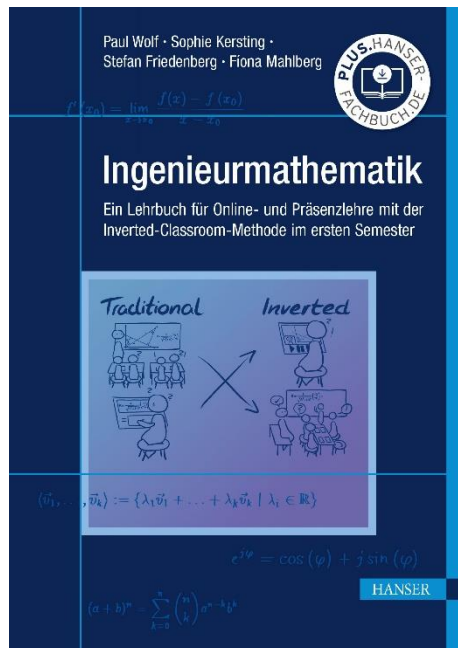


# HANSER



## Leseprobe

zu

## Ingenieurmathematik

von Paul Wolf, Sophie Kersting, Stefan Friedenberg und  
Fiona Mahlberg

Print-ISBN: 978-3-446-47616-5

E-Book-ISBN: 978-3-446-47726-1

Weitere Informationen und Bestellungen unter

<https://www.hanser-kundencenter.de/fachbuch/artikel/9783446476165>

sowie im Buchhandel

© Carl Hanser Verlag, München

# Vorwort

## ■ Hinweise für Lehrende

Bereits vor der Corona-Pandemie hatte die Inverted-Classroom-Methode an Beliebtheit gewonnen und ist nun mit besonderem Fokus auf die Online-Lehre ein wichtiges Hilfsmittel im Didaktik-Werkzeugkasten geworden. Die Idee lässt sich wie folgt kurz zusammenfassen: Die Vorlesung in Form von reiner Wissensdarstellung wird über Videos und weitere Materialien in das Selbststudium verschoben, während die Aufarbeitung bzw. Besprechung und Vertiefung der einzelnen Themen aktiv und gemeinsam mit den Studierenden im sogenannten Plenum geschieht. Obgleich die Idee einfach ist, stellt jedoch die konkrete Umsetzung – insbesondere hinsichtlich des zeitlichen Vorbereitungsaufwandes für Lehrende – eine deutliche Hürde dar. Wir haben festgestellt, dass es zwar viele Erläuterungen und theoretische Betrachtungen der ICM gibt, jedoch verhältnismäßig wenig direkt nutzbare Materialien und konkrete Tipps für die Mathematik der Ingenieurstudiengänge.

Im Jahr 2021 haben wir unser erstes Buch zur Ingenieurmathematik mit der Inverted-Classroom-Methode veröffentlicht ([Wolf21a], ISBN 978-3-446-47133-7), welches den Fokus auf das zweite Semester gelegt hat. Weiterhin wurden dort auch die Inverted-Classroom-Methode (ICM) als solche vorgestellt sowie einige Tipps zur technischen Umsetzung gegeben. In diesem Buch, das als Ergänzung des ersten gesehen werden darf, wird es in erster Linie um klassische Inhalte des ersten Semesters gehen (z. B. Mengenbegriff, komplexe Zahlen und Differentialrechnung in  $\mathbb{R}$ ).

Dieses Buch und die zugehörigen Materialien richten sich gleichermaßen an Lehrende wie Studierende. Mithilfe dieses Gesamtpaketes an Lehrmaterialien wird die genannte Hürde gesenkt und der Einstieg in die Inverted-Classroom-Methode erleichtert. Wir empfehlen Lehrenden, die die ICM zum ersten Mal ausprobieren wollen, mit Studierenden des zweiten Semesters zu starten, da diese bereits das Lernen an Hochschulen gewohnt sind und eventuell schon in anderen Fächern Erfahrungen mit ICM gesammelt haben. Auch aus diesem Grund haben wir unser erstes Buch dem zweiten Semester gewidmet und ergänzen die Materialien nun um die Inhalte für das erste Semester. Je nach Studienordnung kann es natürlich notwendig sein, Inhalte der beiden Bücher zu tauschen oder zu ergänzen.

Es sei betont, dass die ICM sehr individuell angepasst und ausgeführt werden kann bzw. soll. Sowohl die Umsetzung von ICM als auch die Wahl der Inhalte und deren Vorstellung hängen stets von den Erfahrungen und Vorlieben der einzelnen Dozentinnen und Dozenten ab.

Wir liefern mit diesem Buch umfangreiche Materialien für die Mathematikveranstaltung der Ingenieurstudiengänge im ersten Semester. Ein Unterschied zu vielen Lehrbüchern besteht darin, dass das Buch wie eine Vorlesungsreihe aufgebaut ist. Der Start einer Vorlesung wird markiert (z. B. „Vorlesung 3“, ggf. auch mit Hinweisen auf Begleitmaterialien, wie z. B. Einleitungspräsentationen) und bei einigen Vorlesungen findet sich zu Beginn eine kurze Anregung für eine Wiederholung der wichtigsten Inhalte der vorausgegangenen Vorlesung. Die Längen der Vorlesungseinheiten orientieren sich an klassischen 90-Minuten Tafel-Vorlesungen, daher startet bzw. endet eine Vorlesung realistisch nicht unbedingt auch am Anfang eines Buch-Kapitels. Von großer Nützlichkeit für die Plenumsveranstaltungen, welche in der ICM die klassische Vorlesung ersetzen, sind die zahlreichen Verständnisaufgaben und Quizze, die an passenden Stellen zu finden sind. Die Lösungen sind, wie alle weiteren zusätzlichen Materialien, im Online-Bereich<sup>1</sup> zu diesem Buch einsehbar. Nach ungefähr jeder zweiten Vorlesung werden Präsenzaufgaben gestellt, die während einer Plenumsveranstaltung (ob online oder tatsächlich im Hörsaal bzw. Seminarraum) bearbeitet und anschließend besprochen werden sollten. Die Zeitangaben sind lediglich Richtwerte und beziehen sich auf die Bearbeitungszeit von Studierenden. Als Erfahrungswerte können sie natürlich je nach Studiengang und Kohorte unterschiedlich ausfallen. Wir empfehlen, die Studierenden aufzufordern, dass sie möglichst zu jedem im Skript vorgestellten Beispiel noch ein eigenes entwickeln sollen, das dann gemeinsam besprochen bzw. gelöst werden kann. Insgesamt sind dann die Plenumsveranstaltungen didaktisch sinnvoll vorbereitet. Die zusätzlich bereitgestellten (wöchentlichen) Hausaufgaben und deren Lösungen runden schließlich das Paket an Übungsaufgaben ab und können entweder tatsächlich als bewertete Hausaufgaben (Vorschläge für Punktvorgabe stehen an jeder Aufgabe) oder als weitere Übungsmaterialien, wie z. B. für Tutorien, eingesetzt werden.

Neben Lösungen zu den Verständnisfragen sowie den Präsenz- und Hausaufgaben finden sich weitere Materialien im Online-Bereich zu diesem Buch. Dazu gehören die entsprechenden GeoGebra-Dateien<sup>2</sup>, Einleitungsfolien, eine Probeklausur und Tabellen. Zudem bietet der Erstautor Videos an, die er für seine Vorlesung (Mathematik für E-Technik) erstellt hat. Die Videos sind dabei bewusst technisch so einfach gehalten, dass eine Nachahmung problemlos möglich ist. Die Lösungen zu den Hausaufgaben sind ausschließlich für Lehrende gedacht und befinden sich daher im Hanser Dozenten-Bereich<sup>3</sup>. Einzelne Grafiken im Buch wurden mit [R] unter Nutzung des Paketes [ggplot2] erzeugt. Auf Nachfrage kann der entsprechende Code zur Verfügung gestellt werden.

