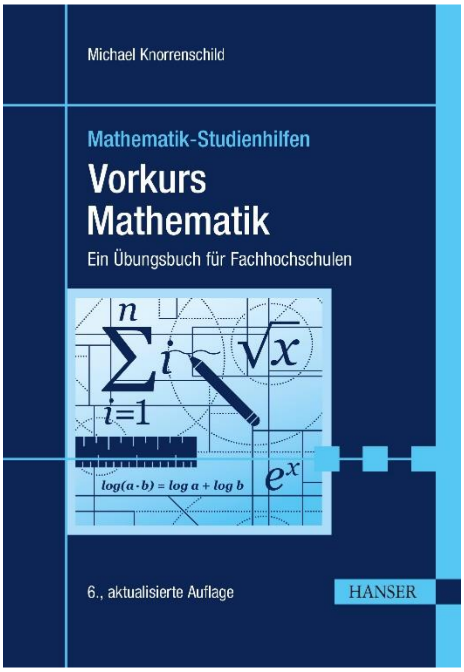

Leseprobe

zu

Vorkurs Mathematik

von Michael Knorrenschild

Print-ISBN: 978-3-446-47516-8
E-Book-ISBN: 978-3-446-47717-9

Inhalt

Vorwort

In einer großen Anzahl von Studiengängen sehen sich Studierende zu Beginn mit dem Fach Mathematik konfrontiert. Dies löst erfahrungsgemäß unterschiedliche Erwartungshaltungen bei den Betroffenen aus. Während die Bedeutung des Faches gerade in den Ingenieurstudiengängen unumstritten ist, klafft zwischen den Vorkenntnissen der Neustudierenden und dem anfänglichen Niveau der Hochschulmathematik eine immer größer werdende Lücke. Diese hat verschiedene Ursachen, dazu zählen ein verändertes schulisches Lernverhalten und teilweise Mängel in den Rahmenbedingungen für die Grundlagenlehre in den Hochschulen.
Vielfach angebotene Vorkurse der Hochschulen dienen der Auffrischung der Schulmathematik, jedoch wo Kenntnisse Lücken aufweisen, gibt es wenig aufzufrischen, sondern gilt es sich manche Themen erst von Grund auf neu anzueignen. Das ist in wenigen Wochen vor Beginn des Studiums nicht zu bewerkstelligen, trotz allen Bemühens und guten Willens auf beiden Seiten.
So bleibt es vielfach der Eigeninititative der Studierenden überlassen, sich um das Schließen der Lücken zu kümmern. Zu diesem Zweck gibt es bereits eine Reihe von Vorkurs-Büchern auf dem Markt.
Meiner Erfahrung nach ist das Hauptproblem die mangelnde Vertrautheit mit elementaren mathematischen Konzepten und fehlende Sattelfestigkeit in der Anwendung mathematischer Techniken. Sind diese Fundamente erst einmal gelegt, bereitet das Verständnis fortgeschrittener mathematischer Konzepte wie Ableitungen und Integrale kaum Probleme.
Ziel dieses Buches ist, elementare mathematische Begriffe und Methoden auf eine solide Basis zu stellen. Ganz von Null auf geht das in einem Buch nicht, etwas Schulwissen sollte daher vorhanden sein. Ziel ist das für die Hochschule nötige vertiefte Verständnis und Einübung der Techniken an typischen Beispielen. Bewusst wird auf fortgeschrittenere Themen wie Grenzwerte, Differenzial- und Integralrechnung verzichtet. Stattdessen konzentriert es sich auf elementares Rechnen, den Funktionsbegriff, Techniken zum Lösen von Gleichungen und Ungleichungen, elementare Geo-

metrie und Trigonometrie. Dabei handelt es sich um Themen aus dem schulischen Curriculum etwa der zehnten Klasse – Konzepte, die zum mathematischen Rüstzeug in praktisch allen natur- und ingenieurwissenschaftlichen Studiengängen gehören.
Leserinnen und Leser sollen in diesem Buch angeregt werden, diese Konzepte im Selbststudium zu durchdringen und wirklich Verständnis zu erwerben – im Studium kommt später noch genug auf sie zu, was sie einfach als verkündete Weisheit hinnehmen müssen. Eine solide Grundlage hilft aber enorm bei einem guten Start in die neue Lernumgebung und einem zügigen Vorankommen, auch in anderen Fächern.

