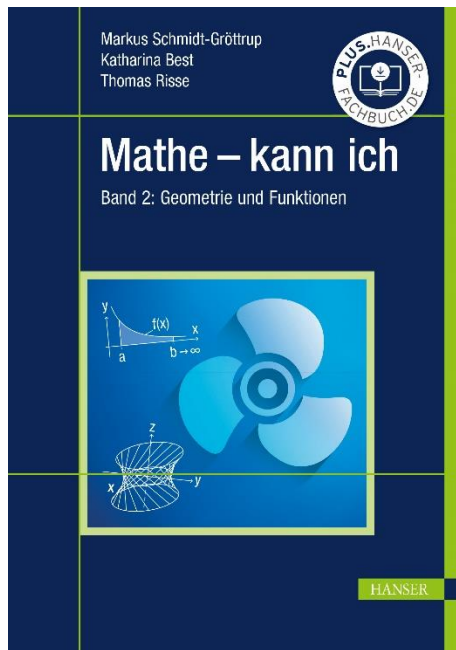


# HANSER



## Leseprobe

zu

## Mathe - kann ich (Band 2)

von Markus Schmidt-Gröttrup, Katharina Best und  
Thomas Risse

Print-ISBN: 978-3-446-47469-7

E-Book-ISBN: 978-3-446-47475-8

Weitere Informationen und Bestellungen unter

<https://www.hanser-kundencenter.de/fachbuch/artikel/9783446474697>

sowie im Buchhandel

© Carl Hanser Verlag, München

# *Inhaltsverzeichnis*

<i>Vorwort</i>	<i>7</i>
<i>15 Geometrie</i>	<i>9</i>
<i>16 Trigonometrie</i>	<i>35</i>
<i>17 Geometrie in Koordinatensystemen</i>	<i>52</i>
<i>18 Trigonometrische Funktionen und ihre Anwendungen</i>	<i>73</i>
<i>19 Trigonometrische Beziehungen</i>	<i>87</i>
<i>20 Daten visualisieren und zusammenfassen</i>	<i>97</i>
<i>21 Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung</i>	<i>109</i>
<i>22 Hyperbolische Funktionen</i>	<i>117</i>
<i>23 Gebrochen rationale Funktionen</i>	<i>132</i>
<i>24 Komplexe Zahlen</i>	<i>142</i>
<i>25 Funktionen – weitere Eigenschaften</i>	<i>156</i>
<i>26 Stetigkeit und Differenzierbarkeit</i>	<i>172</i>
<i>27 Folgen und Reihen</i>	<i>202</i>
<i>28 Methoden der Integration</i>	<i>222</i>
<i>29 Anwendungen der Integration</i>	<i>249</i>
<i>30 Nichtlineare Gleichungen lösen</i>	<i>261</i>
<i>Integraltafel</i>	<i>282</i>
<i>Literaturverzeichnis</i>	<i>284</i>
<i>Index</i>	<i>285</i>

# Vorwort

## Selbstgesteuertes Lernen mit Aufgaben zum SEFI-Curriculum

Dem Buch *Mathe – kann ich, Band 1* liegt die Idee zugrunde, sich mathematische Grundlagen entlang des SEFI-Curriculums in Alpers (2014) selbstgesteuert anzueignen. Die positiven Rückmeldungen zu Band 1 bestärken uns, dieses Projekt fortzusetzen. Studierende haben die Struktur der Kapitel von Band 1 als besonders hilfreich beurteilt. Sie besteht aus Einleitung zum Thema, Kann-Liste zu den Lernzielen, Aufgaben und Lösungen, und bleibt daher unverändert bestehen. Kann-Listen enthalten zum Lernziel Referenzen auf Lerneinheiten, die hier jeweils Aufgaben sind. Der Spaltentitel in den Kann-Listen heißt daher jetzt einfach „Aufgabe“. Band 2 setzt die Kapitelnummerierung von Band 1 fort. Da die Bearbeitungsdauern für einzelne Aufgaben individuell sehr verschieden sind, gibt es in diesem Band nur Vielfache von 5 Minuten als Zeitangabe zur ungefähren Orientierung.

B. Alpers. *A Framework for Mathematics Curricula in Engineering Education*. European Society for Engineering Education (SEFI), 3. Auflage, 2014

## Von Core Zero zu Core Level 1

Das SEFI-Curriculum ist als Schichten-Modell mit Core Zero als Kern aufgebaut, um den sich die drei Schichten Core Level 1, Level 2 und Level 3 legen. Core Zero enthält Material, das idealerweise schon vor dem Beginn eines ingenieurwissenschaftlichen Studiums erarbeitet wurde. Core Level 1 baut darauf auf und wird als mathematische Grundlage aller Disziplinen aus diesen Studien betrachtet. Level 2 enthält fortgeschrittenes Material, das die Lösung realer technischer Probleme betrifft. Die enthaltenen Themen betreffen nicht mehr jede ingenieurwissenschaftliche Disziplin. Level 3 enthält mathematische Spezialthemen. Jede dieser Schichten führt Themen aus den mathematischen Teilgebieten Algebra, Analysis, Diskrete Mathematik, Geometrie und Statistik auf. Nachdem der Band 1 unserer Reihe die Themen der ersten drei Teilgebiete von Core Zero enthielt, startet dieses Buch jetzt mit Geometrie und Statistik, um ab Kapitel 22 die Themen der Analysis aus Core Level 1 aufzunehmen. Diese setzen inhaltlich die Themen von Band 1 fort. Tabelle 1 zeigt die jeweiligen Fortsetzungen.

Trotz dieser inhaltlichen Fortsetzung haben wir versucht, die Kapitel selbsterklärend zu machen. Daher gibt es mitunter Wiederholungen und

Tabelle 1: Fortsetzung der Kapitel aus Band 1 in Band 2

Thema	Kapitel	
	Band 1	Band 2
Funktionen	4, 5, 7	22, 23, 25
Folgen	6	27
Differentiation	8, 9	26
Integration	10, 11	28, 29
Komplexe Z.	12	24

Aufgaben, die Lernziele der ersten Kapitel aufgreifen. Nicht zu übersehen ist aber, dass der Stoff ab Kapitel 22 anspruchsvoller wird. Das zeigt sich auch an Themen wie der Algorithmik zum näherungsweisen Lösen nicht-linearer Gleichungen.

### *Auswahl und Themenfolge*

Zielgruppen und der Aufbau von Lehrveranstaltungen sind so verschieden, dass die Lernziele des SEFI-Curriculums nicht sequentiell abzuarbeiten sind, sondern Auswahl und Themenfolge dem jeweiligen Bedarf angepasst werden. So wird den Bedürfnissen der Studierenden am ehesten entsprochen: mit der Fokussierung auf den Lernprozess, mit der Rückmeldung zum Lernerfolg und mit der erwünschten Selbststeuerung.

An wenigen Stellen haben wir Lernziele des SEFI-Curriculums ergänzt und auch ausgelassen. So sind Anwendungen rationaler Funktion oder komplexer Zahlen aus unserer Sicht wichtig, während uns die reziproken Funktionen hyperbolischer Funktionen verzichtbar erscheinen. Von uns ergänzte Lernziele sind mit einem Stern markiert. Die Reihenfolge der Themen bleibt die des Curriculums, woraus sich gelegentlich Verweise auf spätere Kapitel ergeben.

Wenn die vorliegenden Bände als Wegweiser, als Motivator, als Orientierung, als Begleitlektüre oder als Nachschlagewerk dienen, können wir Autoren zufrieden sein.

### *Zusatzmaterial*

Kannlisten zum Abhaken finden Sie wieder als separate Dateien auf [plus.hanserfachbuch.de](http://plus.hanserfachbuch.de). So können Sie diese wiederholt, zum ersten Lernen, zur Vorbereitung auf Klausuren oder zur Wiederholung aktiv verwenden. Viele Aufgaben können mit Hilfe von Software gelöst und vertieft werden. Code in gängigen mathematischen Software-Programmen zu einigen Aufgaben finden Sie ebenfalls online.

Den Zugangscode finden Sie auf Seite 1.

### *Dank*

Ein besonderer Dank geht an Studierenden des Studiengangs Wirtschaftsinformatik am Campus Lingen, die mit ihren Antworten in der Befragung zur Nutzung von Band 1 wichtige Hinweise für die Weiterentwicklung und einen ordentlichen Motivationsschub gegeben haben. Die konstruktive Zusammenarbeit mit unserer Lektorin Frau Silakova macht immer Freude. Wir sind froh, trotz Corona, verschiedener Krankheiten und familiärer Krisen sowie langer Diskussionen um Inhalte und Form endlich fertig mit diesem Band zu sein. Hoffentlich trägt er dazu bei, dass viele Lernende sagen können: „Mathe – kann ich“.