<sup>1</sup> <https://plus.hanser-fachbuch.de/>

<sup>2</sup> Die Dateien wurden mit GeoGebra Classic V5 erstellt. GeoGebra ist kostenfrei sowie leicht zu bedienen und daher auch bereits zum Studienstart im ersten Semester direkt einsetzbar: <https://www.geogebra.org/>

<sup>3</sup> <https://dozentenportal.hanser.de/>

Neben kurzen, motivierenden Einleitungsfolien mit Anmerkungen zu Anwendungsbezügen finden sich an zahlreichen Stellen im Buch – insbesondere innerhalb der Verständnisaufgaben – konkrete Anwendungen der E-Technik und des Maschinenbaus. Mitunter werden evaluierte Anwendungsaufgaben aus [Wolf16] ganz oder teilweise eingebracht. Aus umfangreichen Studien (wie z. B. [Wolf21a]) ist bekannt, dass Anwendungsaufgaben insbesondere für Studierende interessant sind, die ihr Studium aufgrund von Fachinteresse aufgenommen haben. Aber auch für diese Studierenden kann es eine doppelte Hürde darstellen, wenn neue Inhalte mit eventuell noch unbekanntem oder gerade erst gelernten Fachbezügen vermischt werden. Aus diesen Gründen, und weil die Materialien für die mathematische Ingenieurausbildung allgemein genutzt werden sollen, sind die Anwendungsaufgaben bewusst einfach gehalten und enthalten alle notwendigen Formeln (wie z. B.  $U = RI$ ), sodass zwar der Bezug zu den Ingenieurwissenschaften klar wird, jedoch der Fokus auf den mathematischen Inhalten bleibt. Grundsätzlich sei (mit Verweis auf [Wolf17]) betont, dass die curriculare und insbesondere zeitliche Abstimmung der Mathematik- und der Fachveranstaltungen essenziell ist, wenn die Relevanz der gelehrteten Inhalte sowie die Verzahnung der Fächer deutlich gemacht werden soll. Aus diesem Grund werden manchmal Inhalte in diesem Buch bereits früher angesprochen, bevor sie mit angebrachter Ausführlichkeit hergeleitet werden können. So wird das Lösen von kleinen linearen Gleichungssystemen und die Berechnung von einfachen Determinanten schon früh im ersten Semester in der Statik benötigt, könnte aber ohne einen Vorgriff nicht rechtzeitig in der Mathematikveranstaltung behandelt werden. Hier weicht das Buch an manchen Stellen von einem „typischen“ Aufbau ganz bewusst ab. Eine Optimierung an die Studienordnungen aller Hochschulen kann natürlich nicht geleistet werden. Wie wohl es in jeder Mathematikveranstaltung des ersten Semesters immer schwer ist, das Vorwissen der Studierenden richtig einzuschätzen und mit einer teils großen Heterogenität der Vorkenntnisse umzugehen. In diesem Buch versuchen wir, eine Balance dazwischen zu finden, welche Konzepte (zumindest kurz) erklärt werden sollten und welche als Schulinhalte vorausgesetzt werden müssen. Dies kann natürlich auch von Dozentinnen und Dozenten an die jeweiligen Studierenden angepasst werden.

Uns ist bewusst, dass nicht alle Dozentinnen und Dozenten Beweise in den Mathematikveranstaltungen für Ingenieurstudierende behandeln. Wir selbst halten diese für wichtige Elemente der mathematischen Ausbildung, die das abstrakte Denkvermögen schulen sowie neue Ideen und Herangehensweisen vermitteln sollen. Für uns ist die Mathematik auch für sich als eigene Disziplin innerhalb einer Service-Veranstaltung vermittelbar, ohne die Studierenden zu überfordern. Daher finden sich in diesem Buch an einigen Stellen auch Beweise, wobei wir auf zu technische Herleitungen weitestgehend verzichtet haben. Bei Bedarf können die Beweise übersprungen oder entsprechend ersetzt werden.

Wir nutzen die im englischsprachigen Raum sowie in der Programmierung üblichen Dezimaltrennzeichen, d. h. 1,25 wird als 1.25 notiert. Auf Tausendertrennzeichen können wir in diesem Buch verzichten, sodass keine Verwechslungsgefahr besteht.

Die Materialien wurden nach bestem Wissen und Gewissen erstellt, können aber natürlich dennoch kleinere Fehler enthalten.

Über Hinweise freuen wir uns!

## ■ Studien- und Lerntipps für Studierende

Dieses Buch und dessen Begleitmaterialien<sup>4</sup> eignen sich auch zum Selbststudium. Sie entfalten ihren vollen Nutzen jedoch am besten im Rahmen einer entsprechenden Veranstaltung.

Der Übergang von der Schule oder dem Arbeitsleben an die Hochschule kann mitunter schwerfallen. Daher möchten wir im Folgenden einige grundlegende Tipps zum Lernen von Mathematik an Hochschulen geben, da insbesondere in den ersten Semestern von den Studienanfängerinnen und Studienanfängern große Hürden zu nehmen sind. Dies betrifft tatsächlich nicht nur Studierende, deren Mathematikkenntnisse Lücken aufweisen, sondern auch diejenigen, denen das Lernen an der Schule besonders leicht gefallen ist. Bitte lassen Sie sich nicht davon täuschen, wenn die Inhalte zu Beginn des Studiums noch vermeintlich einfach erscheinen. Es kommt häufig schnell der Punkt, an dem dies schlagartig wechselt und wenn man diesen verpasst, so wird es schwer, wieder aufzuholen. Die Themen der Mathematik bauen bekanntlich teils stark aufeinander auf.

Speziell im Inverted-Classroom-Setting ist es wichtig, dass Sie die Videos und sonstigen Materialien rechtzeitig vor der nächsten Vorlesung (Plenumstreffen) gesehen haben. Hier genügt es nicht, die Videos nebenbei beim Kochen, in doppelter Geschwindigkeit oder gar parallel zu anderen Videos laufen zu lassen. Dies ist in etwa so zielführend, wie sich das Skript unter das Kopfkissen zu legen. Wenn Sie nach dem Schauen des Videos keine Fragen notiert haben und sich nicht mit den Verständnisfragen aktiv beschäftigt haben, dann können Sie davon ausgehen, dass Ihre Vorbereitung nicht ausreicht, um etwas aus dem folgenden Plenumstreffen mitzunehmen. Das war dann leider völlige Zeitverschwendung. Also nutzen Sie Ihre Zeit effektiv: Entfernen Sie alles, was Sie ablenkt (Smartphone am besten abschalten oder in einen anderen Raum legen!) und legen Sie einen Zeitraum fest, der ausschließlich zum Lernen gedacht ist. Eine bekannte Zeitmanagement-Methode, die Sie im Internet finden können, ist die Pomodoro-Technik. Dies wird nicht nur Ihr Studium effizienter und angenehmer gestalten, sondern Ihnen auch mehr Freizeit schenken, die Sie sonst entweder durch unnötige Zeitverschwendung verlieren würden oder aufgrund schlechten Gewissens nicht genießen könnten.

Wir möchten auf etwas hinweisen, was den wenigsten Studierenden (und mitunter auch Lehrenden) bekannt sein dürfte. Studierende sind von der Schule eine gänzlich andere Art des Lesens gewohnt, als es bei Expertinnen und Experten der Fall ist, wie in Eye-Tracking-Studien festgestellt wurde (vgl. [Panse16], [Wolf20]). In der Schule wurde häufig das lineare Lesen trainiert und man soll (z. B. im Englischunterricht) einzelne unbekannte Wörter aus dem Kontext heraus verstehen. Dieses Verhalten ist gänzlich ungeeignet für wissenschaftliche und insbesondere mathematiklastige Texte. Expertinnen und Experten springen ständig mit ihrem Blick im Text zwischen Formeln und bereits Gelesenem hin und her, um so die neuen Inhalte mit dem bekannten Wissen zu verknüpfen.

