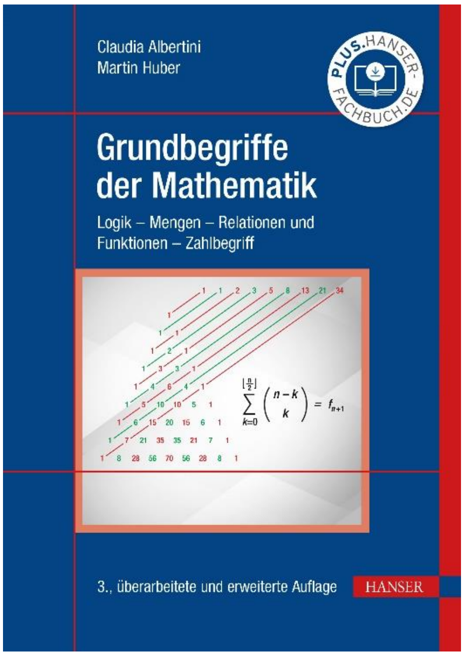

Leseprobe

zu

Grundbegriffe der Mathematik

von Claudia Albertini und Martin Huber

Print-ISBN: 978-3-446-47563-2
E-Book-ISBN: 978-3-446-47723-0

Vorwort

Vorwort zur dritten Auflage

Wir freuen uns sehr, dass wir eine dritte überarbeitete und erweiterte Auflage dieses Buches beim Hanser Verlag publizieren können. Der größere Umfang gibt uns Gelegenheit, jedes Kapitel mit Aufgaben zu versehen. Zudem haben wir den Text um mehrere kleine Exkurse bereichert, die als „Wissenswert“ gekennzeichnet sind.

Bedanken möchten wir uns bei Frau Natalia Silakova vom Hanser Verlag für die begeisterte Aufnahme der „Grundbegriffe“, sowie bei den Assistierenden der UZH Violetta Weger und Zouhair Ouaggag für ihre wertvollen Beiträge zu den Aufgaben.

Uster und Zürich, im November 2022 — Claudia Albertini / Martin Huber

Vorwort zur zweiten Auflage

Der Erfolg der ersten Auflage 2014 ermöglicht bereits jetzt eine zweite, bearbeitete und erweiterte Auflage 2015. Die zweite Auflage enthält zusätzlich einen Abschnitt über die symmetrische Differenz von Mengen. Zudem wurden einige Aktualisierungen und Korrekturen vorgenommen.

Zürich, im Januar 2015 — Martin Huber / Claudia Albertini

Vorwort zur ersten Auflage

Das vorliegende Buch ist aus der Vorlesung „Grundbegriffe der Mathematik“ entstanden, welche seit vielen Jahren an der Universität Zürich für Studierende des Sekundarlehramtes gehalten wird. Es wendet sich nicht nur an zukünftige Lehrpersonen, sondern auch an Studierende der Informatik und anderer technisch orientierter Studiengänge.

In den ersten beiden Kapiteln geht es um den sprachlichen Aspekt der Mathematik. In der Logik, dem Thema des ersten Kapitels, werden formale Sprachen betrachtet, welche zwar ein Optimum an Präzision bieten, jedoch eher unanschaulich sind. In diesem einführenden Buch wird bewusst nicht zwischen Syntax und Semantik unterschieden. Das zweite Kapitel ist den Mengen gewidmet. Mit der Mengensprache hat sich ein Werkzeug herausgebildet, welches ebenso präzis ist wie die Sprache der Prädikatlogik, ohne dass bei dessen Verwendung auf Anschaulichkeit verzichtet werden muss. Die meisten mathematischen Grundbegriffe basieren deshalb heute, sowohl in der Theorie als auch in ihren Anwendungen, auf dem Mengenbegriff. Letzteres gilt insbesondere für Relationen und Funktionen, welches die Themen des zentralen dritten Kapitels sind. Funktionen werden hier als spezielle Relationen definiert. Ein separater Abschnitt ist den Äquivalenz- und Ordnungsrelationen gewidmet.