Diesem Zweck dienen viele Beispiele und Übungsaufgaben, die so ausgewählt sind, dass typische Problemstellungen abgedeckt werden. Zur Kontrolle gibt es Lösungen am Ende des Buches. Der kritischen Prüfung des eigenen Wissensstands dient eine Auswahl von Eingangstests, die schon von vielen Hochschulen eingesetzt werden, um Neustudierende die Auseinandersetzung mit eventuell vorhandenen Lücken zu ermöglichen.

In die Darstellungsweise fließen Erfahrungen ein, die ich selbst als Lehrender in verschiedenen Studiengängen an verschiedenen Hochschulen gesammelt habe, aber auch viele Kommentare und Anregungen aus dem Leserkreis an anderen Hochschulen und auch weiterführenden Schulen. Diese sind auch weiterhin gern gesehen.
Für die stets angenehme Zusammenarbeit von den Anfängen dieses Buchs bis hin zur Betreuung bei den Neuauflagen danke ich den verschiedenen Teams des Hanser-Verlags, die das Buch im Laufe der Jahre professionell begleitet haben.

Für die vorliegende sechste Auflage wurden nur kleinere Änderungen vorgenommen, so dass die verschiedenen Auflagen auch parallel im Unterricht verwendet werden können.

Bochum, im April 2023 Michael Knorrenschild

1 Elementares Rechnen

1.1 Die Grundrechenarten

Die einfachste Verknüpfung zweier Zahlen a und b ist die Addition, das Ergebnis ist die Summe $a+b$. Die Umkehrung der Addition ist die Subtraktion, die zur Differenz $a-b$ führt. Die Subtraktion von b ist nichts anderes als die Addition der „Gegenzahl“ $-b$, also

$$a-b=a+(-b)$$

Geht man von den sogenannten „natürlichen Zahlen“ $1,2,3,\ldots$ aus, so sind deren Gegenzahlen keine natürlichen Zahlen mehr. Man bezeichnet die natürlichen Zahlen als $\mathbb{N}$. Wenn die Null noch dazu kommt, schreiben wir $\mathbb{N}_0$. Die Zahlen, die durch Addition und Subtraktion natürlicher Zahlen erzeugt werden können, sind die „ganzen Zahlen“, symbolisch $\mathbb{Z}$. Die ganzen Zahlen umfassen die natürlichen Zahlen und ihre Gegenzahlen und enthalten auch die Null (die gleich ihrer Gegenzahl ist).
Die Gegenzahl von b kann man auch als das Produkt $(-1)\cdot b$ berechnen. Es ist jedoch keineswegs so, dass $-b$ immer eine negative Zahl ist. Beispielsweise ist zu $b=-3$ die Gegenzahl $-b=-(-3)=3$.
Da die Subtraktion insbesondere also auch eine Addition ist, also keine wirklich neue Operation, werden wir im Folgenden, wenn wir „Addition oder Subtraktion“ meinen, einfach nur von „Addition“ sprechen. In einer Summe darf man die Reihenfolge der summierten Zahlen („Summanden“) vertauschen, das Ergebnis ist davon unabhängig. In einer Differenz ändert sich bei Vertauschung von a und b das Vorzeichen, es gilt:

$$b-a=-(a-b)$$

Die Klammern geben die Reihenfolge der Rechenoperationen vor: In $-(b-a)$ wird zuerst $b-a$ berechnet und dann das Vorzeichen geändert. Würde man hier die Klammern weglassen, so erhielte man $-b-a$, das ist nicht dasselbe wie $-(b-a)=a-b$.