---

<sup>4</sup> <https://plus.hanser-fachbuch.de/>

Diese Umstellung benötigt Zeit und Übung, daher möchten wir Sie hier dafür sensibilisieren. Betrachten wir dazu ein einfaches Beispiel:

„Eine natürliche Zahl  $n$  ist gerade genau dann, wenn  $\exists k \in \mathbb{N}: n = 2k$ .“

Wenn Sie innerhalb eines Kapitels diesen Satz lesen, wie einen Abschnitt aus einer Tageszeitung, so werden Sie wenig bis gar nichts aufnehmen (außer, Sie haben den Inhalt, um den es geht, bereits früher schon kennengelernt). In mathematischen und wissenschaftlichen Texten werden viele abstrakte Informationen sehr präzise und stark komprimiert gegeben. Es werden zudem ggf. Ihnen noch unbekannte Symbole verwendet, deren Bedeutung sich nicht aus dem Kontext erschließen lässt. Wenn Sie in diesem Beispiel nicht wissen, was die Symbole  $\exists$ ,  $\in$  und  $\mathbb{N}$  bedeuten, so haben Sie kaum eine Chance, den Inhalt zu begreifen. Mathematik ist die Sprache der Naturwissenschaften und beim Erlernen von einer Sprache gehört es dazu, die Symbole und die Grammatik zu verinnerlichen, sonst kann man kaum etwas verstehen und erst recht nicht sich selbst ausdrücken. In diesem Sinne ist es also wichtig, dass Sie sich selbst beim Lesen bremsen. Wir unterstützen Sie in diesem Buch darin, indem wir die Texte ständig durch kleine Verständnisfragen unterbrechen und Sie auffordern, das gerade Besprochene entweder an Beispielen anzuwenden oder sich gezielt weitere Gedanken dazu zu machen. Abseits dessen empfehlen wir grundsätzlich, dass Sie jedes Beispiel nach dem Lesen einmal zudecken und versuchen, es selbst zu rechnen. Sie werden feststellen, dass dieses Vorgehen Ihr Verständnis und Ihre Rechenfähigkeiten ungemein stärken wird und dass Sie ganz nebenbei sich damit wunderbar auf Hausaufgaben und letztlich die Klausur vorbereiten. Mathematik macht dann Freude und ist motivierend, wenn man die Inhalte versteht, sie anwenden kann und den eigenen Kompetenzzuwachs bemerkt.

Studierende fragen sich häufig, warum die Definitionen und Aussagen der Mathematik so „merkwürdig“ aufgeschrieben daherkommen. Dies liegt an der hohen Präzision, die notwendig ist, wenn man exakt arbeiten will. Betrachten wir dazu ein Beispiel. Angenommen, wir wollen eindeutig definieren, was ein Rechteck ist. Man könnte sagen, dass ein Rechteck aus vier Punkten besteht, die mit Linien verbunden sind. Jetzt könnten aber diese vier Punkte auch auf einer Geraden liegen, was dann eben kein Rechteck ergeben würde. Nun korrigieren wir die Definition und fordern, dass nur jeweils zwei Punkte auf einer Geraden liegen dürfen. Jetzt könnten wir aber die Punkte wieder so unglücklich miteinander verbinden, dass alles Mögliche außer einem Rechteck dabei heraus kommt. In einem nächsten Schritt könnten wir z. B. die Winkel zwischen den Geraden einschränken, um diese unzureichende Definition zu verbessern. Das mag jetzt vielleicht etwas künstlich wirken, aber umso komplizierter die Inhalte werden, desto notwendiger ist es, absolut präzise und eindeutig zu definieren. Diese Präzision ist einer der entscheidenden Vorteile der Mathematik als Sprache der Natur- und Ingenieurwissenschaften. Übrigens ist dieser Prozess, den wir am Rechteck simuliert haben, ein völlig natürlicher in der Geschichte gewesen. Selten war eine Definition vom ersten Tage an perfekt und auch bei heutiger Forschung gibt es ständig Anpassungen. Grundsätzlich ist eine Definition auch nicht „wahr“ oder „falsch“, sondern im besten Fall nützlich und im schlechtesten Fall unpräzise bzw. uneindeutig. Letztlich müssen Definitionen gewissermaßen auswendig gelernt werden, da es auf jedes Detail ankommt. Allerdings sorgen der häufige Umgang und die Rechenübungen dafür,

dass das Auswendiglernen meist nebenher geschieht. Mit ein wenig mehr Erfahrung in der Hochschulmathematik kann man auch Muster in den Definitionen erkennen, sodass man sie sich zumindest in Grundzügen wieder herleiten kann, wenn man zuvor Verständnis für den Sinn und Zweck der jeweiligen Definition erlangen konnte. Wir empfehlen dennoch, sich eine Art Vokabelliste von Symbolen, Definitionen und Sätzen anzufertigen.

Den Umgang mit Definitionen erlernen Sie am besten, wenn Sie diese auf Beispiele anwenden und sich Nicht-Beispiele überlegen. Bleiben wir bei den geraden Zahlen: Warum ist laut Definition beispielsweise die natürliche Zahl  $n = 14$  gerade? Das liegt daran, weil wir eine natürliche Zahl  $k = 7$  angeben können, sodass tatsächlich  $n = 2k$ , also  $14 = 2 \cdot 7$  gilt. Ein Nicht-Beispiel wäre nun die Zahl  $n = 3$ , zu der wir eben keine natürliche Zahl  $k$  finden können, sodass  $3 = 2k$  ist (denn  $k = \frac{3}{2}$  würde zwar die Gleichung erfüllen, ist jedoch keine natürliche Zahl). Durch das Ausdenken eigener Beispiele und Nicht-Beispiele werden Sie Ihr Verständnis deutlich verbessern, da Sie nun aktiv mit den Inhalten arbeiten, anstatt sie lediglich passiv an sich vorbeifliegen zu lassen. Wie Sie eventuell gerade bemerkt haben, müssen Sie die Symbole und Fachbegriffe kennen, um überhaupt Beispiele entwickeln zu können. Sie entdecken dabei also ganz selbstständig Ihre eigenen Wissens- und Verständnislücken und können diese mit Hilfe von Büchern, Internet, Kommilitoninnen und Kommilitonen sowie Lehrenden schließen.

Nach Definitionen folgen in der Mathematik üblicherweise mathematische Sätze (Theoreme), die Eigenschaften der zuvor definierten Objekte untersuchen. So könnten wir beispielsweise feststellen, dass das Produkt zweier gerader Zahlen wieder gerade ist. Häufig bieten wir dazu auch einen Beweis an, der zeigt, weshalb die Behauptung tatsächlich stimmt. Zum Erlernen empfehlen wir, auch hier wieder eigene Beispiele zum Theorem zu überlegen. So ist  $4 \cdot 6 = 24$  ein Beispiel zu der Aussage, dass „gerade mal gerade“ wieder eine gerade Zahl ergibt. Den Beweis sollten Sie nachvollziehen, denn er liefert die Gründe, warum Aussagen gelten und schärft unser Verständnis für die Zusammenhänge. Solch tiefes Verständnis versetzt Sie in die Lage, bekanntes Wissen auf neue Inhalte anzuwenden und neue Ideen zu entwickeln, was ja letztlich die Aufgabe von Ingenieurinnen und Ingenieuren ist.

Es gibt je nach Schulbildung große Lücken zwischen dem Vorwissen und dem im Studium verlangten Grundwissen (Bruchrechnung und der Umgang mit Gleichungen sind hier nur zwei Beispiele). Daher raten wir Ihnen, eventuell angebotene Vorkurse und Brückenkurse zu nutzen, Tutorien und Vorlesungen zu besuchen und die (Haus-)Aufgaben zunächst selbstständig zu lösen und erst dann ggf. in einer Lerngruppe zu besprechen. Wir bemerken leider häufiger, dass es in Lerngruppen eine Person gibt, die bereits viel verstanden hat, die Aufgaben schnell löst und die anderen dann mehr oder weniger mitzieht. Achten Sie in Lerngruppen daher darauf, dass man sich tatsächlich nur unterstützt und nicht die Arbeit und damit das Verständnis den anderen vorenthält.

Wir nutzen die im englischsprachigen Raum sowie in der Programmierung üblichen Dezimaltrennzeichen, d. h. 1,25 wird als 1.25 notiert. Auf Tausendertrennzeichen können wir in diesem Buch verzichten, sodass keine Verwechslungsgefahr besteht.