In den Kapiteln 1 bis 3 geben Zahlen und Zahlmengen immer wieder Beispiele ab, mit deren Hilfe Grundbegriffe der Mathematik illustriert werden. Umgekehrt werden im vierten Kapitel die eingeführten Grundbegriffe zum Aufbau der Zahlen verwendet. Die Menge der natürlichen Zahlen wird hier axiomatisch eingeführt. Der Fokus liegt dabei auf Induktion und Rekursion. Für die Erweiterung zu den Mengen der ganzen bzw. rationalen Zahlen werden dann geeignete Modelle konstruiert. Im letzten Kapitel geht es schließlich um die Mächtigkeit endlicher Mengen, mit einem Ausblick in die Kombinatorik und einer Herleitung des Binomischen Lehrsatzes.

Danken möchten wir dem ehemaligen Direktor der Sekundar- und Fachlehrerausbildung an der Universität Zürich, Herrn Walter Hohl, der die Vorlesung zunächst gehalten und später mit großem Wohlwollen begleitet hat. Ein besonderer Dank geht an die beiden Assistenten an der Universität Zürich Tobias Berner und Marko Seric für die kompetente Hilfe beim Erstellen der Druckvorlage des Manuskripts.

Außerdem danken wir Herrn Jürgen Weiß vom unabhängigen Wissenschaftsverlag „Edition am Gutenbergplatz Leipzig“ für die gute und effiziente Zusammenarbeit.

Zürich, im Januar 2014 Martin Huber / Claudia Albertini

Inhalt

1 Logik

Es geht zunächst um die Frage, welche *Sprache* für den präzisen Ausdruck mathematischer Sachverhalte geeignet sei. Die *Umgangssprache* ist anschaulich und handlich, jedoch sind viele ihrer Ausdrücke und Wendungen unscharf oder mehrdeutig. Deshalb ist sie für unsere Zwecke nicht immer geeignet. In der Mathematischen Logik werden *formale Sprachen* betrachtet. Eine solche Sprache bietet das Maximum an Präzision, sie ist jedoch eher unanschaulich und unhandlich.

1.1 Sprachliche Grundelemente

In jeder wissenschaftlichen Theorie werden Erfahrungsbereiche in Begriffe gefasst. Begriffe werden in einer *Sprache* formuliert, und diese Sprache ist aus gewissen *Grundelementen* aufgebaut. In der Mathematik sind diese Grundelemente die *Konstanten* und die *Variablen*.

Beispiel 1 (aus der Arithmetik):

- Konstante: „Zahl“, 0, 1, +, π (Kreiszahl), e (Eulersche Zahl)
- Variable: $a, b, c, \ldots, x, y, z; A, B, C, \ldots$ (lateinische Buchstaben)

Die **Konstanten** haben eine genau festgelegte Bedeutung, die im Laufe der Überlegungen unverändert bleibt. Die **Variablen** haben keine selbständige Bedeutung; sie stehen für gewisse Objekte (in der Arithmetik meist für Zahlen) – sie sind Platzhalter, Leerstellen (wie bei einem Formular).

Zur *Illustration des Unterschieds* zwischen Konstanten und Variablen: Die Frage, ob 0 eine ganze Zahl sei, ist sinnvoll; sie kann mit *ja* oder *nein* beantwortet werden. Hingegen macht die Frage: „Ist x eine ganze Zahl?“ keinen Sinn.

Aussagen und Aussageformen

Eine **Aussage** (im Sinne von Aristoteles[1]) ist ein sprachliches Gebilde (im weitesten Sinne), von dem prinzipiell feststeht, ob es *wahr* oder *falsch* ist.