Man kann $b-a$ auch als Summe von b und $-a$ sehen, also $b-a=b+(-a)$; hier darf die Reihenfolge ohne Schaden vertauscht werden und man erhält $b-a=b+(-a)=-a+b$. Wir halten fest:

Steht vor einer Klammer ein Minus-Zeichen, so müssen beim Auflösen der Klammern die Vorzeichen aller Summanden in der Klammer umgekehrt werden: $-(x+y)=-x-y$, $-(x-y)=-x+y$, $-(-x-y)=x+y$. ■

Natürlich können Klammern auch geschachtelt auftreten. Bei Rechnungen per Hand kann man sich dabei die Übersicht erleichtern, indem man verschiedene Sorten Klammern verwendet, etwa (,), [,], {, } usw. Diese Hilfe steht in Programmiersprachen nicht zur Verfügung, daher wollen wir hier auch nur die „runden“ Klammern verwenden und Leserin und Leser zu genauem Hinschauen motivieren.

Beispiel 1.1
Lösen Sie die Klammern in $-(a-(b+c-(5-(a+3))))$ auf und vereinfachen Sie soweit wie möglich.

Lösung: Wir lösen zuerst die Klammern auf der innersten Ebene auf:

$$\begin{aligned}-(a-(b+c-(5-(a+3)))) &= -(a-(b+c-(5-a-3)))\\ &= -(a-(b+c-5+a+3))\\ &= -(a-b-c+5-a-3)\\ &= -a+b+c-5+a+3=b+c-2.\end{aligned}$$ ■

Aufgabe

1.1 Lösen Sie in den folgenden Ausdrücken die Klammern auf und vereinfachen Sie soweit wie möglich.

a) $b-(a+2-(c+d-(3-a))+b)$
b) $c+(-3-d-(-(-4-b))-c-(d-2))$
c) $-(b+a-(c-3-d+b-(a+c+b-d)))$
d) $a+c-(d+a+2-(b+c-(-d+c)))$

Wir erkennen also:

Klammern dienen nicht der Zierde, auch nicht vorrangig der Übersicht, sondern stellen eine nicht vernachlässigbare Information über die Reihenfolge von Rechenoperationen dar. ■

In der Mathematik ist man bestrebt, Formeln möglichst kurz und bündig zu schreiben. Für wiederholte Additionen desselben Summanden hat man daher die Multiplikation zur Verfügung. So schreibt man beispielsweise anstelle von $a+a+a+a+a$ einfach das Produkt $5\cdot a$, oder noch kürzer $5\,a$. Die Umkehrung der Multiplikation ist die Division. Da die Division nichts anderes als die Multiplikation mit dem Kehrwert ist, also keine wirklich neue Operation, werden wir im Folgenden, wenn wir „Multiplikation oder Division" meinen, einfach nur von „Multiplikation" reden. Bei der Division ist eine Ausnahme zu beachten: Durch 0 kann nicht dividiert werden: Für *jedes* a gilt $0\cdot a=0$; für eine Umkehrung müssten wir das Produkt durch 0 dividieren und wieder a erhalten. Im Produkt 0 ist aber nicht mehr erkennbar, ob diese 0 aus $5\cdot 0$, $6\cdot 0$, oder wo auch immer herstammt, sodass eine Umkehrung nicht möglich ist. Das Ergebnis einer Division $a:b$, der sog. Quotient, wird meist als Bruch geschrieben: $a:b=\frac{a}{b}$ (natürlich muss $b\neq 0$ sein). Dabei heißt a der Zähler und b der Nenner des Bruches $\frac{a}{b}$.

Wir halten also fest:

> Die Multiplikation ist eine Abkürzung der Addition.
> Niemals(!!!) darf durch 0 dividiert werden.
> Bei Brüchen darf nie 0 im Nenner auftauchen.

Der Quotient zweier ganzer Zahlen muss keine ganze Zahl mehr sein. Man bezeichnet die Menge aller Zahlen, die als Quotient zweier ganzer Zahlen dargestellt werden können, als „rationale Zahlen", symbolisch $\mathbb{Q}$.