Die Materialien wurden nach bestem Wissen und Gewissen erstellt, können aber natürlich dennoch kleinere Fehler enthalten. Über Hinweise freuen wir uns.

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg im Studium!

Paul Wolf, Sophie Kersting, Stefan Friedenberg & Fíona Mahlberg

Im Januar 2023

## ■ Literatur

- [Panse16] Panse, A. & Paravicini, W. (2016). Leseverhalten und Rationalität von Studienanfängerinnen und -anfängern. *BzM 2016*, WTM-Verlag, Münster, 735–742
- [R] R Core Team (2022). R: A language and environment for statistical computing. *R Foundation for Statistical Computing*. Vienna, Austria.  
<https://www.R-project.org/>.
- [ggplot2] Wickham, H. (2016). *ggplot2: Elegant Graphics for Data Analysis*. Springer-Verlag New York.
- [Wolf16] Wolf, P. & Biehler, R. (2016). Anwendungsorientierte Aufgaben für die Erstsemester-Mathematik-Veranstaltungen im Maschinenbaustudium, *khdm-Report*, Nr. 04-16. Universitätsbibliothek Kassel, Kassel.
- [Wolf17] Wolf, P. (2017). *Anwendungsorientierte Aufgaben für Mathematikveranstaltungen der Ingenieurstudiengänge – Konzeptgeleitete Entwicklung und Erprobung am Beispiel des Maschinenbaustudiengangs im ersten Studienjahr*. Springer Spektrum, Wiesbaden.
- [Wolf20] Wolf, P., Sydow, S., Pieper, J. & Friedenberg, S. (2020). Der Blick fürs Wesentliche – Eye-Tracking-Studie zu Lesestrategien von Rechnernetz-Grafiken. *MedienPädagogik: Zeitschrift für Theorie und Praxis der Medienbildung* (Occasional Papers), 86–108
- [Wolf21a] Wolf, P. (2021). Konzeptgeleitete Entwicklung und Erprobung anwendungsorientierter Mathematikaufgaben für Ingenieurstudienanfänger im ersten Studienjahr. In R. Biehler, A. Eichler, R. Hochmuth, S. Rach, & N. Schaper (Eds.), *Lehrinnovationen in der Hochschulmathematik: praxisrelevant – didaktisch fundiert – forschungsbasiert*. Wiesbaden: Springer Spektrum.
- [Wolf21b] Wolf, P., Kersting, S. & Friedenberg, S. (2021). *Ingenieurmathematik – Ein Lehrbuch für Online- und Präsenzlehre mit der Inverted-Classroom-Methode im zweiten Semester*. Hanser Verlag, München.





# Inhalt

<b>1</b>	<b>Einige fundamentale Grundlagen</b> .....	<b>1</b>
1.1	Zahlbereiche, Rechengesetze, binomische Formeln .....	1
1.1.1	Grundlegende Rechengesetze .....	2
1.1.2	Binomische Formeln .....	4
1.2	Grundlagen der Mengenlehre und der Logik .....	5
1.2.1	Logische Verknüpfungen und ihre mengentheoretischen Pendanten .....	7
1.2.2	Definitionszeichen .....	13
1.2.3	Intervalle .....	14
1.2.4	Kartesisches Produkt .....	15
1.2.5	Quantoren .....	16
1.2.6	Wahrheitstafel .....	17
1.2.7	De-morgansche Gesetze .....	18
1.2.8	Beweismethoden .....	22
1.2.9	Term versus Gleichung .....	26
1.3	Grundlegende Rechenregeln .....	27
1.3.1	Bruchrechnung .....	28
1.3.2	Anwendung: Bestimmung des Ersatzwiderstandes .....	29
1.3.3	Potenzen und Wurzeln .....	30
1.3.4	Grundlagen zu Polynomen .....	32
1.3.5	Logarithmus .....	36
1.3.6	Betrag .....	38
1.3.7	Ungleichungen .....	40
<b>2</b>	<b>Stellenwertsystem und Einheiten</b> .....	<b>43</b>
2.1	Dezimalsystem .....	43
2.2	Dualsystem .....	45
2.3	Hexadezimalsystem .....	47
2.4	Einheiten umrechnen .....	49
2.5	Gradmaß und Bogenmaß .....	50

<b>3</b>	<b>Vektor- und Matrizenrechnung</b> .....	<b>53</b>
3.1	Vorgriff: Lineare Gleichungssysteme und Determinanten .....	53
3.1.1	Grundlagen zum Lösen linearer Gleichungssysteme .....	54
3.1.2	Grundlagen zur Berechnung von Determinanten .....	57
3.2	Vektoralgebra .....	59
3.2.1	Vektoren im $\mathbb{R}^n$ .....	59
3.2.2	Der Vektorraumbegriff .....	64
3.2.3	Linearkombinationen und der Spann .....	65
3.2.4	Lineare Unabhängigkeit .....	68
3.2.5	Lineare Gleichungssysteme mit unendlich vielen Lösungen .....	71
3.2.6	Basis, Dimension und Untervektorräume .....	73
3.2.7	Koordinatentransformation und Basiswechsel .....	78
3.2.8	Klassische Transformationen im $\mathbb{R}^2$ .....	86
3.2.9	Winkelberechnungen .....	89
3.2.10	Orthogonalisierung .....	92
3.2.11	Projektion .....	96
3.2.12	Kreuz- und Spatprodukt .....	98
3.3	Matrizenrechnung, Invertierung und Determinante .....	101
3.3.1	Rechnen mit Matrizen .....	102
3.3.2	Inverse Matrizen und das Verfahren von Gauß-Jordan .....	104
3.3.3	Determinante .....	106
3.4	Eigenwerte und Eigenvektoren .....	114
3.5	Anwendungen in der Geometrie .....	118
3.5.1	Geraden in Parameterform .....	118
3.5.2	Geraden in Funktionsform .....	120
3.5.3	Schnittpunkte von Geraden .....	122
3.5.4	Abstandsberechnung im $\mathbb{R}^2$ und die (Hesse-)Normalform .....	123
3.5.5	Abstandsberechnungen im $\mathbb{R}^3$ .....	128
3.5.6	Bemerkungen zu Schnittpunkten .....	133
3.5.7	Optional: Kegelschnitte .....	135
	Literatur .....	140
<b>4</b>	<b>Komplexe Zahlen</b> .....	<b>141</b>
4.1	Einführung und Grundrechenarten .....	141
4.2	Polarform und Exponentialform .....	145
4.3	Potenzen und Wurzeln komplexer Zahlen .....	149
4.4	Gleichungen in $\mathbb{C}$ lösen .....	152
4.5	Anwendungsbeispiel .....	154
4.6	Optional: Exakte Winkelberechnung .....	157

<b>5</b>	<b>Abbildungen</b> .....	<b>159</b>
5.1	Grundlagen .....	159
5.2	Folgen .....	162
5.2.1	Umwandlung von expliziter in rekursive Form .....	165
5.2.2	Umwandlung von rekursiver in explizite Form .....	165
5.3	Definitionsmenge und wichtige Funktionen .....	166
5.3.1	Merkregeln zum Definitionsbereich .....	166
5.3.2	Wichtige Funktionen .....	168
5.4	Umkehrbarkeit von Funktionen .....	175
5.5	Symmetrie, Periodizität und Parameterdarstellung .....	182
5.5.1	Symmetrie .....	183
5.5.2	Periodizität .....	184
5.5.3	Parameterdarstellung .....	185
5.6	Konvergenz .....	187
5.6.1	Grundidee der Folgenkonvergenz .....	187
5.6.2	Beschränktheit, Monotonie und Konvergenz .....	191
5.6.3	Rechenregeln für Konvergenz und das Quetschlemma .....	194
5.6.4	Grenzwert von Funktionen .....	199
5.6.5	Die Problemfälle .....	201
5.7	Stetigkeit .....	203
<b>6</b>	<b>Summen und Reihen</b> .....	<b>213</b>
6.1	Grundlagen zu Summen .....	213
6.2	Wichtige Summenformeln .....	216
6.3	Rechenregeln .....	220
6.4	Reihen und Konvergenzkriterien .....	226
6.4.1	Geometrische Reihe .....	226
6.4.2	Majoranten- und Minorantenkriterium .....	227
6.4.3	Harmonische Reihe .....	228
6.4.4	Anmerkungen zu Konvergenzverhalten .....	228
6.4.5	Nullfolgenkriterium .....	230
6.4.6	Quotientenkriterium .....	232
6.4.7	Wurzelkriterium .....	234
6.4.8	Leibniz-Kriterium .....	236
6.4.9	Fehlerabschätzung .....	239