Bild 1.1 Aristoteles

Beispiel 2

a) Zürich ist die Hauptstadt der Schweiz.

b) $2+3=5$.

c) Die Gleichung $x^3 + y^3 = z^3$ besitzt außer der trivialen keine ganzzahligen Lösungen.

d) Tycho Brahe wurde 1601 von J. Kepler vergiftet.

e) $x+3=5$

Nach der obigen Umschreibung sind die Beispiele a) bis d) Aussagen: a) ist falsch, b) ist wahr. Bei c) und d) sind wir zwar überzeugt, dass sie entweder wahr oder falsch sind; wir sind jedoch nicht in der Lage, dies zu entscheiden. Dass Aussage c) wahr ist, hat schon Leonhard Euler[2] bewiesen. Diesen Beweis nachzuvollziehen erfordert jedoch mathematische Kenntnisse, die über das hinausgehen, was man am Gymnasium üblicherweise gelernt hat. Der Beweis, dass c) wahr ist, war ein erster Schritt zur Lösung des berühmten Fermatschen Problems (vgl. Kapitel 2, S. 30). Zu d): Seit kurzem weiß man, dass Tycho Brahe an einer Bleivergiftung gestorben ist. Diese Tatsache hat zu wilden Spekulationen geführt. Beispiel e) ist keine Aussage: Da x eine Variable ist, kann nicht entschieden werden, ob dies wahr oder falsch ist.

„$x+3=5$" ist eine **Aussageform**, d. h. ein sprachliches Gebilde mit mindestens einer Variablen, welches nach Einsetzen von Konstanten für die Variablen in eine Aussage übergeht. Hier ist z. B. „$2+3=5$" eine wahre, „$0+3=5$" hingegen eine falsche Aussage.

[1] Aristoteles (384–322 v. Chr.), bedeutender griechischer Philosoph

[2] Leonhard Euler (1707–1783), bedeutender Schweizer Mathematiker, Naturwissenschaftler und Ingenieur

Begriff der Lösung

Eine gegebene Aussageform wird von einer Konstanten **erfüllt**, falls durch Einsetzen dieser Konstanten eine wahre Aussage entsteht. Man sagt, diese Konstante sei eine **Lösung** der betreffenden Aussageform.

Beispiel 3

a) „$x+3=5$“: 2 ist Lösung; 0, 1 sind keine Lösungen.

b) „$x+y=5$“: die Paare $(2,3)$, $(1,4)$ sind Lösungen.

c) „$x<3$“: 1, 2 sind Lösungen; 3, 4 sind keine Lösungen.

Begriff des Terms

„x^2-5x+6“ ist keine Aussageform, sondern ein (arithmetischer) *Term*.

Terme können *iterativ* (d. h. schrittweise) wie folgt definiert werden:

1. Konstante und Variable sind Terme.
2. Ersetzen einer Variablen durch einen Term ergibt wieder einen Term.
3. Ausüben der im betrachteten Bereich definierten Operationen auf Terme liefert wieder Terme.

Beispiel 4 (aus der Arithmetik):

$$T_1 := x^2-5x+6\,, \qquad T_2 := 2^n+1\,, \qquad T_3 := \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\,.$$

Die Terme T_1, T_2, T_3 sind aus Konstanten und Variablen mittels mehrfacher Anwendung von 3. gebildet worden.

Zur Anwendung von Regel 2.:

- Einsetzen von 4 in den Term T_1 liefert den Term $4^2-5\cdot4+6$.
- Einsetzen von T_2 in T_1 liefert $(2^n+1)^2-5(2^n+1)+6 =: T_4$. Durch Umformung erhalten wir $2^{2n}-3\cdot2^n+2 =: T_5$.
  Beachte, dass die Terme T_4 und T_5 verschieden sind. Da das Einsetzen einer beliebigen Konstanten stets dasselbe Ergebnis liefert, nennt man sie *äquivalent* (deutsch: *gleichwertig*).