Bremen, Naumburg (Saale), August 2023

Markus Schmidt-Gröttrup, Thomas Risse, Katharina Best

# 15

## Geometrie

### 15.1 Einleitung

Die Geometrie, ursprünglich die Kunst der Erdvermessung, befasst sich mit der Lehre von Objekten in der Ebene und im Raum und ihren Beziehungen zueinander. In diesem Kapitel werden Punkte und Geraden, Längen und Winkel, Dreiecke und Polygone sowie Kreise vorgestellt. Weiterhin werden dreidimensionale Körper und ihre Projektionen in die Ebene betrachtet. Für eine weitführende Darstellung zur Geometrie und ihren Anwendungen in den Ingenieurwissenschaften wird in Bär (2001) empfohlen.

G. Bär. *Geometrie*. Vieweg+Teubner Verlag, Wiesbaden, 2. Auflage, 2001

#### 15.1.1 Punkte, Geraden und Längen

Ein Punkt ist ein Objekt ohne Ausdehnung. Gezeichnet wird mit kleiner, gerade noch sichtbarer Ausdehnung oder als Schnittpunkt zweier Linien.

Eine *Gerade*  $g$  ist eine gerade, in beide Richtungen unendliche Linie. Sie ist durch zwei Punkte definiert. Werden diese verbunden, entsteht eine *Strecke*. Die Strecke zwischen den Punkten  $A$  und  $B$  wird mit  $\overline{AB}$  bezeichnet und ihre Länge mit  $|\overline{AB}|$ . Wird die Linie über einen Punkt hinaus verlängert, entsteht ein *Strahl* in die Richtung und es wird von einer *Halbgeraden* gesprochen.

Winkel werden meistens mit griechischen Buchstaben bezeichnet, meist mit  $\alpha, \beta, \gamma$  und  $\delta$  sowie bei Bedarf mit weiteren Buchstaben.

#### 15.1.2 Winkel

Zwei Halbgeraden mit dem selben Anfangspunkt begrenzen einen *Winkel*, die Halbgeraden werden als *Schenkel* bezeichnet. Der Winkel ist definiert durch eine Drehung gegen den Uhrzeigersinn des einen Schenkels zum anderen. Auf diese Weise werden die zwei Winkel bezüglich der zwei Schenkel unterschieden, siehe Bild 15.1.

Die beiden Winkel in Bild 15.1 drehen den Schenkel einmal vollständig auf sich selbst. Eine solche Volldrehung wird auch als  $360^\circ$ -Drehung bezeichnet, ein Winkel von  $360^\circ$  als *Vollwinkel*. Entsprechend ist eine halbe Drehung  $180^\circ$  und der zugehörige Winkel ein *gestreckter Winkel* sowie eine Vierteldrehung  $90^\circ$  und der zugehörige Winkel ein *rechter Winkel*.

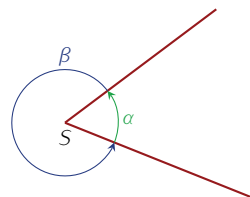


Bild 15.1: Zwei Halbgeraden mit dem Anfangspunkt  $S$  definieren den Winkel  $\alpha$  und den Winkel  $\beta = 360^\circ - \alpha$ . Als Innenwinkel wird der Winkel  $\leq 180^\circ$  bezeichnet. Der andere Winkel wird Außenwinkel genannt.

Tabelle 15.1: Einordnung von Winkeln.

Winkelname	Wertebereich
Nullwinkel	$0^\circ$
Spitzer Winkel	$(0^\circ, 90^\circ)$
Rechter Winkel	$90^\circ$
Stumpfer W.	$(90^\circ, 180^\circ)$
Gestreckter W.	$180^\circ$
Überstumpfer W.	$(180^\circ, 360^\circ)$
Vollwinkel	$360^\circ$

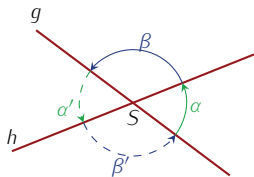
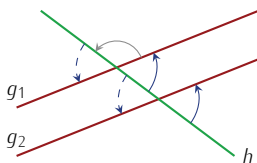
Bild 15.2: Zwei Geraden  $g$  und  $h$  schneiden sich im Schnittpunkt  $S$  mit dem Schnittwinkel  $\alpha$  und dem Nebenwinkel  $\beta$ .

Bild 15.3: Eine Gerade schneidet zwei parallele Geraden. Die blauen Winkel sind nur verschoben (Stufenwinkel) und identisch. Auch die blau gestrichelten Winkel (Wechselwinkel) sind mit diesen identisch.

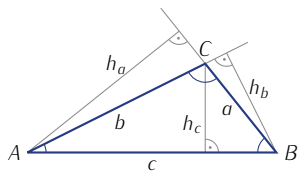
Bild 15.4: Dreieck mit den Seiten  $a, b, c$ , seinen Winkeln und den Höhen  $h_a, h_b$  und  $h_c$ . Zu sehen ist, dass bei den Höhen von Nachbarseiten eines stumpfen Winkels der Höhenfußpunkt außerhalb des Dreiecks liegt, hier bei  $h_a$  und  $h_b$ .

Tabelle 15.2: Flächeninhalte der speziellen Dreiecke mit den Notationen aus Bild 15.5.

Dreieck	Flächeninhalt
rechtwinklig	$\frac{1}{2}ab$
gleichschenlig	$\frac{1}{4}c\sqrt{4a^2 - c^2}$
gleichseitig	$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

Der rechte Winkel wird mit einem Punkt markiert. Diese Größenzuordnung wird in Tabelle 15.1 zusammengefasst.

Die Angabe der Winkel in der Einheit  $1^\circ$ , wie oben verwendet, wird *Gradmaß* genannt.

Zwei Geraden in einer Ebene schneiden sich entweder in einem *Schnittpunkt* oder sie sind *parallel*. Falls sie sich schneiden, entstehen ein Schnittpunkt sowie vier Winkel, siehe Bild 15.2. Da sich  $\alpha$  und  $\beta$  zu einem gestreckten Winkel addieren, sind der dritte und der vierte Winkel wieder genauso groß wie  $\alpha$  bzw.  $\beta$ . Diese Art der Argumentation lässt sich auf viele Schnittpunktkonstellationen anwenden.

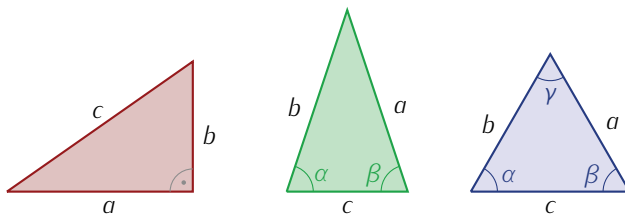
**Beispiel.** In Bild 15.3 schneidet eine dritte Gerade  $h$  die zwei parallelen Geraden  $g_1$  und  $g_2$ . Welche Winkel sind identisch?

Da  $g_2$  gegenüber  $g_1$  nur verschoben ist, sind die zwei blauen Winkel, die sich im Schnitt mit  $h$  ergeben, identisch. Außerdem sind sie auch mit den blau gestrichelten Winkeln identisch, da der blaue mit dem grauen Winkel sich zu  $180^\circ$  Grad ergänzen, genauso wie der blau gestrichelte mit dem grauen.

### 15.1.3 Dreiecke und Polygone

Ein *Dreieck* besteht aus drei Punkten, die nicht auf einer Geraden liegen und ihren Verbindungsstrecken. Die den *Seiten*  $a, b, c$  gegenüberliegenden Winkel werden mit  $\alpha, \beta, \gamma$  bezeichnet (Bild 15.4). Mit  $h_a, h_b, h_c$  werden die *Höhen* des Dreiecks über den Seiten  $a, b, c$  bezeichnet. Eine Höhe steht auf der zugehörigen Seite senkrecht.

Ein Dreieck mit einem rechten Winkel wie im Bild 15.5 wird *rechtwinkliges Dreieck* genannt. Ein Dreieck heißt *spitzwinklig*, wenn sein größter Winkel kleiner als  $90^\circ$  ist. Es heißt *stumpfwinklig*, wenn er größer als  $90^\circ$  ist. Sind zwei der drei Seiten gleich lang, heißt ein Dreieck *gleichschenlig*; sind alle drei Seiten gleich lang, so heißt es *gleichseitig*.