<b>7</b>	<b>Differentialrechnung in <math>\mathbb{R}</math></b> .....	<b>243</b>
7.1	Grundlagen und Differenzierbarkeit .....	243
7.2	Ableitungsregeln .....	250
7.3	Anwendungen der Ableitung .....	255
7.3.1	Gleichheit von Funktionen .....	256
7.3.2	Das Differential als Approximation .....	256
7.3.3	Newton-Nullstellenverfahren .....	260
7.3.4	Mittelwertsatz .....	265
7.3.5	Monotonie und Injektivität .....	267
7.3.6	Regel von l'Hospital .....	268
7.3.7	Optional: Kurvendiskussion .....	272
<b>8</b>	<b>Optional: Ortskurven</b> .....	<b>279</b>
8.1	Grundlagen .....	279
8.2	Inversion der Ortskurve .....	281
	<b>Stichwortverzeichnis</b> .....	<b>287</b>

# 1

## Einige fundamentale Grundlagen



Vorlesung 1 + Folien (Organisatorisches)

Die Mathematik ist die Sprache der Natur- und Ingenieurwissenschaften, denn technische und physikalische Phänomene lassen sich nur mit ihr effizient und universal verständlich beschreiben bzw. modellieren. So können Wellen und Schwingungen sowie der Zerfallsprozess einer radioaktiven Substanz oder die Gesetze des Elektromagnetismus mittels mathematischer Gleichungen beschrieben werden. Diese Beispiele machen es deutlich, dass die Mathematik unverzichtbar ist für Ingenieurinnen und Ingenieure. Ohne die notwendigen Mathematikkenntnisse würde es Ihnen kaum möglich sein, den Fachvorlesungen Ihres Studiengangs, wie z. B. Technische Mechanik oder Regelungstechnik, zu folgen und Inhalte nachhaltig verstehen zu können. Selbst, wenn Computer einen Großteil der mathematischen Arbeit für Sie später erledigen werden, so benötigen Sie dennoch ein solides mathematisches Hintergrundwissen, um Ergebnisse verifizieren sowie Fehler identifizieren und beheben zu können.

Wir behandeln in diesem Kapitel in aller Kürze die wichtigsten Grundlagen, die Sie im weiteren Verlauf des Semesters benötigen. Viele der Inhalte wurden üblicherweise bereits in der Schule und/oder im Mathematik-Vorkurs ausführlich geübt, weshalb dieses Kapitel an manchen Stellen recht knapp gehalten ist.

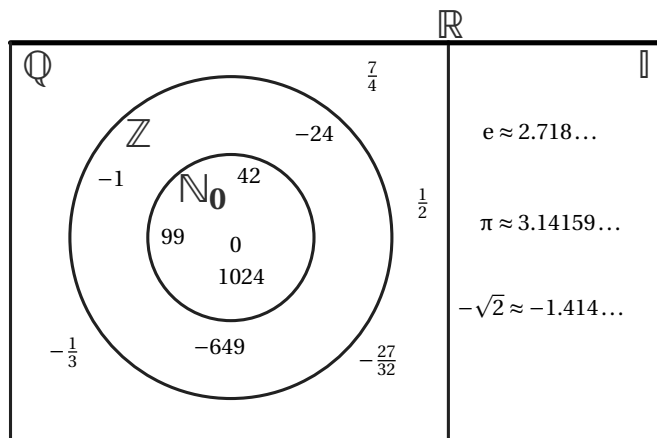
### ■ 1.1 Zahlbereiche, Rechengesetze, binomische Formeln

Die Zahlenräume bzw. **Zahlbereiche** haben sich im Laufe der Menschheitsgeschichte entwickelt. So werden negative Zahlen benötigt, um Schulden darstellen zu können, und Brüche ermöglichen den Umgang mit Anteilen. Bereits in der Antike war ausgehend von geometrischen Betrachtungen (Dreieck, Kreis) bekannt, dass es Zahlen gibt, die sich nicht durch einen Bruch darstellen lassen, wie z. B. die Kreiszahl  $\pi$  oder die Länge der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks mit Kathetenlängen  $a = b = 1$  (was zu  $c = \sqrt{2}$  führt). Als Symbole nutzen wir heute:

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$  für die **natürlichen** Zahlen, bzw. inkl. der Null:  $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$
- $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$  für die **ganzen** Zahlen. Es ist  $\mathbb{Z}_{\geq 0} = \mathbb{N}_0$ .
- $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{n}{m} \mid n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N} \right\}$  für die **rationalen** Zahlen (Brüche).
- $\mathbb{I}$  für die nicht als Bruch darstellbaren, also **irrationalen**, Zahlen ( $\sqrt{2}, \pi, e, \dots$ )
- $\mathbb{R}$  für die **reellen** Zahlen, welche lediglich alle vorhergehenden vereinen.

Einige Beispiele finden sich in Bild 1.1. Die komplexen Zahlen  $\mathbb{C}$ , welche u. a. das Wurzelziehen aus negativen Zahlen möglich machen, erweitern den Raum der reellen Zahlen. Dies thematisieren wir in einem späteren Kapitel ausführlich.

Mit dem Symbol  $\in$  können wir mitteilen, in welchem Zahlenraum sich ein Objekt befindet bzw. aus welcher Menge es stammen soll. Fordern wir beispielsweise, dass  $x \in \mathbb{N}$  („ $x$  sei Element der natürlichen Zahlen“), so darf  $x$  nur eine natürliche Zahl sein, wie z. B. die Anzahl an Studierenden in einer Veranstaltung. Mit  $\notin$  kann das Gegenteil ausgedrückt werden, so gilt beispielsweise  $\pi \notin \mathbb{N}$  („ $\pi$  ist kein Element der natürlichen Zahlen“).



**Bild 1.1** Visualisierung der Zahlbereiche  $\mathbb{N}_0$  bis  $\mathbb{R}$



### Verständnisfrage 1

Wählen Sie zwei natürliche Zahlen  $a, b$  so, dass alle folgenden Forderungen gleichzeitig erfüllt werden:

- $a - b \in \mathbb{Z}$ , aber gleichzeitig  $\notin \mathbb{N}_0$
- $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ , aber gleichzeitig  $\notin \mathbb{Z}$
- $\sqrt{a \cdot b} \in \mathbb{I}$

## 1.1.1 Grundlegende Rechengesetze

Sind  $a, b, c \in \mathbb{R}$ , so gelten die bekannten Gesetze:

- **Assoziativgesetz:**  $(a + b) + c = a + (b + c)$ , analog mit  $\cdot$  statt  $+$

- **Kommutativgesetz:**  $a + b = b + a$ , analog mit  $\cdot$  statt  $+$
- **Distributivgesetz:**  $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

Das Wort „analog“ wird in der Mathematik gerne als Synonym für „genauso“ oder „auf ähnliche Weise“ verwendet. Im Falle des Kommutativgesetzes soll es hier ausdrücken, dass das Gesetz genauso auch für die Multiplikation gilt (also  $a \cdot b = b \cdot a$ ).

Die Gesetze können natürlich auch bei komplexeren Ausdrücken genutzt werden. So kennen Sie aus der Schule das Ausmultiplizieren von zwei Klammern („Jedes mit jedem“):

$$(x + y)(b + c) = (x + y)b + (x + y)c = xb + yb + xc + yc$$

Hier wurde das Distributivgesetz also zweimal nacheinander angewendet.