Einen Bruch aus zwei ganzen Zahlen kann man alternativ auch als *Dezimalzahl* schreiben. Dazu dividiert man Zähler durch Nenner fortlaufend mit Rest, wie man es in der Grundschule gelernt hat, und erhält beispielsweise:

$$\begin{aligned}
\frac{78}{125} &= 78:125 = 0\cdot 1+6\cdot\frac{1}{10}+2\cdot\frac{1}{100}+4\cdot\frac{1}{1000}=0.624\\
\frac{1}{9} &= 1:9 = 0\cdot 1+1\cdot\frac{1}{10}+1\cdot\frac{1}{100}+1\cdot\frac{1}{1000}+\ldots=0.111111\ldots=0.\overline{1}\\
\frac{37}{33} &= 37:33 = 1\cdot 1+1\cdot\frac{1}{10}+2\cdot\frac{1}{100}+1\cdot\frac{1}{1000}+2\cdot\frac{1}{10000}+\ldots\\
&= 1.12121212\ldots=1.\overline{12}
\end{aligned}$$

Diese Rechnung findet im 10er-System (Dezimalsystem) statt, d. h. man verwendet nur die Ziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Man beachte den Unterschied zwischen *Ziffer* und *Zahl*: Eine Zahl besteht aus Ziffern gerade so wie ein Wort aus Buchstaben besteht. Die rationalen Zahlen besitzen eine abbrechende Dezimaldarstellung (Beispiel: $\frac{78}{125}$) oder eine periodische Dezimaldarstellung (Beispiel: $\frac{37}{33}$, $\frac{1}{9}$). Aus der Dezimaldarstellung von $\frac{1}{9}$ sehen wir übrigens, dass $\frac{9}{9} = 0.9999\ldots = 0.\overline{9}$; man kann also $1 = \frac{9}{9}$ auch als $1 = 0.\overline{9}$ darstellen[1].

Es gibt auch Zahlen mit nicht-periodischer, nicht-abbrechender Dezimaldarstellung, z. B. $\pi = 3.141592654\ldots$ Diese Zahlen können also nicht rational sein, sie werden daher *irrational* genannt. Man bezeichnet die Menge aller Zahlen mit abbrechender oder nicht-abbrechender Dezimaldarstellung als die *reellen Zahlen*, symbolisch $\mathbb{R}$. Die Menge der nicht-negativen reellen Zahlen wird mit $\mathbb{R}_+$ bezeichnet.

Aus verschiedenen Gründen gibt man oft Dezimalzahlen nicht mit allen Ziffern hinter dem Komma an, sondern nur mit einer begrenzten Anzahl. Dabei verwendet man *Rundung*.

Rundungsregeln:
Ist die erste weggelassene Ziffer $0, 1, 2, 3$ oder 4, so bleibt die letzte geschriebene Ziffer unverändert („Abrunden").
Ist die erste weggelassene Ziffer $5, 6, 7, 8$ oder 9, so wird die letzte geschriebene Ziffer um 1 erhöht („Aufrunden").

Beispiele:

π auf 2 Stellen nach dem Komma gerundet : $\pi = 3.141592\ldots \approx 3.14$
π auf 3 Stellen nach dem Komma gerundet : $\pi = 3.141592\ldots \approx 3.142$
π auf 4 Stellen nach dem Komma gerundet : $\pi = 3.141592\ldots \approx 3.1416$

Wer Genaueres über die dabei entstehenden Abweichungen wissen möchte, sei z. B. auf [3] verwiesen.

Nach diesem Exkurs über Dezimalzahlen wenden wir uns wieder den Grundrechenarten und ihren Regeln zu.

Da die Multiplikation quasi relativ zur Addition eine höhergestellte Operation ist, vereinbart man, um Klammern zu sparen, dass die Multiplikation stärker bindet als die Addition, kurz „Punktrechnung geht vor Strichrechnung". Es gilt also $a \cdot b + c = (a \cdot b) + c \neq a \cdot (b + c)$. Wiederum erkennt man, dass das Weglassen von Klammern die Bedeutung eines Ausdrucks ändert.
Oft spart man sich bei Produkten auch den Punkt zwischen den Faktoren; man schreibt also beispielsweise anstelle von $x \cdot y$ einfach $x\,y$. Dabei gibt es jedoch eine Situation, in der es zu Missverständnissen kommen kann: Ist nämlich ein Faktor eine Zahl, und der andere Faktor ein Bruch, so würde man anstelle von, sagen wir $2 \cdot \frac{1}{2}$, gemäß der erwähnten Konvention $2\,\frac{1}{2}$ schreiben. Damit entsteht aber ein Gebilde,

