade 9  
 thermische Dehnungen 185  
 thermische Zustandsgleichung 186, 265  
 Thermodynamik irreversibler Prozesse 236, 244  
 thermodynamische Stabilitätsbedingungen 259  
 thermodynamischer Zustandsraum 260  
 thermoelastischer Festkörper bei kleinen Deformationen 260  
 TIP 236, 244  
 totale Dehnung 184  
 totale Zeitableitung 111  
 totale Zeitableitung in Euler'schen Gitterkoordinaten 128  
 totale Zeitableitung materielle Schreibweise 128

Trägheitsbeschleunigung 343  
 Trägheitskraft 133, 137  
 Trägheitskraft der relativen Translation 138  
 transponierter Tensor 11  
 Transporttheorem für offene Flächen räumlich 117  
 Transporttheorem bei Berücksichtigung der Massenbilanz 163  
 Transporttheorem für volumetrische Größen 113  
 transversal isotroper Tensor 55  
 transversal-isotrop 52  
 Triade 9  
 tripod 106

## U

unimodular 287

## V

Vektor 4  
 Vektoraddition 4  
 Vektorbasis 107  
 vektorielle Multiplikation 6  
 Vektorinvariante des Tensors 21  
 Vektorkoordinaten 9  
 Vektorpotential elektromagnetisches Feld 361  
 verallgemeinerte Orthogonalität 42  
 Verdichtungsstöße 114  
 Verschiebungsvektor 183  
 Viskositätskoeffizienten 187  
 vollständige orthogonale Gruppe 30  
 Volt 304  
 Voltmeter 363  
 Volumenviskosität 188, 237  
 volumetrische Felder 111  
 vorticity 175

## W

Wärmeenergie 170, 227  
 Wärmeflussvektor 228  
 Wärmeleitfähigkeit 237  
 Wärmeleitfähigkeitstensor 247, 249  
 Wechselspannung 304

Winkelgeschwindigkeitstensor [148](#)  
Winkelgeschwindigkeitsvektor [61](#)  
Wirbelstärke [175](#)  
Wirbelstärkevektor [201](#)  
Wirbelvektor [73](#)  
Wirkungsgrad [283](#)  
Working [282](#)  
wryness [197](#)

**Z**

Zentrifugalbeschleunigung [154](#)  
Zentrifugalkraft [133](#)  
Zentripetalbeschleunigung [131](#)  
Ziel der Kontinuumsmechanik [157](#)  
Zirkulation eines Vektors [86](#)  
Zufuhrterm [169](#), [171](#)  
Zustandsraum [233](#), [269](#)  
Zustandsvariablen [233](#)  
2. Hauptsatz der Thermodynamik [231](#), [236](#),  
[243](#), [244](#)  
Zylinderkoordinaten [79](#)