Auch an die **Vorzeichenregeln** bei der Multiplikation wollen wir uns erinnern (vgl. Tab. 1.1). Diese ist so zu verstehen, dass beispielsweise das Produkt zweier negativer Zahlen wieder positiv ist:  $(-3) \cdot (-4) = 12$ .

·	+	-
+	+	-
-	-	+

**Tabelle 1.1** Vorzeichentabelle zur Multiplikation in  $\mathbb{R}$

### Beispiel:

Beim Distributivgesetz unterscheidet man üblicherweise zwischen ausmultiplizieren

$$\begin{aligned}(x - 3y)(-x - 2z) &= (x - 3y) \cdot (-x) + (x - 3y) \cdot (-2z) \\ &= -x^2 + 3xy - 2xz + 6yz\end{aligned}$$

und ausklammern

$$3x^2 - 6xy + 5(x - 2y) = 3x(x - 2y) + 5(x - 2y) = (x - 2y)(3x + 5) \quad \blacktriangle$$

Es ist allgemein üblich, auf das Produktzeichen zu verzichten ( $a \cdot b = ab$ ). Wir werden es daher nur verwenden, wenn wir die Multiplikation hervorheben oder eventuelle Missverständnisse vermeiden wollen.



### Verständnisfrage 2

In einem Skript zu Grundlagen der Elektrotechnik (Thema Spannungsteiler) findet man folgende Termumformung (Teilspannung  $U$ , Strom  $I$ , Widerstände  $R_1, R_2$ ):

$$\left(I + \frac{U}{R_2}\right)R_1 + U = U\left(\frac{R_1}{R_2} + 1\right) + IR_1$$

Überführen Sie die linke in die rechte Seite und geben Sie bei jeder Umformung an, welches der Gesetze (Assoz., Komm., Distr.) Sie verwendet haben.



## 1.1.2 Binomische Formeln

Aus der Schule sind die drei **binomischen Formeln** bekannt. Für  $a, b \in \mathbb{R}$  gilt:

$$\begin{aligned} 1. (a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\ 2. (a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 \\ 3. (a+b)(a-b) &= a^2 - b^2 \end{aligned}$$

Diese lassen sich direkt aus den vorher besprochenen Rechenregeln herleiten. Die zweite Formel weisen wir wie folgt nach:

$$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) \stackrel{\text{Distr.}}{=} a^2 - ab - ba + b^2 \stackrel{\text{Komm.}}{=} a^2 - 2ab + b^2$$



### Verständnisfrage 3

Überprüfen Sie auf gleiche Weise die beiden übrigen binomischen Formeln.

Häufig verwendet man die Formeln zur Vereinfachung von Ausdrücken:

$$x^2 + 8x + 16 = (x+4)^2$$

Man kann die binomischen Formeln auch dann gewinnbringend nutzen, wenn der  $b^2$ -Anteil nicht passt. Dazu addiert man zunächst das, was man bräuchte, um die Formel anwenden zu können und korrigiert durch Subtraktion so nach, dass schließlich kein Fehler gemacht wird. In der Mathematik nennt man dieses Vorgehen „eine geschickte Null addieren“, was ein sehr beliebter Trick in vielen unterschiedlichen Situationen ist:

$$x^2 + 8x + 15 = x^2 + 8x + \overbrace{(16 - 16)}^{=0} + 15 = (x^2 + 8x + 16) - 16 + 15 = (x+4)^2 - 1$$



### Verständnisfrage 4

Sollten Sie über die Übungs- bzw. Hausaufgaben hinaus, die in dieser Veranstaltung angeboten werden, noch weiteren Bedarf an Aufgaben haben, so finden Sie zu allen Themen viele Übungen mit Lösungen im Internet. Geben Sie z. B. „binomische Formeln Aufgaben mit Lösungen“ in die Suchmaschine Ihrer Wahl ein.

## ■ 1.2 Grundlagen der Mengenlehre und der Logik

Für unsere Betrachtungen genügt es, wenn wir eine **Menge** als eine Zusammenfassung von einzelnen unterscheidbaren Elementen ansehen. Dieser Mengenbegriff geht auf Georg Cantor im Jahre 1895 zurück. Er führt bei Spezialfällen zu Widersprüchen<sup>1</sup>, allerdings sind diese für das Studium der Ingenieurwissenschaften nicht von Bedeutung. Daher soll uns die naive Beschreibung genügen.

Die Menge *Korb* enthalte einen Apfel, eine Birne und einen Chicorée:

$$\text{Korb} = \{\text{Apfel, Birne, Chicorée}\}$$

Korb ist also eine endliche Menge mit **Mächtigkeit** (Kardinalität) 3, da drei (unterschiedliche) Elemente enthalten sind, kurz:  $\text{card}(\text{Korb}) = 3$  oder  $|\text{Korb}| = 3$ . Wir können also beispielsweise  $\text{Apfel} \in \text{Korb}$  („Apfel“ ist Element der Menge „Korb“) oder  $\text{Kartoffel} \notin \text{Korb}$  („Kartoffel“ ist kein Element der Menge „Korb“) schreiben. Wir einigen uns darauf, dass wir identische Elemente stets nur einmal nennen (also nicht  $\{2, 2, 5, 5, 7\}$ , sondern nur  $\{2, 5, 7\}$ ). Falls eine Ordnung existiert, geben wir die Elemente auch möglichst aufsteigend sortiert an. Die **leere Menge**  $\emptyset$  (oder  $\{\}$ ) enthält keine Elemente und ist die einzige Menge mit Mächtigkeit 0.

Es gibt grundsätzlich zwei Möglichkeiten, Mengen zu notieren: die aufzählende und die beschreibende Darstellung. In der **aufzählenden Darstellung** werden die Elemente alle hintereinander aufgeschrieben. Hierbei ist zu beachten, dass die Reihenfolge zwar an sich keine Rolle spielt, allerdings ist es üblich, eine eventuell existierende Ordnung zu nutzen (z. B. aufsteigend sortiert). Weiterhin sollten keine Elemente doppelt aufgezählt werden.

### Beispiel:

$$\{3, -9, 3, 3, 1, 1\} = \{3, -9, 1\} = \{1, 3, -9\} = \{-9, 1, 3\}$$

Hier würde man die aufsteigend sortierte Darstellung (rechts) präferieren. ▲

Oft ist es nicht sinnvoll oder gar möglich, alle Elemente konkret aufzuschreiben (z. B. bei unendlichen Mengen), dann verwendet man die **beschreibende Darstellung**. In Bild 1.2 wird der Aufbau zusammengefasst.

Welche Eigenschaften  
Was betrachte ich? sollen erfüllt sein?

$$\{x \in \mathbb{N} \mid x \geq 3\}$$

**Bild 1.2** Aufbau einer Menge in beschreibender Darstellung

<sup>1</sup> Die moderne Mengenlehre ist im Gegensatz zur naiven Mengenlehre immun gegen solche Spezialfälle wie z. B. die Russellsche Antinomie („Menge aller Mengen, die sich nicht selbst enthalten“).

**Beispiel:**

$$\{x \in \mathbb{N} \mid x \geq 3\}$$

Dies liest man wie folgt: „(Dies ist) die Menge aller  $x$  aus den natürlichen Zahlen mit der Eigenschaft  $x \geq 3$ “. Kurz gesagt besteht die Menge also einfach aus den natürlichen Zahlen, die größer oder gleich 3 sind (kurz  $\mathbb{N}_{\geq 3}$ ). Statt des senkrechten Strichs verwenden manche auch einen Doppelpunkt, die Bedeutung bleibt aber identisch. ▲

Insbesondere in Lehrveranstaltungen ist es nicht unüblich, dass man durch eine „Pünktchenschreibweise“ von der beschreibenden zu einer symbolisch aufzählenden Schreibweise übergeht, um die Struktur verständlicher zu machen.

