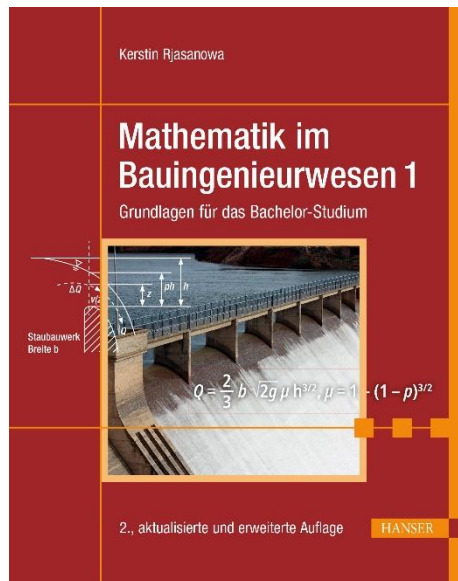


# HANSER



## Leseprobe

zu

## Mathematik im Bauingenieurwesen 1

von Kerstin Rjasanowa

Print-ISBN: 978-3-446-47770-4

E-Book-ISBN: 978-3-446-47816-9

Weitere Informationen und Bestellungen unter

<https://www.hanser-kundencenter.de/fachbuch/artikel/9783446477704>

sowie im Buchhandel

© Carl Hanser Verlag, München

---

## Vorwort

*„Auch in Wissenschaften kann man eigentlich nichts wissen, es will immer getan sein.“*

Johann Wolfgang von Goethe

Das vorliegende Buch hat die Vermittlung mathematischen Grundwissens für Studierende des Bauingenieurwesens zum Ziel. Es entstand auf der Grundlage der Vorlesungen und Übungen in Ingenieurmathematik am Fachbereich Bauingenieurwesen der Fachhochschule Kaiserslautern, die ich seit langem dort halte. Es ist sowohl zur Begleitung der Vorlesungen als auch zum Selbststudium vorgesehen. Im Vergleich zu den Vorlesungen sind einige Stellen vertieft dargestellt und durch Beispiele ergänzt worden.

Das Buch beinhaltet mathematische Grundlagen (Arithmetik reeller Zahlen, Funktionen einer Veränderlichen) und darauf aufbauend für das Studium wichtige Kapitel der Höheren Mathematik (Lineare Algebra, Vektorrechnung und Analytische Geometrie, Zahlenfolgen, Grenzwerte und Stetigkeit, Differenzialrechnung, Integralrechnung, Funktionen mehrerer Veränderlicher, Gewöhnliche Differenzialgleichungen), Anwendungsbeispiele und zahlreiche Übungsaufgaben mit Lösungen. Die Auswahl des mathematischen Stoffes wurde so getroffen, dass er den veränderten Zulassungsvoraussetzungen an Fachhochschulen Rechnung trägt, im Bauingenieurwesen Anwendung findet und im Grundstudium tatsächlich vermittelbar ist. Dieser Aspekt ist insbesondere bei der derzeitigen Einführung der Bachelor-Studiengänge von Bedeutung. Die Darstellung erfolgt aufbauend, mit motivierender Begründung und mitunter, wo angebracht, mit Herleitungen. Damit soll auch der Leser mit durchschnittlichen schulischen Mathematikkenntnissen zum Studium und Selbststudium der Ingenieurmathematik in diesem Bereich angeregt werden. Trotz knapper und auf das Wesentliche beschränkter Vorstellung von Gebieten der Höheren Mathematik wird nicht auf Exaktheit verzichtet, um die logische Nachvollziehbarkeit zu gewährleisten und sichere Grundkenntnisse zu festigen. Wichtige Erkenntnisse, Formeln und Eigenschaften sind im Druck hervorgehoben, damit das Buch auch als Nachschlagewerk verwendet werden kann.

Besonderer Wert wird auf die Anwendung der vorgestellten mathematischen Werkzeuge in verschiedenen Gebieten des Bauingenieurwesens gelegt. Die Wahl der Beispiele ist oft unmittelbar diesen Disziplinen entnommen: der Statik und Festigkeitslehre, dem Vermessungswesen, dem Wasserbau, dem Straßenbau und dem Baubetrieb. Am Ende jedes Kapitels erfolgt für typische praktische Probleme die Ableitung mathematischer Aufgabenstellungen und deren vollständig durchgerechnete Lösung. Damit soll ermöglicht werden, dass der Leser auch bei neuen Problemen in der Lage ist, zunächst ein mathematisches Modell abzuleiten, um danach zu seiner Bearbeitung bekannte Methoden und Verfahren einzusetzen. Es zeigt sich, dass die Lösung praktischer Aufgaben eigenständige Ideen erfordert und oft nicht unmittelbar mit „Rezepten“ erreicht werden kann.