Bild 15.5: Das linke Dreieck ist ein *rechtwinkliges* Dreieck. Der rechte Winkel ist mit einem Punkt markiert. Das mittlere Dreieck ist *gleichschenlig*, es gilt  $a = b$  und  $\alpha = \beta$ . Das rechte Dreieck ist *gleichseitig*, d.h.  $a = b = c$  und  $\alpha = \beta = \gamma$ .

Bei Dreiecken sind der *Flächeninhalt*  $A$  und der *Umfang*  $U$  interessant. Der Umfang eines Dreiecks ist die Summe seiner Seitenlängen,

$$U = a + b + c.$$

Für den Flächeninhalt gilt

$$A = \frac{1}{2}gh,$$

wobei  $g$  die Seitenlänge einer Seite ist und  $h$  die zugehörige Höhe des Dreiecks, siehe Bild 15.7. Die Flächeninhalte spezieller Dreiecke sind in Tabelle 15.2 zusammengestellt.

Die Summe der drei Winkel eines Dreiecks beträgt  $180^\circ$ , siehe Bild 15.6. Damit lässt sich aus zwei Winkeln immer der dritte ausrechnen.

Für rechtwinklige Dreiecke gilt der *Satz des Pythagoras*

$$a^2 + b^2 = c^2,$$

wobei  $a$  und  $b$  die *Katheten* und  $c$  die *Hypotenuse* des Dreiecks sind. Wieso das gilt, ist im Bild 15.8 gezeigt. Aus zwei bekannten Seitenlängen lässt sich die dritte zu berechnen.

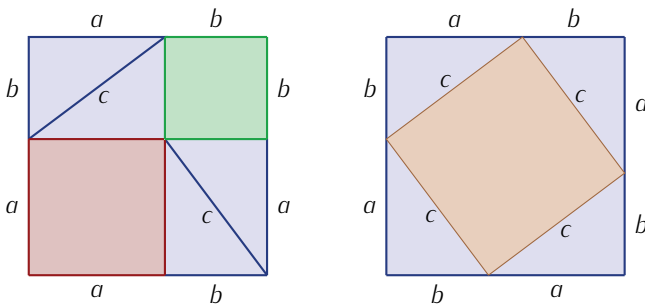


Bild 15.8: Der Satz des Pythagoras: Im linken Bild ist  $a^2$  (rot) +  $b^2$  (grün) +  $4 \cdot A_D$  (blau), im rechten Bild ist auf der selben Fläche  $c^2$  (gelb) +  $4 \cdot A_D$  (blau).

Zwei Dreiecke heißen *kongruent*, wenn sie durch eine Verschiebung, Drehung oder Spiegelung oder eine geeignete Aneinanderreihung dieser Operationen ineinander überführt werden können. Die Seitenlängen des einen Dreiecks finden sich auch im zweiten Dreieck, genauso wie die drei Winkel in beiden Dreiecken gleich groß sind. Zur Überprüfung der Kongruenz muss eine der folgenden Aussagen nachgewiesen werden:

**sss:** Die Längen der drei Seiten stimmen überein.

**sws:** Zwei Seitenlängen stimmen überein sowie der eingeschlossene Winkel.

**ssw:** Zwei Seitenlängen stimmen überein sowie der Winkel, der der längeren Seite gegenüberliegt.

**wsw:** Eine Seitenlänge stimmt überein sowie die an dieser Seite anliegenden Winkel.

**wws:** Eine Seitenlänge stimmt überein sowie ein dieser Seite anliegende und der dieser Seite gegenüberliegende Winkel.

In diesem Fall sind die Dreiecke kongruent und alle Aussagen erfüllt.

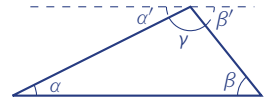


Bild 15.6: Im obigen Dreieck ergänzen sich der Winkel  $\gamma$ , der Wechselwinkel  $\beta'$  zu  $\beta$  und der Wechselwinkel  $\alpha'$  zu  $\alpha$  zu  $180^\circ$  an der gestrichelten Geraden.

Vgl. dazu Band 1, Kapitel 13

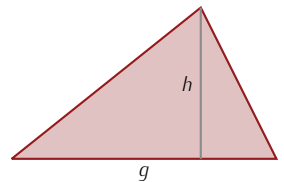


Bild 15.7: Zur Berechnung des Flächeninhalts eines Dreiecks wird eine Seite  $g$ , Grundseite genannt, und die zugehörige Höhe  $h$  benötigt.

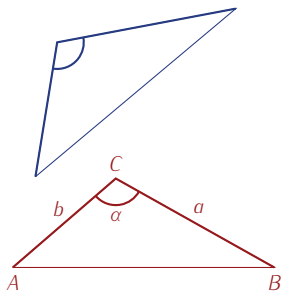


Bild 15.9: Das rote und das blaue Dreieck sind kongruent.

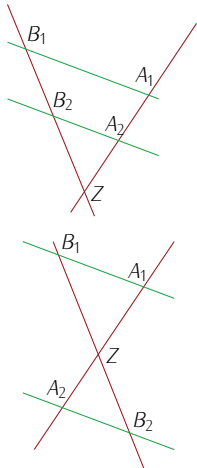


Bild 15.10: Zwei Geraden (rot) schneiden sich im Zentrum  $Z$ . Die zwei parallelen Geraden (grün) können auf der gleichen Seite (oben) oder verschiedenen Seiten von  $Z$  liegen.

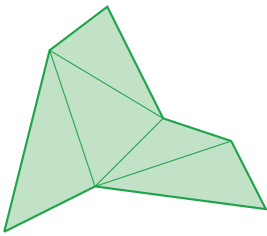


Bild 15.11: Ein 7-Eck mit Aufteilung in fünf Dreiecke.

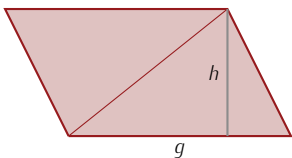


Bild 15.12: Das Parallelogramm wird in zwei kongruente Dreiecke aufgeteilt. Die Höhe  $h$  des Dreiecks ist auch die des Parallelogramms.

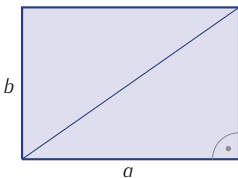


Bild 15.13: Ein Rechteck aus zwei kongruenten rechtwinkligen Dreiecken.

**Beispiel.** In Bild 15.9 sind im roten Dreieck die Seiten  $a, b$  und der Winkel  $\alpha$  hervorgehoben, also zwei Seiten und der dazwischenliegende Winkel. Damit kommt die sws-Version der Kongruenzsätze zum Vergleich in Frage. Die entsprechenden Seiten und Winkel sind im blauen Dreieck hervorgehoben. Sie stimmen überein und damit sind die Dreiecke kongruent.

Bei *ähnlichen Dreiecken* müssen nicht die Längen übereinstimmen, sondern nur die Winkelgrößen. Eine wichtige Anwendung hierbei ergibt sich aus dem *Strahlensatz*. Zwei sich schneidende Geraden werden von zwei parallelen Geraden gekreuzt, siehe Bild 15.10.

Über die Verhältnisse der resultierenden Längen in den Dreiecken  $\triangle(ZA_1B_1)$  und  $\triangle(ZA_2B_2)$  gilt:

$$\frac{|ZA_1|}{|ZA_2|} = \frac{|ZB_1|}{|ZB_2|} = \frac{|A_1B_1|}{|A_2B_2|}$$

Ein *Polygon* ist ein allgemeines Vieleck und entsteht durch einen geschlossenen Streckenzug durch  $n$  Punkte, also eine Verkettung von Strecken, wo der Endpunkt der einen der Anfangspunkt der anderen Strecke ist und außerdem der Anfangspunkt der ersten Strecke mit dem Endpunkt der letzten Strecke zusammenfällt. Falls sich die daraus resultierenden Seiten nicht kreuzen, lässt sich ein Polygon triangulieren, d.h. in Dreiecke aufteilen. Bild 15.11 zeigt, wie ein Polygon mit  $n$  Ecken in  $n - 2$  Dreiecke aufgeteilt werden kann. Aus den Winkelsummen der Dreiecke ergibt sich, dass die Winkelsumme des Polygons mit  $n$  Ecken  $(n - 2) \cdot 180^\circ$  ist.