**Beispiel:**

$$\{x \in \mathbb{N} \mid x \geq 3\} = \{3, 4, 5, 6, \dots\}$$

Die **Logik** (logos: das Wort) ist die seit der Antike bekannte Lehre vom richtigen Denken und Schlussfolgern. Zwischen der Mengenlehre und der Aussagenlogik besteht eine starke Verbindung, die wir uns nun bewusst machen wollen, da wir dadurch in die Lage versetzt werden, Probleme aus zwei Blickrichtungen zu sehen und lösen zu können. Eine **Aussage** ist für uns ein Satz bzw. Ausdruck, dem man einen Wahrheitswert (wahr oder falsch) zuordnen kann. Damit es sich um eine Aussage im Sinne der Logik handelt, ist es unerheblich, ob der Wahrheitswert tatsächlich bekannt ist oder nicht.

**Beispiele:**

- „Aliens essen gerne Katzen“ *kann* wahr bzw. falsch sein, also ist dies eine Aussage.
- „Auf dem Mond regnet es“ ist ebenfalls eine Aussage.
- „Herzlichen Glückwunsch!“ ist keine Aussage, da man keinen Wahrheitswert zuordnen kann (analog: „Bis bald!“ oder „Lauf weg!“).
- $2x^2 + 3y - z$  ist keine Aussage, sondern nur ein Term.
- $\pi \in \mathbb{N}$  und  $x = 5$  sind Aussagen (erste falsch, zweite kontextabhängig). ▲

**Verständnisfrage 5**

An der Ampel schreit jemand „Grün!“. Ist dies eine Aussage?  
 Der Vater sagt „Räum dein Zimmer auf!“. Ist das eine Aussage?  
 „Dieser Satz ist falsch!“. Ist das eine Aussage?  
 Warum ist  $x = 5$  eine Aussage, aber  $x - 5$  nicht?

Im Alltag und in der Wissenschaft werden ständig Aussagen verbunden. Wir wollen uns die wichtigsten Verknüpfungen nun näher ansehen und zeigen gleichzeitig die Verbindungen zur Mengenlehre auf.

## 1.2.1 Logische Verknüpfungen und ihre mengentheoretischen Pendant

### Konjunktion und Schnitt

Die Konjunktion ist die **Und-Verknüpfung** von zwei Aussagen:  $A \wedge B$ .

Sind  $A =$  „Ich schwimme gerne“ und  $B =$  „Ich bin Student“, so ergibt also

$$A \wedge B = \text{„Ich schwimme gerne und ich bin Student.“}$$

Die Konjunktion ist nur wahr, wenn beide Einzelaussagen wahr sind.

In der Mengenlehre wird die Und-Verknüpfung zum sogenannten **Schnitt**:

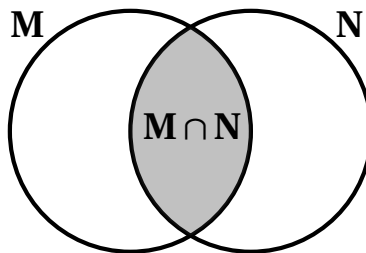
$$M \cap N = \{x \mid x \in M \wedge x \in N\}$$

Lies: „ $M$  geschnitten  $N$  ist die Menge aller  $x$  mit der Eigenschaft, dass es Element von  $M$  und Element von  $N$  ist.“

Mit Blick zur Aussagenlogik sind hier  $x \in M$  und  $x \in N$  die beiden Aussagen, die miteinander verknüpft werden. Das Ergebnis der Konjunktion ist dann die Aussage  $x \in M \cap N$ .

In unserem Alltagsbeispiel könnten wir also  $M$  als die Menge aller Personen festlegen, die gerne schwimmen, und  $N$  als die Menge aller Studierenden. Im Schnitt sind somit nur Studierende, die gerne schwimmen (also in  $M$  und  $N$  enthalten sind).

Ein **Venn-Diagramm** kann helfen, die Situation zu visualisieren. Ein Kreis steht hierbei jeweils für eine Menge. In Bild 1.3 wird die Schnittmenge hervorgehoben. Diese Diagramme sind besonders bei komplizierteren Verknüpfungen sehr praktisch.



**Bild 1.3** Venn-Diagramm zum Schnitt von zwei Mengen

#### Beispiel:

Sind  $M = \{-5, 3, 7, 9\}$  und  $N = \{-2, 0, 3, 9\}$ , so ist  $M \cap N = \{3, 9\}$ . Der Schnitt enthält also genau die Elemente, die in beiden Mengen enthalten sind. Er kann natürlich auch leer oder von unendlicher Mächtigkeit sein. ▲



#### Verständnisfrage 6

Geben Sie ein Beispiel an, bei dem der Schnitt von zwei Mengen eine der beiden Mengen ist, also z. B.  $M \cap N = N$ . Skizzieren Sie auch ein passendes Venn-Diagramm zur Situation. Überlegen Sie sich zudem zwei Aussagen (möglichst Alltagsbeispiele), deren Konjunktion entsprechend eine der beiden Aussagen ergibt.

## Disjunktion und Vereinigung

Die Disjunktion ist die **Oder-Verknüpfung** von zwei Aussagen:  $A \vee B$ .

In unserem Beispiel von oben ergibt sich somit

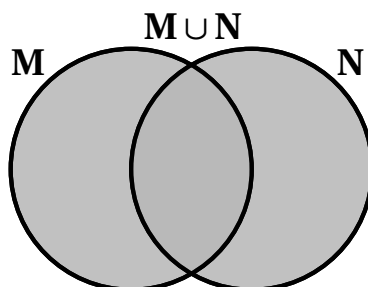
$$A \vee B = \text{„Ich schwimme gerne oder ich bin Student.“}$$

Die Disjunktion ist wahr, wenn mindestens eine Aussage wahr ist. Man verwechsle sie nicht mit einer Entweder-Oder-Aussage, die in der Alltagssprache nicht immer von einer Oder-Aussage klar unterschieden wird.

In der Mengenlehre ist das Pendant zur Disjunktion die sogenannte **Vereinigung**:

$$M \cup N = \{x \mid x \in M \vee x \in N\}$$

Lies: „ $M$  vereinigt mit  $N$  ist die Menge aller  $x$  mit der Eigenschaft, dass  $x$  ein Element von  $M$  oder ein Element von  $N$  ist.“



**Bild 1.4** Venn-Diagramm zur Vereinigung von zwei Mengen

### Beispiel:

Wie bereits erwähnt, zählen wir keine Elemente doppelt auf, daher ist:

$$\{-5, 3, 7, 9\} \cup \{-2, 0, 3, 9\} = \{-5, -2, 0, 3, 7, 9\}$$

Die Vereinigung von zwei Mengen enthält also sämtliche Elemente beider Mengen. ▲



### Verständnisfrage 7

Geben Sie ein Beispiel an, bei dem die Vereinigung von zwei Mengen eine der beiden Mengen ist, also z. B.  $M \cup N = M$ . Skizzieren Sie auch ein passendes Venn-Diagramm zur Situation. Überlegen Sie sich zudem zwei Aussagen (möglichst Alltagsbeispiele), deren Disjunktion entsprechend eine der beiden Aussagen ergibt.

## Negation, Komplement und Differenz

Die **Negation** überführt die Aussage ins Gegenteil:  $\neg A$  (lies: „Non/nicht  $A$ “).

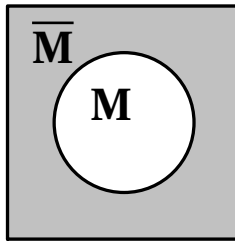
Die Negation von  $A =$  „Ich schwimme gerne“ ist  $\neg A =$  „Es gilt nicht, dass ich gerne schwimme“ oder kurz „Ich schwimme nicht gerne“.

Die negierte Aussage ist genau dann wahr, wenn die ursprüngliche Aussage falsch ist. Je

nach Kontext kann es einfacher sein, eine Aussage zu validieren oder die negierte Aussage zu widerlegen (später mehr dazu).