Generelle und existentielle Aussagen

1. Die Aussageform „$x+y=y+x$“ ist im Bereich der (ganzen) Zahlen **allgemeingültig** oder eine **Identität**; d. h. sie wird von jeder Zahl erfüllt. Dies kann auch so ausgedrückt werden:

   „Für beliebige Zahlen x, y gilt: $x+y=y+x$.“

Damit ist die gegebene allgemeingültige Aussageform in eine wahre Aussage übergegangen. Kürzer schreiben wir:

$$\forall x, y\left(x+y=y+x\right) \qquad \text{oder präziser:} \qquad \forall x \forall y\left(x+y=y+x\right).$$

Dies ist eine **generelle** Aussage; sie wird eingeleitet durch den **Allquantor** „$\forall x, y$" (in Worten: „für alle x, y"). Durch Voransetzen des Quantors „$\forall x, y$" sind die ursprünglich *freien* Variablen x, y *gebunden* worden. Durch Binden der freien Variablen geht eine Aussageform in eine Aussage über.

2. Die Aussageform „$x > y+1$" ist nicht allgemeingültig. Durch Voransetzen des Allquantors „$\forall x, y$" geht sie demzufolge in eine falsche Aussage über. (Beachte, dass *ein* Gegenbeispiel genügt!) Hingegen ist folgende Aussage wahr:

   „Es gibt eine Zahl x und es gibt eine Zahl y so, dass $x > y+1$."

   Setzt man nämlich $x = 4$ und $y = 2$ ein, so ist die Ungleichung erfüllt. (Beachte, dass eine Lösung genügt!)

   Für die obige Aussage schreiben wir kürzer:

$$\exists x, y\left(x>y+1\right) \qquad \text{oder präziser:} \qquad \exists x \exists y\left(x>y+1\right).$$

   Dies ist eine **existentielle** Aussage ; sie wird eingeleitet durch den **Existenzquantor** „$\exists x, y$" (in Worten: „es gibt x, y"). Wiederum *bindet* der Quantor „$\exists x, y$" die ursprünglich *freien* Variablen x, y.

3. In der Formel $\forall x, y\, \exists z\left(x=y+z\right)$ sind alle drei Variablen x, y, z durch Quantoren gebunden. Es handelt sich also um eine (wahre) Aussage; es ist dies eine sog. **bedingt existentielle Aussage**.

   Hingegen ist die Formel $\exists z\left(x=y+z\right)$ eine (allgemeingültige) Aussageform mit den freien Variablen x, y.

Bemerkung Auch in anderen Bereichen der Mathematik können Variable gebunden werden, beispielsweise

- $\sum_{k=1}^{n} k^2$: n ist eine freie, k eine gebundene Variable.
- $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$: f, a, b sind freie, x ist eine gebundene Variable.

Zur Bedeutung der Variablen

Die Verwendung von Variablen kann das Formulieren und Beweisen von mathematischen Lehrsätzen wesentlich erleichtern.

Beispiel 5 [Tar77, S. 26/27]

$$\forall x, y\ \left[x^3-y^3=(x-y)\left(x^2+x\cdot y+y^2\right)\right]$$

Formulierung ohne Variable:
„Die Differenz der dritten Potenzen zweier beliebiger Zahlen ist gleich dem Produkt der Differenz dieser Zahlen und der Summe dreier Summanden, von denen der erste das Quadrat der ersten Zahl, der zweite das Produkt der beiden Zahlen und der dritte das Quadrat der zweiten Zahl ist."

1.2 Der Aussagenkalkül

In einer wissenschaftlichen Theorie werden zwei Arten von Konstanten verwendet:

1. eine für die betreffende Wissenschaft charakteristische Art;
2. eine Art von Konstanten von viel allgemeinerer Natur: Ausdrücke, die nicht nur in dieser und in anderen Wissenschaften, sondern auch im täglichen Leben verwendet werden.

Zur ersten Art gehören z. B. Zahlen, Zahlmengen, Operationen mit Zahlen, Beziehungen zwischen Zahlen. Konstante der zweiten Art sind etwa: „nicht“, „und“, „oder“, „ist“, „wenn …, dann … “, „jeder“, „es gibt“, usw.

Die *Logik* befasst sich mit der Präzisierung der Bedeutung letzterer Konstanten. Sie kann deshalb als Grundlage für die anderen Wissenschaften betrachtet werden.