**Beispiel.** Welche Summe haben die Winkel eines Siebenecks?

Ein Siebeneck wie z.B. in Bild 15.11 lässt sich in fünf Dreiecke aufteilen, damit ergibt sich  $5 \cdot 180^\circ = 900^\circ$  als Winkelsumme.

Ein besonderes Polygon ist das *Viereck*, das sich in zwei Dreiecke teilen lässt. Die Winkelsumme im Viereck beträgt deswegen  $360^\circ$ . Aus den zwei Dreiecken lässt sich der Flächeninhalt bestimmen.

Bei einem *Parallelogramm* sind je zwei der Seiten parallel. Das Parallelogramm lässt sich damit in zwei kongruente Dreiecke zerlegen, wie in Bild 15.12 gezeigt, und damit beträgt der Flächeninhalt

$$A_p = 2A_D = 2 \cdot \frac{1}{2} gh = gh.$$

Ein spezieller Fall eines Parallelogramm ist das *Rechteck*. Dabei stehen die Seiten aufeinander senkrecht. Die Zerlegung ergibt dann zwei rechtwinklige Dreiecke und der Flächeninhalt vereinfacht sich zu  $A_R = a b$ , wenn  $a$  und  $b$  die Seitenlängen sind, siehe Bild 15.13.



### 15.1.4 Kreise

Ein *Kreis* ist durch einen Punkt  $M$ , den *Mittelpunkt* und einen *Radius*  $r$  gegeben als die Menge aller Punkte  $X$  einer Ebene, für die gilt:

$$|\overline{MX}| = r,$$

siehe Bild 15.14. Das Innere des Kreises heißt *Kreisfläche* oder *Kreis-scheibe*. Die Fläche  $A_K$  und der Umfang  $U_K$  des Kreises lassen sich mittels der *Kreiszahl*  $\pi$  aus dem Radius  $r$  berechnen als

$$\begin{aligned} A_K &= \pi r^2 \\ U_K &= 2\pi r \end{aligned}$$

Zwei Strahlen, ausgehend vom Mittelpunkt eines Kreises schneiden den Kreis in zwei Teile. Ein von den Strahlen begrenzte Teil des Kreises heißt *Kreisbogen*, die von den Strahlen und dem Kreis begrenzte Fläche heißt *Kreis-sektor*. Die zwei Schnittpunkte des Kreises mit den beiden Strahlen lassen sich zur *Kreissehne verbinden*, die durch Kreissehne und Kreis begrenzte Fläche ist das *Kreis-segment*. Deren Länge bzw. Flächeninhalt lässt sich aus dem Radius und dem Winkel errechnen.

Die Länge des Kreisbogens und der Flächeninhalt des Kreissektor lassen sich aus Radius und Winkel berechnen. Dabei entsprechen die Länge  $L_B$  des Kreisbogens und der Flächeninhalt  $A_S$  des Kreissektors dem gleichen Anteil am Umfang bzw. am Flächeninhalt des Kreises wie der eingeschlossene Winkel  $\alpha$  am Vollwinkel. Ist  $\alpha$  im Gradmaß gegeben, gilt

$$\begin{aligned} L_B &= \frac{\alpha}{360^\circ} U_K = \frac{\alpha}{360^\circ} 2\pi r \\ A_S &= \frac{\alpha}{360^\circ} A_K = \frac{\alpha}{360^\circ} \pi r^2. \end{aligned}$$

### 15.1.5 Bogenmaß

Aus der Längenformel des Kreisbogens ergibt sich das *Bogenmaß* als alternative Maßeinheit für Winkel. Dabei wird der Winkel als Länge des Bogens des *Einheitskreises*, das ist der Kreis mit Radius 1, angegeben. Dessen Umfang ist  $2\pi$ . Dies entspricht dem Bogenmaß des Vollwinkels. Die Einheit wird *Radian* genannt und als 1 rad geschrieben. Dann gilt für das Verhältnis von Bogenmaß  $x$  und Gradmaß  $y$  eines Winkels das Verhältnis

$$\frac{x}{y} = \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{2\pi}{360^\circ}.$$

### 15.1.6 In die dritte Dimension

Die wichtigsten Konzepte in der dreidimensionalen Geometrie sind Körper und ihre Lage und Orientierung im Raum. Bei den Körpern selbst interessieren Oberflächen und Volumina. Es gibt verschiedene Arten von Körpern, z.B. Würfel, Kugeln, Zylinder und Pyramiden.

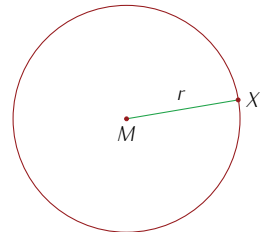


Bild 15.14: Ein Kreis, gegeben durch Mittelpunkt  $M$  und Radius  $r$ .

Das Kreis-segment lässt sich erst unter Nutzung der trigonometrischen Funktionen aus Kapitel 19 berechnen.

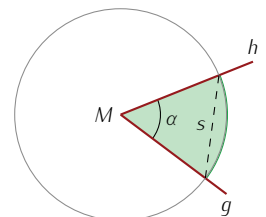


Bild 15.15: Zwei Strahlen  $g$  und  $h$  gehen vom Mittelpunkt  $M$  eines Kreises aus. Grün sind der Kreissektor und der Kreisbogen zu sehen. Die Sehne  $s$  ist schwarz gestrichelt, das Kreis-segment ist der rechts der Sehne liegende Teil des Segmentes.

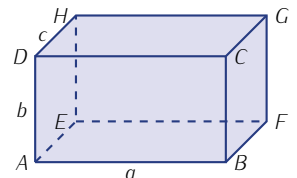


Bild 15.16: Ein Quader. Die Rechtecke  $ABCD$  und  $EFGH$  sowie  $AEHD$  und  $BFGC$  und auch  $ABFE$  und  $DCGH$  sind jeweils gleich groß.

Der rechnerisch einfachste Körper ist der *Quader*. Er ist von sechs Rechtecken begrenzt, diejenigen auf gegenüberliegenden Seiten sind jeweils kongruent. Der Flächeninhalt der Oberfläche ist somit die Summe der Flächeninhalte der sechs Rechtecke. Mit den Seitenlängen  $a$ ,  $b$  und  $c$  (wie in Bild 15.16) ergibt sich

$$A_{\text{Quader}} = 2ab + 2ac + 2bc = 2(ab + ac + bc),$$

das Volumen ist das Produkt aus einer Grundfläche, also dem Produkt von zwei der drei Seitenlängen, und der Höhe, also der dritten Seitenlänge:

$$V_{\text{Quader}} = abc.$$

Ein besonderer Quader ist der Würfel, siehe Bild 15.17. Hier sind alle sechs Seiten kongruente Quadrate. Wenn  $s$  deren Seitenlänge ist, vereinfachen sich die obigen Formeln zu

$$A_{\text{Würfel}} = 6s^2 \quad \text{und} \quad V_{\text{Würfel}} = s^3.$$

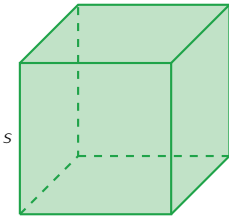


Bild 15.17: Ein Würfel mit der Seitenlänge  $s$ .

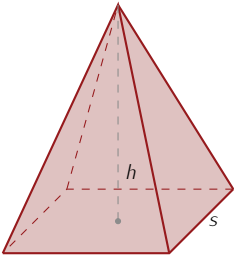


Bild 15.18: Eine gerade Pyramide mit einer quadratischen Grundfläche mit der Seitenlänge  $s$  und vier gleichen Seiten, mit der Höhe  $h$ . Die Spitze liegt mittig oberhalb des Quadrats.

Eine *Pyramide* ist ein dreidimensionaler Körper mit einem Polygon als Grundfläche und Dreiecken, deren eine Seite jeweils eine Kante des Polygons ist, während die anderen Seiten jeweils durch die Verbindungslinien zu einem gemeinsamen Punkt, der *Spitze*, gebildet werden. Der wichtigste Spezialfall ergibt sich, wenn das Grundflächenpolygon regelmäßig ist und die Spitze oberhalb von dessen Mittelpunkt liegt. In diesem Fall sind Dreiecke kongruent und die Pyramide wird *gerade Pyramide* genannt.