In der Sprache der Mengenlehre schreiben wir  $\overline{M}$  (lies: „ $M$  quer“) für das **Komplement**. Damit ist alles außer  $M$  gemeint (bezüglich der Obermenge / dem Universum, aus der  $M$  stammt, vgl. Bild 1.5.).

$$\overline{M} = \{x \mid \neg(x \in M)\} = \{x \mid x \notin M\}$$



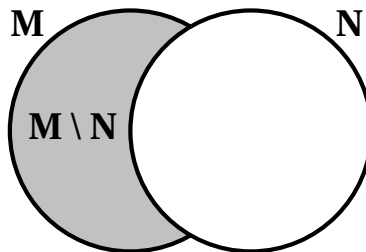
**Bild 1.5** Venn-Diagramm zum Komplement einer Menge

**Beispiel:**

Um das Komplement einer Menge angeben zu können, muss man wissen, was ihre Obermenge ist. Mit Bezug auf unsere Obermenge Korb = {Apfel, Birne, Chicorée} wäre das Komplement der Menge {Apfel, Chicorée} die einelementige Menge {Birne}. ▲

Sehen wir  $\{-5, 3, 7, 9\}$  als einen Ausschnitt aus den ganzen Zahlen an, so wären alle ganzen Zahlen *außer*  $\{-5, 3, 7, 9\}$  ihr Komplement. Wir erkennen daran, dass es praktisch wäre, die **Differenz** von Mengen bilden zu können:  $M \setminus N$  (lies: „ $M$  ohne  $N$ “), vgl. Bild 1.6.

$$M \setminus N = \{x \mid x \in M \wedge x \notin N\}$$



**Bild 1.6** Venn-Diagramm zur Differenz von zwei Mengen

**Beispiele:**

$$\{1, 2, 3, 4, 5\} \setminus \{1, 3, 5\} = \{2, 4\}.$$

$$\{3, 4\} \setminus \{1, 3, 9\} = \{4\}.$$

$$\{3, 4\} \setminus \{1, 3, 4, 9\} = \emptyset.$$

Und mit Bezug auf unser letztes Beispiel zum Komplement:  $\overline{\{-5, 3, 7, 9\}} = \mathbb{Z} \setminus \{-5, 3, 7, 9\}$ . ▲



### Verständnisfrage 8

Wie kann man ein ausschließendes Oder (Entweder-Oder) mit den gegebenen Symbolen in Logikschreibweise und in Mengenschreibweise ausdrücken?  
Wie kann man es als Venn-Diagramm an zwei Mengen visualisieren?

### Quiz – Vorlesung 1

1. Womit lässt sich folgende Aussage darstellen? „Ich bin 20 Jahre alt, lebe in Deutschland und in meiner Band spiele ich Gitarre oder singe.“

- $(A \wedge B) \vee (C \wedge D)$
- $(A \vee B) \wedge C \vee D$
- $A \wedge B \wedge (C \vee D)$
- $A \vee B \wedge C \wedge D$

2. Welche Menge ist identisch mit  $((\{-2, 0, 4, 6\} \cap \mathbb{N}) \cup \{0, 0.5, 1\}) \setminus (\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z})$ ?

- $\{1, 4, 6\}$
- $\{0, 1, 4, 6\}$
- $\{0.5, 4, 6\}$
- $\emptyset$



### Vorlesung 2



### Wiederholung

- Zahlbereiche  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{I}$ ,  $\mathbb{R}$
- Rechengesetze, binomische Formeln
- Mengenlehre und Logik (Konjunktion, Disjunktion, Negation)

## Implikation und Teilmenge

Im Alltag und in allen Wissenschaften werden ständig Aussagen aus anderen Aussagen gefolgert. Eine Implikation ist eine **Wenn-Dann-Aussage**:  $A \Rightarrow B$  (lies: „Wenn  $A$ , dann  $B$ “). Die linke Seite ( $A$ ) nennt man **Prämisse**, aus der die **Konklusion** ( $B$ ) gefolgert wird.

### Beispiele:

Die Implikation „Wenn mir kalt ist, dann ziehe ich einen Pulli an“ besteht aus den Einzelaussagen  $A =$  „Mir ist kalt“ und  $B =$  „Ich ziehe einen Pulli an“.

Auch die Aussage „Jede gerade Zahl ist durch 2 teilbar“ kann als Implikation formuliert werden: „Wenn eine Zahl gerade ist, so ist sie durch 2 teilbar.“ Diese Umformulierung ist sehr nützlich, wenn man die Aussage beweisen oder in komplexeren Zusammenhängen nutzen will. ▲

# Stichwortverzeichnis

## A

Abbildungsvorschrift 159  
Ableitung 245  
Ableitungsregeln 250  
Achsenabschnittsgleichung 121  
Additionstheoreme 87  
Allquantor 16  
alternierend 163  
Amplitude 184  
Aufhängevektor 118

## B

b-adische Darstellung 45  
Basis 74  
Basiswechselmatrix 84  
Beschränktheit 192  
Betrag 145  
Beweismethoden 22  
bijektiv 180  
Bildungsgesetz 163  
Binomialkoeffizient 218  
Binomische Formeln 4  
Bogenmaß 50  
Bruchrechnung 28

## D

De Morgan 18  
Definitionsmenge 160  
Definitionszeichen 13  
Dezimalsystem 43  
Differential 257  
Differentialquotient 245  
Differenzenquotient 245  
Dimension 74  
Disjunktion 8  
Distributivgesetz 3  
Doppelsumme 215

Doppelte Inklusion 25  
Dualsystem 45

## E

Eigenraum 117  
Eigenvektor 115, 117  
Eigenwert 115  
Existenzquantor 16  
Exponent 30  
Exponentialform 147  
Exponentialreihe 234  
Extremwert 272

## F

Fakultät 218  
Fallunterscheidung 25  
Folge 162  
Frequenz 184  
Funktionsform 120

## G

Gaußsche Zahlenebene 144  
Gauß-Verfahren 56  
geometrische Reihe 226  
geometrische Summenformel 217  
Gleichung 27  
Gradmaß 50

## H

harmonische Reihe 228  
Hauptwert 151  
Hesse-Normalform 125  
Hexadezimalsystem 47  
homogen 53  
Hospital 268

## I

imaginäre Einheit 141  
Imaginärteil 141



Implikation 10  
Indexshift 223  
inhomogen 53  
injektiv 179  
Intervall 14  
Intervallschachtelung 209  
Invertierbarkeit 105

**K**

Kartesisches Produkt 15  
Kettenregel 250  
kleiner Gauß 216  
komplanar 100  
komplex Konjugierte 143  
komplexe Zahlen 141  
Konjunktion 7  
Koordinatentransformation 82  
Kreisfrequenz 184  
Kreuzprodukt 98  
Krümmungsverhalten 274

**L**

Limes 189  
Lineares Gleichungssystem (LGS) 53  
Linearfaktorisierung 33  
Linearisierung 258  
Linearkombination 66  
Logarithmus-Trick 197, 252, 270  
Logik 6  
Lotfußpunkt 130

**M**

Mengenlehre 5  
Mittelwert 215  
Modulo-Methode 46  
Monotonie 181

**N**

Negation 8  
Normaleneinheitsvektor 123  
Normalenform 124  
Normalenvektor 123  
Normierung 91  
Nullphasenwinkel 184

**O**

Orthogonalität 92  
Orthogonalsystem 95  
Orthonormalität 92  
Ortskurve 279

**P**

Parameterdarstellung 185  
Parameterform 118

Periodendauer 184  
Periodizität 184  
Polarform 146  
Polarkoordinaten 79  
Präfix 50  
Produktregel 250  
Projektion 96

**Q**

Quotientenkriterium 232  
Quotientenregel 250

**R**

Realteil 141  
Rechengesetze 2  
Reihe 226  
Richtungsvektor 118  
Rotationsmatrix 87

**S**

SI 49  
Skalarprodukt 90  
Skalierung 86  
Spann 67  
Spatprodukt 100  
stetig differenzierbar 245  
Stetigkeit 204  
Subtraktionsmethode 46  
Summenschreibweise 214  
surjektiv 180  
Symmetrie 183

**T**

Teilmenge 11  
Termumformung 27  
Treppenstufenform 56

**U**

Umkehrfunktion 176  
Untervektorraum 75

**V**

Verkettung 175

**W**

Wahrheitstafel 17  
Wertemenge 160  
Wertetabelle 159  
Winkel 90

**Z**

Zahlbereiche 1  
Zeiger 144  
Zuordnung 159