Zusammengesetzte Aussagen

1. Die **Negation** (oder **Verneinung**) einer Aussage p ist die Aussage „nicht p“, symbolisch $\neg p$.

Beispiel 1

p : Die Zahl $\frac{2}{3}$ ist positiv.	(p ist wahr.)
$\neg p$: Die Zahl $\frac{2}{3}$ ist nicht positiv.	($\neg p$ ist falsch.)
q : Die Zahl $\frac{2}{3}$ ist ganz.	(q ist falsch.)
$\neg q$: Die Zahl $\frac{2}{3}$ ist nicht ganz.	($\neg q$ ist wahr.)

Eine Aussage p ist wahr, wenn $\neg p$ falsch ist und umgekehrt; p und $\neg p$ *widersprechen* einander.

2. Die **Konjunktion** (oder das **logische Produkt**) zweier Aussagen p, q ist die zusammengesetzte Aussage „p und q“, symbolisch $p \wedge q$.

Beispiel 2 Es seien p, q wie oben. $p \wedge q$: $\frac{2}{3}$ ist positiv und ganz. ($p \wedge q$ ist falsch.)

Merksatz Die *Konjunktion* $p \wedge q$ ist nur dann wahr, wenn sowohl p als auch q wahr sind.

3. Die **Disjunktion** (oder die **logische Summe**) zweier Aussagen p, q ist die zusammengesetzte Aussage „p oder q“, symbolisch $p \vee q$.

Beispiel 3 Es seien p, q wie oben. $p \vee q$: $\frac{2}{3}$ ist positiv oder ganz. ($p \vee q$ ist wahr.)

Bemerkung In der Logik hat „*oder*“ *nicht-ausschließende* Bedeutung. Die Disjunktion $p \vee q$ ist also wahr, wenn *mindestens* eine der beiden Aussagen p, q wahr ist.

Merksatz Die Disjunktion $p \vee q$ ist nur dann falsch, wenn sowohl p als auch q falsch sind.

Bemerkung Man beachte die Diskrepanz zwischen Logik und Umgangssprache:

„$2 \cdot 2 = 5$ oder Zürich ist eine Großstadt“

ist *umgangssprachlich* keine sinnvolle, *logisch* aber eine wahre Aussage!

4. In der Umgangssprache hat „*oder*“ auch die Bedeutung „*entweder … oder …*“; das eine oder das andere, aber nicht beide zusammen. Für diese **ausschließende Alternative** „entweder p oder q“ schreiben wir symbolisch $p \mathbin{>\!\!<} q$.

Bemerkungen

1. Die Zusammensetzungen: Negation, Konjunktion, Disjunktion bzw. ausschließende Alternative können als **logische Operationen** (oder **Verknüpfungen**) interpretiert werden. Die Negation ist eine **einstellige** Operation, denn sie ordnet *einer* Aussage eine neue zu. Konjunktion und Disjunktion sind hingegen **zweistellige** Operationen; jede von ihnen ordnet einem *Paar* von Aussagen eine neue Aussage zu.
2. Es ist zweckmäßig, logische Operationen mit Hilfe von sog. **Wahrheitstafeln** zu charakterisieren. Im Folgenden steht 1 stets für *wahr* und 0 für *falsch*.

   Wahrheitstafeln für die Negation, die Konjunktion und die Disjunktion:

p	$\neg p$
0	1
1	0

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

5. Die **Subjunktion** (oder der **Bedingungssatz**) zweier Aussagen p, q ist die *bedingte* Aussage „*wenn p, dann q*“, symbolisch geschrieben $p \to q$.

p	q	$p \to q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Beispiel 4

p : Die Zahl 34 ist ganz (*wahr*).
q : Die Zahl 34 ist rational (*wahr*).
$p \to q$: Wenn 34 ganz ist, dann ist 34 rational (*wahr*).

Andere sprachliche Beschreibungen für $p \to q$ sind:

- *Aus p folgt q.*
- *p ist hinreichend für q.*
- *q ist notwendig für p* (*q folgt notwendig aus p*).

In $p \to q$ heißt p die **Hypothese** (oder **Voraussetzung**), q ist die **Konklusion** (oder **Behauptung**).