[1] Eine beliebte Streitfrage unter Möchtegernmathematikern ist, ob $0.\overline{9}$ vielleicht doch nicht gleich 1 sei, sondern eine andere Zahl, die nur eine Winzigkeit kleiner als 1 ist.

das aussieht wie ein gemischter Bruch, nämlich wie zweieinhalb, also 2.5, wogegen $2 \cdot \frac{1}{2}$ aber nichts anderes als 1 ist. Um das Problem zu umgehen, empfiehlt es sich, im Zusammenhang mit Mathematik auf gemischte Brüche konsequent zu verzichten – wie wir es in diesem Buch tun werden. Im Alltag sind gemischte Brüche allerdings verbreitet („Ich hätte gerne zweieinhalb Kilo Kartoffeln"), dort sollte man sie auch belassen.

Treten Multiplikation und Addition gemeinsam in einem Ausdruck auf, so ist das Distributivgesetz zu beachten:

$$\boxed{a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c}$$

Es ist also beispielsweise

$$5 \cdot (3+7) = 5 \cdot 3 + 5 \cdot 7, \qquad \text{Punkt- vor Strichrechnung}$$

wovon man sich durch Nachrechnen überzeugen sollte. Außerdem ist natürlich

$$5 \cdot (3+7) \neq 5 \cdot 3 + 7.$$

Tatsächlich, die Klammern dürfen also nicht weggelassen werden!
Die Anwendung des Distributivgesetzes in der obigen Form bezeichnet man auch schlicht als „Ausmultiplizieren".
Man muss jedoch auch in der Lage sein, das Distributivgesetz von rechts nach links anzuwenden.

$$\boxed{a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c)}$$

Diesen Vorgang nennt man auch „Ausklammern", also beispielsweise:

$$5 \cdot 3 + 5 \cdot 7 = 5 \cdot (3+7).$$

Hier wird der gemeinsame Faktor 5 ausgeklammert. Um auszuklammern, ist – außer der Kenntnis des Distributivgesetzes – erforderlich, dass man den gemeinsamen Faktor, in diesem Fall 5, erkennt. Für das Erkennen solcher Merkmale in Ausdrücken gibt es keine Regeln; dies ist eine Erfahrungssache, also ist hier Üben, Üben, Üben angesagt.

Will man die für ein Ingenieurstudium nötigen Rechenfertigkeiten erwerben, so ist Folgendes nützlich zu wissen:

> **!** Ebensowenig wie man Klavierspielen durch häufigen Besuch von Klavierkonzerten erlernt, lernt man Rechnen durch Lesen von Mathematik–Büchern (auch nicht von diesem Buch!) oder durch Besuch von Vorlesungen. ■

Bestehen in einem Produkt beide Faktoren aus einer Summe, so gilt:

$$\boxed{(a+b) \cdot (c+d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d}$$

In Worten, es ist jeder Summand des einen Faktors mit jedem Summanden des anderen Faktors zu multiplizieren und alle entstehenden Produkte sind zu addieren. Man sollte auch üben, solche Sätze sprachlich und inhaltlich zu erfassen; dann erkennt man, welche enormen Vorteile die Kürze und Präzision der Formelsprache bietet.

Aufgabe

1.2 Multiplizieren Sie die folgenden Ausdrücke aus und fassen Sie so weit wie möglich zusammen.

a) $a(c+b)-c(b+a)+b(c-a)$

b) $a(c+b(a-c))-c(b(a-1)+a)-b(c-a(b-a))$

c) $(a+b)(a-c)-(a-b)(b+c)$

d) $(a+b-c)(a+c)-(a-c)(b+a+c)$

e) $(a+b)(a-c(b-c))-(a-b(c-a))(b-c)$

f) $(a+b-c)(a+c-b)+(a-c-b)(b+a+c)$

Spätestens jetzt kommen uns natürlich die bekannten binomischen Formeln in den Sinn, die übrigens, entgegen anders lautenden Gerüchten, nicht nach einem Mathematiker namens Binomi benannt sind. Vielmehr heißen sie so, weil sie aus zwei („bi") Ausdrücken zusammengesetzt sind.