Das Volumen einer Pyramide ergibt sich aus der Grundfläche  $A_G$  und der Höhe  $h$  als

$$V_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{3} A_G h,$$

bei einer Pyramide mit einer quadratischen Grundfläche, siehe Bild 15.18 ergibt sich das Volumen dann als  $V_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{3} s^2 h$ . Für das Volumen der Pyramide mit einem gleichseitigen Dreieck mit Seitenlänge  $a$  als Grundfläche (Bild 15.19) gilt entsprechend  $V_{\text{Pyramide}} = \frac{\sqrt{3}}{12} a^2 h$ .

Sind dabei die Seitendreiecke zum Dreieck der Grundfläche kongruent, heißt die Pyramide *Tetraeder*.

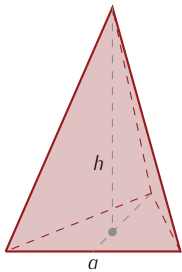


Bild 15.19: Eine gerade Pyramide mit einem gleichseitigen Dreieck als Grundfläche. Die Seitenlänge des Dreiecks ist  $a$  und die Höhe der Pyramide ist  $h$ . Die Spitze liegt mittig oberhalb der Grundfläche, so dass die Seitenflächen der Pyramide kongruente gleichschenklige Dreiecke sind.

Mit einem Kreis statt eines Polygons als Grundfläche entsteht ein *Kegel*. Liegt die Spitze oberhalb des Kreismittelpunkts, so wird von einem *geraden Kegel* gesprochen, andernfalls von einem *schiefen Kegel*. Die Berechnung lässt sich genauso übertragen, das Volumen eines Kegels berechnet sich als  $V_{\text{Kegel}} = \frac{1}{3} \pi r^2 h$ . Wird die Seite aufgeschnitten, entsteht ein Kreissektor. Dieser heißt *Mantel*. Der Kreis hat den Radius  $s$ , die Länge der Schnittlinie. Mit dem Satz des Pythagoras ist  $s = \sqrt{r^2 + h^2}$ . Der Kreisbogen ist gerade der Umfang der kreisförmigen Grundfläche, als  $2\pi r$ . Damit gilt für den Winkel  $\alpha$  des Sektors  $\frac{\alpha}{360^\circ} = \frac{2\pi r}{2\pi s} = \frac{r}{s}$ , und weiter

$$A_{\text{Mantel}} = \frac{\alpha}{360^\circ} \pi s^2 = \frac{r}{s} \pi s^2 = \pi r s.$$

Die gesamte Oberfläche besteht neben dem Mantel noch aus der Grundkreisfläche (Boden des Kegels).

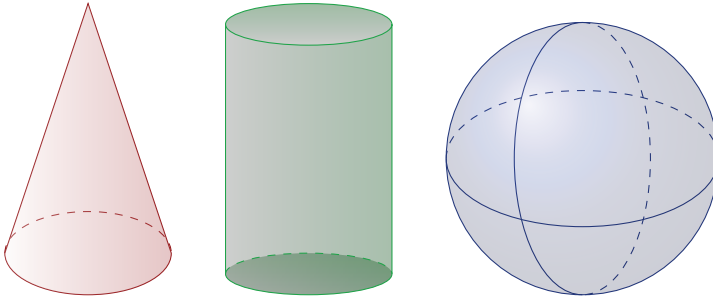


Bild 15.20: Links ein **Kegel**, in der Mitte ein **Zylinder** und rechts eine **Kugel**.

Ein *Zylinder* hat ebenfalls eine kreisförmige Grundfläche sowie eine dazu senkrecht stehende Seitenfläche, als *Mantel* bezeichnet. Nach oben wird der Zylinder von einem zweiten, zum ersten kongruenten und parallelen Kreis begrenzt. Die Höhe des Zylinders  $h$  ist die Entfernung zwischen den beiden Grundflächen. Das Volumen ist dann

$$V_{\text{Zylinder}} = \pi r^2 h.$$

Der Flächeninhalt des Mantels ist  $A_{\text{Mantel}} = 2\pi r h$ . Die gesamte Oberfläche des Zylinders ist

$$A_{\text{Zylinder}} = 2\pi r h + 2\pi r^2 = 2\pi r(r + h),$$

da neben dem Mantel noch die beiden Kreisflächen dazu gehören.

Analog zum Kreis ist die *Kugel* gegeben durch einen Mittelpunkt  $M$  und einen Radius  $r$  als die Menge aller Punkte  $X$  im Raum, für die gilt

$$|\overline{MX}| = r.$$

Für das Volumen und den Flächeninhalt der Kugeloberfläche gilt

$$\begin{aligned} V_{\text{Kugel}} &= \frac{4}{3}\pi r^3, \\ A_{\text{Kugel}} &= 4\pi r^2. \end{aligned}$$

### 15.1.7 Darstellende Geometrie

In einer perspektivischen Darstellung eines dreidimensionalen Körpers wie z.B. in Bild 15.21 wird ein guter Eindruck des Körpers vermittelt. Dabei werden die Raumpunkte auf eine vor oder hinter dem Körper liegende Ebene (Bildebene) projiziert. Es werden die Zentral- und die Parallelprojektion unterschieden. Für eine *Zentralprojektion* wird zunächst ein Zentralpunkt festgelegt. Jeder Raumpunkt wird dann durch eine Gerade mit dem Zentralpunkt verbunden. Der projizierte Punkt ist der Schnittpunkt dieser Verbindungsgeraden mit der Bildebene. Der Übergang zur *Parallelprojektion* erfolgt durch Verschieben des Zentralpunkts in unendliche Ferne, die projizierenden Geraden stehen somit senkrecht auf der Bildebene. Beide Projektionsarten sind geradentreu, d.h. gerade

Der Mantel des Zylinders bildet nach Aufschneiden ein Rechteck.

Der Zentralpunkt bei der Zentralprojektion kann als das beobachtende Auge gedacht werden.

Meistens werden drei aufeinander senkrecht stehende Projektionsebenen verwendet, um einen Gesamteindruck des Körpers zu vermitteln. Manchmal ist es sinnvoll, sowohl vor als auch hinter dem Körper liegende Ebenen zu verwenden, um Eindeutigkeit herzustellen.

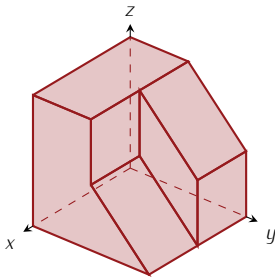


Bild 15.21: Ein Körper, dessen Parallelprojektionen in Bild 15.22 betrachtet werden.

Linien im Raum bleiben gerade Linien in der Bildebene. Längen bleiben dabei nicht erhalten. Winkel werden nur dann in der wahren Größe abgebildet, wenn sie in einer zur Bildebene parallelen Ebene liegen.

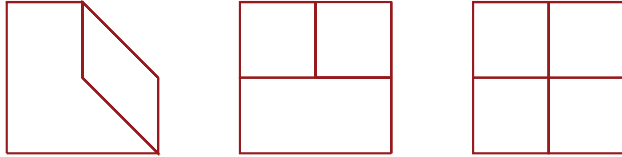


Bild 15.22: Orthogonale Parallelprojektionen des Körpers aus Bild 15.21, links die Projektion auf die  $y-z$ -Ebene und rechts die Projektion auf die  $z-x$ -Ebene. In der Mitte ist die Projektion auf  $x-y$ -Ebene.

**Beispiel.** Das Bild 15.21 zeigt einen dreidimensionalen Körper. Wie sehen seine Parallelprojektionen aus? Dazu werden die folgenden drei Sichten eingenommen:

- ▷ von vorne links, auf die  $y-z$ -Ebene, wie links in Bild 15.22,
- ▷ von vorne rechts, auf die  $z-x$ -Ebene, wie rechts in Bild 15.22,
- ▷ von oben auf die  $x-y$ -Ebene, wie in der Mitte in Bild 15.22.

### 15.1.8 Geometrische Transformationen der Ebene

Eine geometrische Figur kann in ihrer Lage oder ihrer Größe verändert oder auch verformt werden. Eine solche Änderung nennt sich *Transformation*. Einige geometrische Transformationen in der Ebene sind beispielsweise die *Translation*, *Rotation*, *Spiegelung*, *Streckung* und *Skalierung*. Komplexere Transformationen können aus diesen aufgebaut werden.