Merksatz Nach der Wahrheitstafel ist also die Subjunktion nur dann falsch, wenn die Hypothese wahr, die Konklusion hingegen falsch ist.

Dieser Merksatz soll im Folgenden noch etwas besser begründet werden.

Beispiele und Bemerkungen

a) Die Subjunktion hat oft den Charakter einer *Vereinbarung*.

Als Beispiel betrachten wir die Situation des Studenten Marco, der sich bemüht, neben seinem Mathematikstudium auch noch etwas Sport zu treiben. Er trifft nun mit sich selbst die folgende Vereinbarung:

„Wenn ich ab heute bis zum 27. Dezember jede Woche mindestens zweimal joggen gehe, so werde ich eine Silvesterparty veranstalten."

Am 27. Dezember können nun folgende vier Fälle eintreten:

i. Marco ist weniger als zweimal wöchentlich joggen gegangen und veranstaltet keine Silvesterparty.
ii. Marco ist weniger als zweimal wöchentlich joggen gegangen und veranstaltet trotzdem eine Silvesterparty.
iii. Marco ist jede Woche mindestens zweimal joggen gegangen, veranstaltet jedoch keine Silvesterparty.
iv. Marco ist jede Woche mindestens zweimal joggen gegangen und veranstaltet eine Silvesterparty.

Nur im dritten Fall hat er die Vereinbarung nicht eingehalten. Beachten Sie, dass die vier Fälle genau den vier Zeilen der Wahrheitstafel entsprechen.

b) Als Aussage über (ganze) Zahlen darf $\forall x\,(x > 1 \to x > 0)$ als wahr akzeptiert werden. Somit ist die Aussageform $x > 1 \to x > 0$ allgemeingültig. Insbesondere geht diese Aussageform auch in eine richtige Aussage über, wenn für x eine Zahl gewählt wird, für welche die Hypothese falsch ist.

Setze z. B. $x = 1$. Dann ist $1 > 1$ falsch und $1 > 0$ richtig. Setzt man aber etwa $x = -2$, so sind $-2 > 1$ und $-2 > 0$ beide falsch. In beiden Fällen ist aber die Subjunktion wahr. Diese beiden Fälle entsprechen den ersten zwei Zeilen der Wahrheitstafel. Beachte, dass der Fall *Hypothese wahr und Konklusion falsch* – also die dritte Zeile der Wahrheitstafel – in diesem Beispiel nicht vorkommen kann.

c) Prinzipiell ist es nicht notwendig, dass Hypothese und Konklusion kausal zusammenhängen. Eine Aussage wie

„Wenn die Zahl $\frac{2}{3}$ ganz ist, bin ich der König von England"

ist logisch wahr (wenn auch umgangssprachlich nicht sinnvoll).

6. Die **Bijunktion** zweier Aussagen p, q ist die *bedingte* Aussage „p genau dann, wenn q"; symbolisch geschrieben $p \leftrightarrow q$.

p	q	$p \leftrightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Beispiel 5

p : Die Zahl 34 ist gerade (*wahr*). q : Die Zahl 34 ist durch 2 teilbar (*wahr*).

$p \leftrightarrow q$: Die Zahl 34 ist genau dann gerade, wenn sie durch 2 teilbar ist (*wahr*).

Alternative sprachliche Beschreibungen für $p \leftrightarrow q$:

- *p und q sind äquivalent.*
- *p ist notwendig und hinreichend für q.*
- *p gilt dann und nur dann, wenn q gilt.*

Bemerkung Die Subjunktion wird auch *Implikation* und die Bijunktion auch *Äquivalenz* genannt. Da dies auch Begriffe einer anderen Sprachebene sind, bevorzugen wir die oben eingeführten Bezeichnungen.

Geschichte der Logik

An dieser Stelle sind einige Bemerkungen zur Geschichte der Logik angebracht. Sie sind Alfred Tarskis[3] Buch „Einführung in die Mathematische Logik" [Tar77] entnommen.