Zahlreiche Übungsaufgaben, die zum Teil auch aus Klausuren entnommen wurden, sind zum Training dieser Herangehensweise gedacht. Die angegebenen Lösungen dienen der Selbstkontrolle. Damit sind die Aufgaben zum Selbststudium und als Klausurvorbereitung geeignet. Sie dokumentieren gleichzeitig, dass mathematische Lösungsmethoden in vielen Gebieten des Bauingenieurwesens Anwendung finden.

Auf diesem Wege möchte ich allen herzlich danken, die mich bei dem Buchvorhaben unterstützten. Besonders bedanke ich mich bei meinem Kollegen und ehemaligen langjährigen Dekan des Fachbereiches Bauingenieurwesen der Fachhochschule Kaiserslautern, Prof. Dr. D. Ott, der eine gründliche Durchsicht des Manuskriptes vornahm und fast alle Beispiele und Aufgaben nachgerechnet hat. In vielen Gesprächen über Inhalte und Darstellung der Höheren Mathematik für Bauingenieure trug er zum Entstehen dieses Buches bei. Mein Dank gilt ebenfalls den Kollegen meines Fachbereiches, denen ich manche inhaltliche Anregung verdanke, und nicht

zuletzt den Studierenden, die mich durch ihr Interesse und ihre Fragen in den Vorlesungen zu dieser geschlossenen Darstellung motivierten. Bei Frau Fritsch und Frau Kaufmann vom Carl Hanser Verlag möchte ich mich ebenfalls für die angenehme Zusammenarbeit und die zahlreichen Anregungen, Vorschläge und geduldigen Diskussionen zur Gestaltung des Buches bedanken.

Kaiserslautern, im Sommer 2006

Kerstin Rjasanowa

Die 2., aktualisierte und erweiterte Auflage des vorliegenden Buches soll den Anforderungen des Bachelor-Studiums, insbesondere im Bauingenieurwesen, noch besser gerecht werden. In erster Linie sind deshalb zahlreiche neue Beispiele, meistens mit direktem Bezug zum Bauingenieurwesen, in fast allen Kapiteln integriert. Dadurch soll die Anwendung der ausgeführten Theorie durchgehend gezeigt werden. Außerdem dienen Beispielrechnungen immer auch der Selbstkontrolle und Bestätigung eigener selbstständiger Überlegungen. Viele neue Abbildungen zur Illustration der Inhalte oder zur Kontrolle von Zahlenbeispielen wurden angefertigt.

Das Kapitel 3 „Lineare Algebra“ wurde um den Abschnitt „Eigenwerte und Eigenvektoren“ erweitert, das Kapitel 4 „Vektorrechnung und Analytische Geometrie“ um den Abschnitt „Koordinatensysteme und Koordinatentransformationen“ und das Kapitel 6 „Differenzialrechnungen für Funktionen einer Veränderlichen“ um den Abschnitt „Kurve, Tangente, Normale, Krümmung“. Die Notwendigkeit der Behandlung von Grundbegriffen dieser Themen hat sich während der Vorlesungen in Mathematik im Bachelorstudium in den vergangenen Jahren gezeigt, da sie unmittelbare Anwendungen im Fächerkatalog des Bauingenieurstudiums haben. Sowohl Beispiele und neue Übungsaufgaben zu diesen Themen demonstrieren dies.

Die Kapitel „Funktionen mehrerer Veränderlicher“ sowie „Differenzialgleichungen“ sind nicht mehr im vorliegenden Buch enthalten. Diese Themen können im Masterstudium behandelt werden und sind daher für ein separates Buch („Mathematik für Bauingenieure/ Masterstudium“) vorgesehen. Ebenso wurden alle Übungsaufgaben und Lösungen aus dem Buch ausgegliedert. In einer separaten Aufgabensammlung ist geplant, Übungsaufgaben mit Lösungswegen und Lösungen für das Bachelor- und Masterstudium zusammen zu stellen.