- ▷ Bei der Translation handelt es sich um eine Verschiebung. Dabei ändert sich nur die Lage einer geometrischen Figur. Ihre weiteren Eigenschaften bleiben unverändert. Dazu zählen Form und Größe.
- ▷ Bei der Rotation handelt es sich um eine Drehung um einen festen Punkt. Dieser Drehpunkt kann innerhalb, aber auch außerhalb der Figur liegen. Bei der Rotation werden die Lage und Ausrichtung der Figur verändert, Form und Größe bleiben unverändert.
- ▷ Bei der Spiegelung wird eine Figur an einer Geraden, auch *Spiegelachse* genannt, gespiegelt. Die Form und Größe der Figur bleiben erhalten, es ändert sich aber ihre Orientierung.
- ▷ Bei der Streckung in eine Richtung wird eine Figur in einer festen Richtung um einen Faktor gestreckt (Faktor  $> 1$ ) oder gestaucht (Faktor  $< 1$ ). Dabei verändert sich die Größe der Figur in der gegebenen Richtung. Die Winkel verändern sich im Allgemeinen, die Orientierung der Figur bleibt unverändert, siehe Beispiel in Bild 15.23.
- ▷ Bei der gleichmäßigen Streckung in alle Richtungen werden alle Längen in der Figur mit einem gemeinsamen Faktor multipliziert und damit entweder *gestreckt* (Faktor  $> 1$ ) oder *gestaucht* (Faktor  $< 1$ ). Die Form bleibt dabei gleich. Dies lässt sich durch Hintereinanderausführung zweier Streckungen in senkrecht zueinander stehenden Richtungen mit gleichem Faktor erreichen.

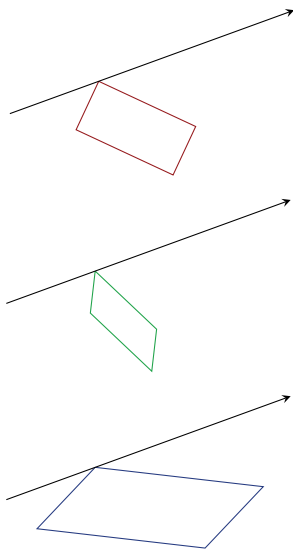


Bild 15.23: Die Richtung (als Pfeil dargestellt), in der das obere Rechteck transformiert wird. Dabei wird es mit einem Faktor  $< 1$  gestaucht (Mitte) oder mit Faktor  $> 1$  gestreckt (unten).

Eine *Isometrie* ist eine geometrische Transformation, bei der die Abstände zwischen den Punkten einer Figur beibehalten werden. Dazu gehören die Translation, die Rotation und die Spiegelung. Streckungen sind keine Isometrien.

Zwei Figuren sind ähnlich, wenn alle Verhältnisse ihrer Abstände gleich sind. Die Figuren können aber unterschiedlich groß sein. Das ist eine Verallgemeinerung der ähnlichen Dreiecke aus Bild 15.10. Die Ähnlichkeit erhalten die Translation, Rotation, Spiegelung und die gleichmäßige Streckung in alle Richtungen. Die Streckung in eine Richtung führt im Allgemeinen zu nicht ähnlichen Figuren.

## 15.2 Lernziele

Nr	Ich kann	Aufgabe	✓
Winkel			
146	verschiedene Typen von Winkeln erkennen	15.1	
147	gleiche Winkel beim Schnitt paralleler Geraden erkennen	15.2-b, 15.3, 15.4	
Dreiecke und Polygone			
148	verschiedene Typen von Dreiecken identifizieren	15.5, 15.6	
149	die Formel für die Winkelsumme im Innern eines Polygons angeben und benutzen	15.6	
150	die Fläche eines Dreiecks berechnen	15.8, 15.11-b	
151	kongruente Dreiecke anhand der Regeln erkennen	15.9, 15.10	
152	die Ähnlichkeit zweier Dreiecke erkennen	15.12, 15.13, 15.14	
153	den Satz des Pythagoras anwenden	15.2-a, 15.15, 15.16, 15.17, 15.18, 15.19, 15.20	
Winkel messen			
154	die Einheit Radiant verstehen	15.22	
155	Winkel in Grad- und Bogenmaß angeben und umrechnen	15.33, 15.35	
Kreise			
156	Fläche und Umfang eines Kreises berechnen und als Formel angeben	15.18, 15.21, 15.22	
157	die Länge eines Kreisbogens berechnen	15.30	
158	die Flächen von Kreissektoren oder Kreissegmenten berechnen	15.11-c, 15.22	
Figuren in der Ebene			
159	die Formeln für Flächen einfacher ebener Figuren angeben	15.20, 15.23	
Körper			
160	die Formeln für Volumina von Zylinder, Pyramide mit quadratischer oder dreieckiger Grundfläche, Kegel und Kugel angeben	15.24, 15.25, 15.26, 15.28	
161	die Formeln für Oberflächen von Zylinder, Kegel und Kugel angeben	15.25, 15.26	
162	elementare geometrische Körper durch Parallelprojektion skizzieren	15.29	
Transformationen			
163	geometrische Transformationen in der Ebene verstehen	15.34-a,b	
164	Beispiele von isometrischen und affinen Transformationen erkennen	15.32, 15.34-c	
165	das Bild einer ebenen durch geometrische Transformation wie Translation, Rotation, Spiegelung oder Streckung entstandenen Figur ermitteln	15.31	

## 15.3 Aufgaben

**Aufgabe 15.1** (10 Min) Benennen Sie alle in Bild 15.24 gezeigten Winkel.

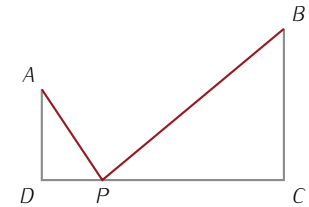


Bild 15.25: Planfigur zur Aufgabe 15.2.

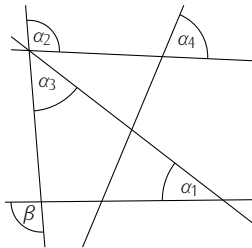


Bild 15.26: In Aufgabe 15.3 soll der Winkel  $\beta$  durch die anderen Winkel ausgedrückt werden.

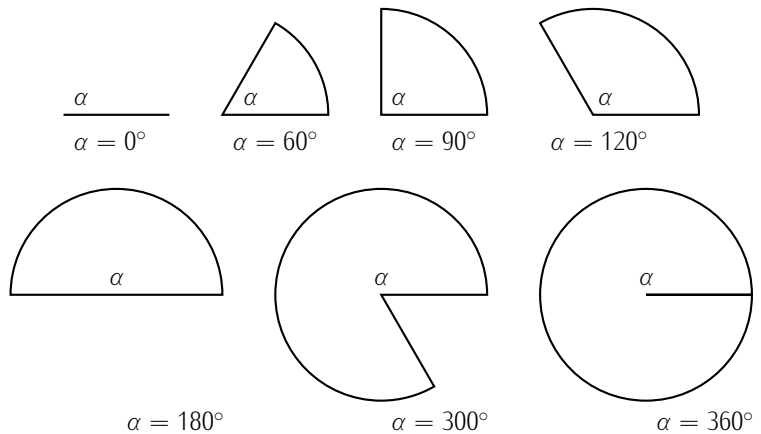


Bild 15.24: Sieben Winkel zur Aufgabe 15.1

**Aufgabe 15.2** (15 Min) Die in Bild 15.25 gezeigte Figur hat die Längen  $|AD| = 3\text{cm}$ ,  $|DC| = 8\text{cm}$ ,  $|BC| = 5\text{cm}$  und es gilt  $\overline{AD} \perp \overline{DC}$  und  $\overline{BC} \perp \overline{DC}$ . Gesucht ist der Punkt  $P$  auf  $\overline{DC}$ , sodass die Summe der Strecken  $|AP| + |PB|$  minimal wird.

- Lösen Sie die Aufgabe mit Hilfe der Differentialrechnung.
- Finden Sie einen geometrischen Grund für das Ergebnis.

**Aufgabe 15.3** (5 min) Der Winkel  $\beta$  in Bild 15.26 ist mit Hilfe der vorliegenden Winkel  $\alpha_i$  auszudrücken.

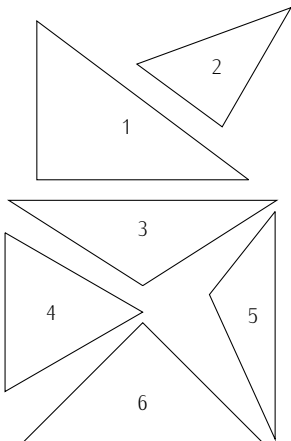


Bild 15.27: Verschiedene Dreieckstypen aus Aufgabe 15.5.