Binomische Formeln

Für alle a, b gilt:

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$$
$$(a+b)(a-b) = a^2-b^2$$

■

Auf die drei binomischen Formeln wird oft auch als erste bzw. zweite bzw. dritte binomische Formel Bezug genommen.

Beispiel 1.2
Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke so weit wie möglich unter Verwendung der binomischen Formeln.

$$(a+2b)^2+(2b-a)(2b+a) \text{ und } (a+b+c)(a+c-b)$$

Lösung: Im ersten Ausdruck warten die erste und die dritte binomische Formel auf Anwendung:
$(a+2b)^2+(2b-a)(2b+a) = a^2+2\cdot 2ab+(2b)^2+(2b)^2-a^2 = 4ab+8b^2$.
Sicherheitshalber weisen wir ausdrücklich darauf hin, dass wir hier die Regel $(2b)^2 = 2b2b = 4b^2$ verwendet haben.
Wenn wir im zweiten Ausdruck erkennen, dass

$$(a+b+c)(a+c-b) = ((a+c)+b))((a+c)-b)$$

ist, so können wir zunächst die dritte und anschließend die erste binomische Formel anwenden:
$(a+b+c)\,(a+c-b) = ((a+c)+b))\,((a+c)-b) = (a+c)^2 - b^2 = a^2 + 2\,a\,c + c^2 - b^2$.
Es ist eine große Erleichterung, wenn man so geübt ist, dass man sofort erkennt, wenn man durch geringfügige Umstellungen binomische Formeln anwenden kann.

■

Aufgabe

1.3 Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke so weit wie möglich unter Verwendung der binomischen Formeln.

a) $(2\,a+b)\,(2\,a-b)+(c+b)\,(c-b)$

b) $(a+b+c)\,(-a+b+c)+(2\,c+b-a)^2-2\,(b+c)^2$

c) $(b-a)\,(a+b)+(c+b-a)\,(c-b-a)-(b-c)^2$

d) $(2\,b-3\,a)\,(3\,a-2\,b)-(2\,a-b)^2$

Natürlich kann man auch die binomischen Formeln von rechts nach links lesen und auf diese Weise anwenden. Dadurch kann man in manchen Fällen einen Ausdruck vollständig in Faktoren zerlegen.

Beispiel 1.3
Zerlegen Sie die Ausdrücke $16\,a^2 - 25\,b^2$ und $4\,a^2 + 12\,a\,b + 9\,b^2$ mithilfe der binomischen Formeln in Faktoren.

Lösung: $16\,a^2 - 25\,b^2 = (4\,a)^2 - (5\,b)^2 = (4\,a+5\,b)\,(4\,a-5\,b)$
$4\,a^2 + 12\,a\,b + 9\,b^2 = (2\,a)^2 + 2\cdot(2\,a)\cdot(3\,b) + (3\,b)^2 = (2\,a+3\,b)^2$. ■

Aufgabe

1.4 Zerlegen Sie die folgenden Ausdrücke mithilfe der binomischen Formeln in Faktoren.

a) $4\,a^2 + 20\,a\,b + 25\,b^2$ b) $169\,x^2 - 312\,x\,y + 144\,y^2$

c) $x^2 + 2\,x\,y + y^2 - 9\,z^2$ d) $x^2 + 6\,x\,z - y^2 + 9\,z^2$

Oft lassen sich Ausdrücke mithilfe der binomischen Formeln nicht vollständig in Faktoren zerlegen, sondern beispielsweise nur in ein Quadrat plus einen restlichen Ausdruck. Dies ist in vielerlei Hinsicht sehr nützlich, wie wir später noch sehen werden. Es kommt dabei darauf an, den Anfang einer binomischen Formel (von rechts nach links gelesen!) zu erkennen und den fehlenden Ausdruck zu ergänzen, um ein vollständiges Quadrat zu erhalten. Daher wird diese Methode auch „quadratische Ergänzung" genannt.

Beispiel 1.4
Schreiben Sie den Ausdruck $4\,a^2+24\,a\,b+9\,b^2$ mit der quadratischen Ergänzung um.