Zur Verwendung der Variablen [Tar77, S. 27]:

„Die Variablen wurden schon in der Antike von griechischen Mathematikern und Logikern benützt – allerdings nur unter bestimmten Umständen oder in vereinzelten Fällen. Zu Beginn des 17. Jh.s, vor allem unter dem Einfluss des Werkes des französischen Mathematikers F. Vieta (1540–1603), begann man systematisch mit Variablen zu arbeiten und sie einwandfrei in mathematischen Überlegungen zu verwenden. Jedoch erst gegen Ende des 19. Jh.s wurde, dank der Einführung des Begriffs des Quantors, die Rolle der Variablen für die wissenschaftliche Sprache und insbesondere für die Formulierung mathematischer Lehrsätze voll erkannt; dies war vor allem das Verdienst des hervorragenden amerikanischen Logikers und Philosophen Ch. S. Pierce (1839–1914)."

Zur Logik [Tar77, S. 32]:

„Die Logik wurde von Aristoteles, dem großen griechischen Denker aus dem 4. Jh. v. Chr. [...], geschaffen; seine logischen Schriften sind in dem Werke *Organon* gesammelt worden. Als Schöpfer der mathematischen Logik muss der große deutsche Philosoph und Mathematiker des 17. Jh.s G. W. Leibniz (1646–1716) angesehen werden. Die logischen Werke von Leibniz haben jedoch keinen größeren Einfluss auf die weitere Entwicklung der logischen Untersuchungen gehabt; es gab eine Periode, in der sie in völlige Vergessenheit gerieten. Eine stetige Entwicklung der mathematischen Logik beginnt erst in der Mitte des 19. Jh.s, und zwar von dem Zeitpunkt an, in dem das logische System des irischen Mathematikers G. Boole (1815–1864; Hauptwerk: *An Investigation of the Laws of Thought*, London 1854 [Boo54]) erschienen ist. Den bisher umfassendsten Ausdruck hat die neue Logik in dem epochemachenden Werke der großen englischen Logiker B. Russell (1872–1970) und A. N. Whitehead (1861–1947): *Principia Mathematica* (Cambridge 1910–13) [WR13] gefunden."

Zum Aussagenkalkül, [Tar77, S. 32/33]:

„Das historisch erste System des Aussagenkalküls ist in dem Werke *Begriffsschrift* (Halle 1879) [Fre79] des deutschen Logikers G. Frege (1848–1925) enthalten, der ohne Zweifel der größte Logiker des 19. Jh.s gewesen ist. Sehr wesentlich hat der hervorragende polnische Logiker J. Lukasiewicz (1878–1956) die Entwicklung dieses Teiles der Logik gefördert: Er hat dem Aussagenkalkül eine besonders einfache und präzise Form gegeben und hat umfangreiche Untersuchungen, die diesen Kalkül betreffen, angeregt."

[3] Alfred Tarski (1901–1983), polnisch-amerikanischer Logiker und Mathematiker

Aussagenlogische Aussageformen

In den Ausdrücken $\neg p$, $p \wedge q$, $p \vee q$, $p \to q$, $p \leftrightarrow q$ treten p und q als Variable auf; sie stehen für nicht näher spezifizierte Aussagen. Solche Ausdrücke sind **aussagenlogische Aussageformen**, denn durch Einsetzen von Aussagen für p, q gehen sie in Aussagen über. Auch p, q können als aussagenlogische Aussageformen aufgefasst werden.

Aussagenlogische Aussageformen sind durch ihre Wahrheitstafeln charakterisiert:

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \times q$	$p \to q$	$p \leftrightarrow q$
0	0	1	0	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	1	0
1	0	0	0	1	1	0	0
1	1	0	1	1	0	1	1

Durch Einsetzen von Aussagen (aussagenlogischen Konstanten) oder Aussageformen anstelle der (aussagenlogischen) Variablen in den betrachteten aussagenlogischen Aussageformen entstehen neue aussagenlogische Aussageformen. Wir betrachten die folgenden Beispiele.