**Aufgabe 15.4** (10 Min) Es sind Aussagen über Winkel gegeben. Kreuzen Sie nur die an, die immer richtig sind.

- ☐ Scheitelwinkel addieren sich zu  $90^\circ$ .
- ☐ Nebenwinkel addieren sich zu  $180^\circ$ .
- ☐ Scheitelwinkel sind gleich groß.
- ☐ Stufenwinkel sind gleich groß.
- ☐ Wechselwinkel an parallelen Geraden unterscheiden sich um  $90^\circ$ .
- ☐ Nebenwinkel unterscheiden sich um  $90^\circ$ .
- ☐ Wechselwinkel an parallelen Geraden sind gleich groß.
- ☐ Stufenwinkel addieren sich zu  $180^\circ$ .

**Aufgabe 15.5** (5 Min) Es geht um verschiedene Typen von Dreiecken. Welche sind gleichseitig oder gleichschenkelig? Welche sind spitz-, stumpf- oder rechtwinklig? Geben Sie zu jedem der sechs in Bild 15.27 gezeigten Dreiecke an, um welchen Typ es sich handelt.

# Index

- Äquator-Ebene, 53
- ähnlich, 35
- Ableitung, 174
  - partielle, 160
- Abschreibung, 208
  - arithmetisch degressiv, 209
- Abstand
  - zweier Punkte, 53
- Abstand von Funktionsgraphen, 165
- Additionstheorem, 87
  - hyperbolisch, 120
- Aggregation, 98
- allgemeiner Additionssatz, 111
- Amplitude, 77, 90, 184, 254
- Amplitudenmodulation, 96
- analytische Geometrie, 52
- Anfangsphase, 90
- Ankathete, 35
- Arcuscosinus, 80
- Arcusfunktionen, 80
- Arcussinus, 80
- Arcustangens, 80
- Area Cosinus hyperbolicus, 118
- Area Cotangens hyperbolicus, 118
- Area Sinus hyperbolicus, 118
- Area Tangens hyperbolicus, 118
- Area-Funktionen, 118
- Asymptote, 134
  - horizontale, 134
  - schiefe, 134
  - vertikale, 134
- Ausgleichsgerade, 164
- Ausprägung, 97
- Ausreißer, 99
- Azimut-Winkel, 53
- Balkendiagramm, 98
- Basel-Problem, 205
- Bisektion, 180, 265
- Bogenmaß, 13
- Bolzano, 264
- Boxplot, 101
- Breitengrad, 53
- Cosecans, 36, 76
- Cosinus, 36
- Cosinus hyperbolicus, 117
- Cosinussatz, 39, 42
- Cotangens, 36
- Cotangens hyperbolicus, 117
- Cotangensfunktion, 79
- Daten, 97
- Descartes
  - Vorzeichenregel, 264
- Differentialquotient, 174
- Differenzenquotient, 174
- Diskriminante, 143
- Doppel-Kegel, 55
- Doppelwinkelformel, 88
- Dreheiseninstrument, 254
- Drehspulgalvanometer, 254
- Dreieck, 10
  - ähnlich, 12
  - ähnlich, 35
  - Flächeninhalt, 10
  - Flächeninhalt, 40
  - gleichschenkl., 10, 41
  - gleichseitig, 10
  - Höhe, 40
  - Hypotenuse, 11
  - Inkreis, 40
  - Kathete, 11
  - kongruent, 11
  - Kongruenz, 43, 44
  - rechtwinklig, 10, 35
  - spitzwinklig, 10
  - stumpfwinklig, 10
  - Umfang, 10, 40
  - Umkreis, 40
- Dreiecksungleichung, 146
- Ebene
  - Achsen-Abschnittsform, 54
  - allgemeine Ebenen-Gleichung, 54
  - Hesse-Normalform, 54
  - Punkt-zwei-Richtungsvektoren-Form, 54

- zwei-Punkte-Richtungsvektor-Form, 54
- Ebene im  $\mathbb{R}^3$ , 159
- Einheitskreises, 13
- Einheitskugel im  $\mathbb{R}^3$ , 159
- Einheitswurzel, 144
- Elementarereignis, 109
- Ellipse, 55
  - Brennpunkte, 55
  - Halbachsen, 55
  - Mittelpunkt, 55
- Ellipsoid, 169
  - Rotations-, 255
- Ereignis
  - Komplement, 111
  - sicheres, 110
  - unabhängig, 112
  - unmögliches, 110
  - unvereinbar, 111
- Ereignisraum, 109
- Ergänzungswinkel, 37
- Ergebnis, 109
- Euler'sche Gleichung, 145
- Euler-Gleichung, 212
- Exponential-Funktion, 117
- Exponentialverteilung, 235
- Fehlerintegral, 235, 241
- Fixpunkt, 266
- Fixpunkt-Algorithmus, 266
- Fläche
  - Schwerpunkt, 250
- Folge, 202
  - arithmetisch, 202
  - beschränkt, 203
  - bestimmt divergent gegen  $+\infty$ , 203
  - bestimmt divergent gegen  $-\infty$ , 203
  - divergent, 203
  - geometrisch, 202
  - Grenzwert, 203
  - Häufungspunkt, 203
  - harmonisch, 202
  - konvergent, 203
  - konvergente Majorante, 204
  - Limes, 203
  - Limes inferior, 203
  - Limes superior, 203
  - Nullfolge, 204
  - Produkt-, 203
  - skalares Vielfaches, 203
  - Summen-, 203
  - Teilsommen-, 205
  - unbestimmt divergent, 203
- Frequenz, 90
- Fundamentalsatz der Algebra, 262
- Funktion
  - $\epsilon$ - $\delta$ -stetig, 179
  - Ableitung, 174
  - Ableitung höherer Ordnung, 175
  - differenzierbar, 174
  - echt gebrochen rational, 132
  - Folgen-stetig, 179
  - Gamma-, 241
  - gebrochen rational, 132
  - gerade, 156
  - globales Maximum, 158
  - globales Minimum, 158
  - Gradient, 161
  - Hill-, 183
  - implizit definiert, 176
  - implizit differenziert, 176
  - konkav, 157
  - kontrahierend, 266
  - konvex, 157
  - Lambert-W-, 185
  - links-gekrümmt, 157
  - Maximum, 162
  - Maximum, 158
  - mehrerer Variabler, 158
  - mehrerer Veränderlicher, 158
  - Minimum, 158, 162
  - Parameter-Darstellung, 177
  - rechts-gekrümmt, 157
  - Signum-, 122
  - stationärer Punkt, 161, 162
  - stetig, 172
  - stetig differenzierbar, 157
  - stetig ergänzt, 173
  - stetig fortgesetzt, 173
  - trigonometrische, 35
  - unecht gebrochen rational, 132
  - ungerade, 156
  - Wendepunkt, 158
- Gamma-Funktion, 235, 241
- Gauß'sche Zahlenebene, 142
- Gegenereignis, 111
- Gegenkathete, 35
- Gegenwahrscheinlichkeit, 111
- Gerade, 9
  - Achsen-Abschnittsform, 53
  - allgemeine Geraden-Gleichung, 53
  - Drei-Punkte-Parameter-Form, 54
  - Hesse-Normalform, 53
  - Punkt-Richtungsvektor-Form, 54
  - Punkt-Steigungsform, 53
  - Steigung-Ordinaten-Abschnittsform, 53
  - Winkel zwischen Geraden, 59
  - Zwei-Punkte-Form, 53
  - Zwei-Punkte-Parameter-Form, 54
- gestreckter Winkel, 9
- gleichschenkliges Dreieck, 41
- gleichseitig, 10