Lösung: Offensichtlich handelt es sich nicht um ein komplettes Binom (denn dazu müsste der mittlere Ausdruck ja $2\cdot(2\,a)\,(3\,b) = 12\,a\,b$ lauten). Der vorgegebene Ausdruck soll nun in der Form des Ansatzes $(2\,a+c)^2+d\,b^2$ geschrieben werden, mit passenden Termen c und d. Vergleicht man dieses mit dem gegebenen Ausdruck, so sieht man, dass der „gemischte Ausdruck" $24\,a\,b$ offensichtlich gleich dem gemischten Ausdruck im Ansatz sein muss, also $24\,a\,b = 2\cdot(2\,a)\,c$, was auf $c = 6\,b$ führt. Damit haben wir:

$$\begin{aligned}4\,a^2+24\,a\,b+9\,b^2 &= (2\,a)^2+2\cdot(2\,a)\cdot(6\,b)+9\,b^2\\ &= (2\,a)^2+2\cdot(2\,a)\cdot(6\,b)+(6\,b)^2-(6\,b)^2+9\,b^2\\ &= (2\,a+6\,b)^2-27\,b^2.\end{aligned}$$

Man kann natürlich das Ganze auch von hinten aufzäumen und passend zu $9\,b^2$ quadratisch ergänzen:

$$\begin{aligned}9\,b^2+24\,a\,b+4\,a^2 &= (3\,b)^2+2\cdot(3\,b)\cdot(4\,a)+4\,a^2\\ &= (3\,b)^2+2\cdot(3\,b)\cdot(4\,a)+(4\,a)^2-(4\,a)^2+4\,a^2\\ &= (3\,b+4\,a)^2-12\,a^2.\end{aligned}$$

Eine weitere Variante ist $4\,a^2+24\,a\,b+9\,b^2 = (2\,a+3\,b)^2+12\,a\,b$. Alle drei sind legitime quadratische Ergänzungen. Welche davon in einer konkreten Anwendung geeigneter ist, hängt vom Zusammenhang ab. Man sollte daher alle Möglichkeiten im Auge behalten – es ist eine Illusion anzunehmen, dass in Anwendungen die Ausdrücke schön von links nach rechts so angeordnet auftauchen, dass die zweckmäßigste links steht.

■

Aufgabe

1.5 Schreiben Sie die folgenden Ausdrücke mit der quadratischen Ergänzung jeweils auf zwei verschiedene Weisen um. Überprüfen Sie Ihr Ergebnis durch Ausmultiplizieren.

a) $64\,x^2+112\,x+64$ b) $4\,x^2-36\,x\,y+36\,y^2$

c) $16\,x^2-56\,x\,y+196\,y^2$ d) $16\,x^2-40\,x\,y+100\,y^2$

Wir haben oben bereits Ausdrücke, die aus binomischen Formeln stammen, vollständig in Faktoren zerlegt. Das vollständige Zerlegen eines Ausdrucks nennt man auch „Faktorisieren". In vielen Situationen ist das Faktorisieren von Ausdrücken sehr nützlich; einige Anwendungen findet man in Kapitel 4.

Wir wollen hier noch einen einfachen Fall genauer betrachten, nämlich den von Ausdrücken der Form $x^2 + a\,x + b$. Hier gilt:

$$\boxed{(x+p)\,(x+q) = x^2 + (p+q)\,x + p\,q}$$

Will man einen vorgegebenen Ausdruck $x^2 + a\,x + b$ faktorisieren, so muss man also zwei Zahlen p und q finden, sodass $p + q = a$ und $p\,q = b$ ist. Dies ist eine nützliche Erkenntnis, denn wenn man aus irgendeinem Grund p schon kennt, so erhält man q natürlich sofort über $q = a - p$ (oder genauso schnell über $q = \frac{b}{p}$, falls $p \neq 0$). Kennt man zunächst weder p noch q, weiß aber, dass p und q ganze Zahlen sind, so findet man oft p und q durch schlichtes Raten.

Satz von Vieta[2]

$x^2 + a\,x + b = (x+p)\,(x+q)$ ist dann und nur dann für alle x erfüllt, wenn $a = p + q$ und $b = p\,q$ gilt.