Beispiel 6

1. a) $p \vee (\neg p)$ b) $p \wedge (\neg p)$
2. a) $\neg(p \wedge (\neg q))$ b) $(p \to q) \wedge (q \to p)$
3. a) $p \vee (q \wedge r)$ b) $(p \vee q) \wedge r$

In Beispiel 6.1 darf die Klammer weggelassen werden; der Operator „$\neg$“ bindet stärker als „$\vee$“.

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$	$p \wedge \neg p$
0	1	1	0
1	0	1	0

Man merke sich: Die Aussageform $p \vee \neg p$ ist immer wahr. Diese Tatsache wird als **Satz vom ausgeschlossenen Dritten** bezeichnet.

Die Aussageform $p \wedge \neg p$ ist immer falsch. Diese Tatsache wird **Satz vom Widerspruch** genannt.

Definition

1. Eine aussagenlogische Aussageform, die bei jeder Belegung der Aussagenvariablen den Wahrheitswert 1 hat, nennt man eine **Tautologie**.
2. Eine aussagenlogische Aussageform, die bei jeder Belegung der Aussagenvariablen den Wahrheitswert 0 hat, heißt eine **Kontradiktion**.

Somit gilt: $p \vee \neg p$ ist eine Tautologie; $p \wedge \neg p$ ist hingegen eine Kontradiktion.

Die Wahrheitstafel von $\neg(p \wedge \neg q)$ (Beispiel 6.2 a) können wir schrittweise aufbauen:

p	q	$\neg q$	$p \wedge \neg q$	$\neg(p \wedge \neg q)$
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1

Beachte:

1. Zur Wahrheitstafel von $\neg(p \wedge \neg q)$ gehören nur die ersten zwei und die letzte Spalte der Tabelle. Die übrigen Spalten haben nur eine Hilfsfunktion.
2. Bei $\neg(p \wedge \neg q)$ darf die Klammer nicht weggelassen werden (vgl. S. 11).

Alternativ kann die Wahrheitstafel von Beispiel 6.2 a) auch wie nebenstehend bestimmt werden: Die Wahrheitstafel von $\neg(p \wedge \neg q)$ besteht aus den Spalten der Variablen p, q und der Spalte des dritten (letzten) Schrittes.

p	q	$\neg$	$(p$	$\wedge$	$\neg$	$q)$
0	0	1	0	0	1	0
0	1	1	0	0	0	1
1	0	0	1	1	1	0
1	1	1	1	0	0	1
Schritt		3		2	1	

Bemerkung Die Aussageformen $p \rightarrow q$ und $\neg(p \wedge \neg q)$ haben dieselbe Wahrheitstafel.

Definition Haben zwei aussagenlogische Aussageformen identische Wahrheitstafeln, so nennt man sie **logisch äquivalent**.

Somit sind $p \rightarrow q$ und $\neg(p \wedge \neg q)$ logisch äquivalente Aussageformen. Für diesen Sachverhalt verwenden wir folgende symbolische Schreibweise:

$$p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg(p \wedge \neg q)\,.$$

Bemerkung Die Zeichen $\leftrightarrow$ und $\Leftrightarrow$ haben unterschiedliche Bedeutungen:

- „$\leftrightarrow$" ist eine *logische Operation*, verbindet somit Aussagen (bzw. Aussageformen) zu einer bedingten Aussage (Aussageform).
- „$\Leftrightarrow$" ist hingegen eine *Relation* zwischen zwei Aussageformen und bedeutet, dass letztere identische Wahrheitstafeln haben.

Beispiel 6.2 b)
Die Aussageform $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ hat dieselbe Wahrheitstafel wie die Bijunktion $p \leftrightarrow q$.

p	q	$(p \rightarrow q)$	$\wedge$	$(q \rightarrow p)$
0	0	1	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1
Schritt		1	2	1

Die beiden Aussageformen sind logisch äquivalent:

$$p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)\,.$$

Mit einer Wahrheitstafel (mit 8 Zeilen, vgl. S. 13) zeigt man auch, dass die Aussageformen 6.3 a) und 6.3 b) nicht äquivalent sind.

Sachregister