- Glockenkurve, 231
- Gradient, 161
- Gradmaß, 10
- Häufigkeitstabelle, 98
- Höhe, 10
- Häufungspunkt, 203
- Halbgeraden, 9
- Halbwinkelformel, 88
- harmonische Schwingung, 184
  - gedämpft, 184
- Helix, 178
- Heron-Formel, 40
- Hesse-Matrix, 162
- Histogramm, 100
- Hohlzylinder, 252
- Horner-Schema, 261
- Hyperbel, 58
  - Einheits-, 117
- Hyperboloid
  - einschalig, 122
  - zweischalig, 122
- Hypotenuse, 35, 42
- Identität
  - trigonometrische, 38, 42
- imaginäre Einheit,  $j$ , 142
- Impedanz, 148
- Indexmenge, 202
- Inkreisradius, 40
- Integral
  - uneigentliches, 229
- Integration
  - partielle, 222, 225
- Interquartilsabstand, 100
- Intervallhalbierung, 180
- invariant, 180
- IQR, 100
- irreduzibel, 141, 223
- Isolinie, 159
- Isometrie, 17
- Kardioide, 186
- Katenoide, 121
- Kathete, 35
- Kegel, 14
  - grade, 14
  - schief, 14
  - Stumpf, 253
- Kegelschnitt, 58
- Ketten-Regel, 175
  - verallgemeinert, 176
- Kettenlinie, 121
- Kleeblatt, 186
- Koeffizientenvergleich, 223
- Komplementärereignis, 111
- Komplementärwinkel, 37
- Komplementwinkel, 37
- komplexe Zahl
  - Argument, 143
  - Betrag, 143
  - Imaginärteil, 142
  - konjugiert komplex, 143
  - Produkt, 143
  - Quotient, 143
  - Realteil, 142
  - skalares Vielfache, 143
  - Summe, 142
- Komplexe Zahlen,  $\mathbb{C}$ , 142
- konjugiert komplex, 143
- kontrahierende Abbildung, 266
- Koordinaten
  - kartesisch, 52
  - Polar-, 52
- Kreis, 13, 55
  - Einheitskreis, 55
  - Gleichung, 55
  - Kreisfläche, 13
  - Kreisscheibe, 13
  - Mittelpunkt, 55
  - Radius, 55
  - Tangente, 55
- Kreisbogen, 13
- Kreisdiagramm, 98
- Kreisfrequenz, 77, 90, 184, 254
- Kreissegment, 13
- Kreissehne, 41
- Kreissehne verbinden, 13
- Kreissektor, 13
- Kreiszahl, 13
- Kugel, 15
- Kugel-Koordinaten, 52
- Kurve, 177
  - ausgezeichnete Parameter-Darstellung, 177
  - im Raum, 178
  - in der Ebene, 178
  - Länge, 177
  - Parameter-Darstellung, 177
  - Richtungsvektor, 178
- Kurvenlänge, 177
- L'Hospital, 182
- Längengrad, 53
- Lagemaß, 99
- Lambertsche W-Funktion, 185
- Laplace-Raum, 110
- Leistungsanpassung, 183
- Limes inferior, 203
- Limes superior, 203
- Linearfaktor, 133
- Linearkombination, 214
- Maclaurin-Reihe, 206
- Majorante, 231

- Mantel
  - Kegel, 14
  - Zylinder, 15
- Maximum, 158
  - globales, 158
- Median, 99
- Menge
  - konvex, 157
- Merkmal, 97
- Merkmalsausprägung, 97
- Minimum, 158
  - globales, 158
- Minorante, 231
- Mittel
  - arithmetisch, 99
- Mittelpunkt, 13
- Mittelwert, 99
  - galvanometrisch, 254
  - harmonisch, 136
- Mittelwertsatz, 182
- Modus, 99
- Moivre'sche Formeln, 145
- Monom-Regel, 175
  
- Niveaulinie, 159
- Nockenwelle, 186
- Normal-Parabel, 159
- Nullfolge, 204
- Nullmeridian, 53
- Nullstellen, 271
  - rational, 262
- Nullstellensatz von Bolzano, 264
  
- Ortskurve, 159
  
- Parabel, 56, 159
  - Brennpunkt, 56
  - Drei-Punkte-Form, 57
  - Einheitsparabel, 56
  - Leitlinie, 56
  - Normal-, 159
  - Normalparabel, 56
  - Nullstellen-Form, 57
  - Scheitel, 56
  - Scheitel-Form, 57
  - Symmetrie-Achse, 56
- Paraboloid, 159
  - Normal-, 159
- parallel, 10
- Parallelogramm, 12
- Parallelprojektion, 15
- Partialbruchzerlegung, 133, 222
- partielle Integration, 222
- Periodendauer, 184
- Peripheriewinkel-Satz, 39
- Phase, 90
- Phasenverschiebung, 74, 91, 184
- Phasenwinkel, 77
  
- Pol-Achse, 53
- Polar-Winkel, 53
- Polygon, 12
- Polynom
  - irreduzibel, 223
  - Taylor-, 207
- Polynomdivision, 223
- Potenz-Reihe, 206
  - Entwicklungspunkt, 206
  - Konvergenzbereich, 206
  - Konvergenzradius, 206
- Produkt-Regel, 175
- Produktformeln, 92
- Pyramide, 14
  - gerade, 14
  - Spitze, 14
- Pythagoras
  - Satz des, 38
  
- Quader, 14
- Quartil, 100
- Quotienten-Regel, 175
  
- Radiant, 13
- Radius, 13
- rationale Nullstellen, 262
- Rechteck, 12
- rechter Winkel, 9
- Regel von L'Hospital, 182, 183
- Regressionsgerade, 164
- Reihe, 205
  - geometrische, 206
  - harmonische, 205
  - Puiseux-, 130
  - Taylor-, 207
- Rotation, 16
- Rotationskörper, 252
- Rotationsparaboloid, 159
  
- Säulendiagramm, 98
- Satz
  - Mittelwert-, 182
  - von Rolle, 182
- Satz des Pythagoras, 11
- Satz von Rolle, 182
- Schenkel, 9
- Schnittpunkt, 10
- Schwebung, 93
- Schwingung, 89
  - Amplitude, 90
  - Frequenz, 90
  - Phase, 90
- Schwingungsdauer, 77, 90
- Secans, 36, 76
- Seilkurve, 121
- Seiten, 10
- sicheres Ereignis, 110
- Signum-Funktion, 122

- Simpson-Näherung, 232
- Sinus, 36
- Sinus cardinalis, 173, 174
- Sinus hyperbolicus, 117
- Sinussatz, 38, 43, 48
- Skalarprodukt, 59
- Skalierung, 16
- Spiegelachse, 16
- Spiegelung, 16
- Spirale
  - Arithmetisch, 185
  - Geometrisch, 185
- Stamm-Blatt-Diagramm, 100
- Standard-Normalverteilung, 159, 163, 175
- stationärer Punkt, 161, 162
- Statistik
  - symmetrische Daten, 100
- stetige Ergänzung, 173
- stetige Fortsetzung, 173
- Stetigkeit, 172
- Strahl, 9
- Strahlensatz, 12
- Strecke, 9
- Streckung, 16
- Stromstärke
  - effektiv, 254
- Stufenwinkel, 10
- Substitution, 222
- Substitutionsregel, 226
- Supplementwinkel, 37
- Symmetrie
  - trigonometrische, 37
- Tangens, 36
- Tangens hyperbolicus, 117
- Tangensfunktion, 79
- Tangential-Ebene, 161
- Taylor-Entwicklung, 207
- Taylor-Polynom, 207
- Taylor-Reihe
  - Restglied, 208
- Teilsummenfolge, 205
- Tetraeder, 14
- Toleranz, 265
- Tortendiagramm, 98
- Torus
  - Oberfläche, 255
  - Volumen, 255
- Transformation, 16
- Stauchung, 16
- Streckung, 16
- Translation, 16
- Trapez-Näherung, 232
- Trigonometrie, 35
  - ebene, 35
  - periodische Fortsetzung, 73
  - sphärische, 35
- Umkehrfunktion
  - Ableitung, 176
- Umkreis, 39
- Umkreisradius, 40
- Unabhängigkeit, 112
- unmögliches Ereignis, 110
- Variable, 97
- Vektor
  - Betrag, 59
  - Geschwindigkeits-, 185
  - Skalarprodukt, 59
  - Winkel zwischen, 59
- Verteilung
  - Standard-Normal-, 159, 163
- Viereck, 12
- Vollwinkel, 9
- Vorzeichenregel, 264
- Wälzwinkel, 186
- Wahrscheinlichkeit, 110
- Wahrscheinlichkeitsdichte, 159, 160, 163
- Wechselstromwiderstand, 148
- Wechselwinkel, 10
- Wendepunkt, 158
- Whisker, 101
- Winkel, 9
  - Ankathete, 35
  - Gegenkathete, 35
  - Komplement, 37
  - spezielle, 37
  - stumpf, 43
  - Supplement, 37
- Zeiger, 90
- Zeigerdiagramm, 87, 90
- Zeitkonstante, 184
- Zentralprojektion, 15
- Zinseszins
  - stetige Verzinsung, 211
- Zufallsexperiment, 109
- Zykloide, 185, 255
- Zylinder, 15, 252