■

Beispiel 1.5
a) Faktorisieren Sie $x^2 + 29.5\,x + 91$, wobei $p = 26$ gegeben ist.
b) Faktorisieren Sie $x^2 - 7\,x + 12$, wenn Sie wissen, dass p und q ganze Zahlen sind.

Lösung: a) Wie wir gesehen haben, muss $p + q = 29.5$ gelten; da $p = 26$ bekannt ist, muss also $q = 3.5$ sein. Die gesuchte Faktorisierung lautet damit $x^2 + 29.5\,x + 91 = (x+26)\,(x+3.5)$. – Ein anderer Weg: Wie wir gesehen haben, muss $p\,q = 91$ gelten; da $p = 26$ bekannt ist, muss also $q = 91/26 = 3.5$ sein. Je nachdem wie „ krumm" die Zahlen sind, kann man also selbst entscheiden, ob man lieber dividieren oder subtrahieren möchte.
b) Es gilt also $p\,q = 12$. Da p und q ganze Zahlen sind, gibt es nur die Möglichkeiten $12 = 1 \cdot 12 = 2 \cdot 6 = 3 \cdot 4 = (-1) \cdot (-12) = (-2) \cdot (-6) = (-3) \cdot (-4)$. Noch einmal soviele Möglichkeiten erhält man, wenn man die Rollen von p und q vertauscht – die Zerlegung ergibt damit aber keine neuen Faktoren, sondern wieder dieselben in anderer Reihenfolge. Außerdem muss noch $p + q = -7$ gelten, dies ist nur mit der Wahl $p = -3$, $q = -4$ (oder umgekehrt) möglich. Die gesuchte Faktorisierung lautet damit $x^2 - 7\,x + 12 = (x-3)\,(x-4)$. ■

[2] Vieta, eigentlich François Viète, 1540-1603, franz. Jurist und Freizeitmathematiker

Aufgaben

1.6 Faktorisieren Sie die folgenden Ausdrücke bei vorgegebenem p oder q. Überprüfen Sie Ihre Faktorisierung durch Ausmultiplizieren.

a) $x^2 - 13.5\,x + 45,\ p = -6$ b) $x^2 + 3.5\,x - 36,\ q = 8$

c) $x^2 - 19.75\,x - 95,\ p = 4$ d) $x^2 - 18\,x + 8.75,\ q = -0.5$

1.7 Faktorisieren Sie die folgenden Ausdrücke, wenn Sie wissen, dass dabei p und q ganze Zahlen sind. Überprüfen Sie Ihre Faktorisierung durch Ausmultiplizieren.

a) $x^2 + x - 56$ b) $x^2 - 21\,x + 54$ c) $x^2 - 8\,x - 48$

d) $x^2 - 11\,x - 26$ e) $x^2 - 6\,x - 91$ f) $x^2 - 1024$

Bisher haben wir einiges über Addition, Subtraktion und Multiplikation aufgefrischt. Rechenregeln für die Division haben wir hier noch nicht gesehen. Wir haben schon erwähnt, dass Quotienten als Brüche geschrieben werden können, insofern gelangen wir nun zum Thema Bruchrechnung.

1.2 Bruchrechnung

Ein Bruch $\frac{a}{b}$ ist das Ergebnis der Division $a : b$; er gibt also das Größenverhältnis von a zu b an. Beispielsweise bedeutet $\frac{a}{b} = 2$, dass der Zähler a doppelt so groß ist wie der Nenner b. Logischerweise verändert sich ein Bruch daher nicht, wenn man Zähler und Nenner mit dem gleichen Faktor multipliziert.

> Ein Bruch wird erweitert, indem Zähler und Nenner mit dem gleichen Faktor multipliziert werden.

Das Rückgängigmachen einer Erweiterung ist demnach die Division von Zähler und Nenner durch dieselbe Zahl.

> Ein Bruch wird gekürzt, indem Zähler und Nenner durch die gleiche Zahl dividiert werden.

Beim Kürzen ist es zweckmäßig, wenn Zähler und Nenner faktorisiert sind, weil dann gemeinsame Faktoren, die gekürzt werden können, leicht sichtbar sind. Die Betonung liegt hier auf „Faktoren“:

Stichwortverzeichnis

Z