Im Vergleich zur Fassung des Buches von 2006 ist in einigen Kapiteln eine Neugestaltung bzw. gründliche Bearbeitung des Layouts vorgenommen worden, um Inhalte zu straffen und die Übersicht zu verbessern. Die Zusammenfassung der Inhalte auf der Marginalienspalte ist erweitert worden und soll die Arbeit mit dem Buch erleichtern. Auch das Sachwortverzeichnis wurde aus diesem Grund erweitert.

Für die gewissenhafte Durchsicht des Buches danke ich sehr meinem Kollegen des Studienganges Bauingenieurwesen, Prof. Dr. Schanzenbach, und dem Studenten des Bauingenieurwesens an der HS Kaiserslautern, Herrn P. Holschuh. Ein Dankeschön gilt ebenfalls vielen Studierenden des Studienganges Bauingenieurwesen der Hochschule Kaiserslautern, die Kontrollrechnungen der Übungsaufgaben vornahmen und so mithalfen, die angegebenen Lösungen zu verifizieren. Bei Herrn Ph. Thorwirth vom Fachbuchverlag Leipzig im Carl Hanser Verlag bedanke ich mich herzlich für die Unterstützung beim Entstehen des vorliegenden Buches und die gute Zusammenarbeit mit dem Verlag.

Kaiserslautern, im Sommer 2015

Kerstin Rjasanowa

Die vorliegende überarbeitete und aktualisierte Auflage des Buches enthält außer den erforderlichen Berichtigungen Vereinheitlichungen, Ergänzungen eine Umgestaltung insbesondere in Kapitel 4 „Vektorrechnung und Analytische Geometrie“, sowie einige neue Abbildungen zum besseren Verständnis.

Kaiserslautern, im Sommer 2023

Kerstin Rjasanowa

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Arithmetik reeller Zahlen</b>	<b>11</b>
1.1	Die Addition	11
1.2	Die Multiplikation	12
1.3	Anwendungen der Rechenoperationen	14
1.4	Der Wurzelbegriff	18
1.5	Anordnung reeller Zahlen, Ungleichungen	20
<b>2</b>	<b>Funktionen einer Veränderlichen</b>	<b>23</b>
2.1	Der Funktionsbegriff	23
2.1.1	Zuordnungen zwischen Mengen	23
2.1.2	Analytische und graphische Darstellung von Funktionen	24
2.1.3	Monotonie und Beschränktheit	25
2.1.4	Die Umkehrfunktion	27
2.1.5	Verkettung von Funktionen	28
2.2	Klassen von Funktionen	29
2.2.1	Die konstante Funktion	29
2.2.2	Die Signumfunktion	29
2.2.3	Die lineare Funktion	30
2.2.4	Die Betragsfunktion	31
2.2.5	Die Potenzfunktion	33
2.2.6	Die Reziprofunktion	34
2.2.7	Polynome	35
2.2.8	Rationale Funktionen	40
2.2.9	Die Exponential- und Logarithmusfunktion	41
2.2.10	Trigonometrische Funktionen	44
2.3	Anwendungen an Beispielen	51
2.3.1	Polynome bei der Balkenbiegung	51
2.3.2	Darlehen und Zinsen	52
2.3.3	Vorwärts- und Rückwärtseinschneiden	55
2.3.4	Polygonzugberechnung	56
<b>3</b>	<b>Lineare Algebra</b>	<b>58</b>
3.1	Der Vektorraum $\mathbb{R}^n$	58
3.1.1	Definitionen, Beispiele	58
3.1.2	Geometrische Darstellung im $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$	61

3.1.3	Lineare Abhängigkeit von Vektoren . . . . .	62
3.1.4	Lineare Unterräume des $\mathbb{R}^n$ . . . . .	67
3.2	Matrizen . . . . .	70
3.2.1	Definitionen, Beispiele . . . . .	70
3.2.2	Rechenoperationen mit Matrizen . . . . .	72
3.2.3	Der Rang einer Matrix . . . . .	77
3.2.4	Die Inverse einer Matrix . . . . .	79
3.3	Determinanten . . . . .	79
3.3.1	Definition, Eigenschaften . . . . .	80
3.3.2	Berechnung von Determinanten . . . . .	81
3.3.3	Berechnung der Inversen . . . . .	83
3.4	Lineare Gleichungssysteme . . . . .	84
3.4.1	Definition . . . . .	84
3.4.2	Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme . . . . .	85
3.4.3	Der Gauß-Algorithmus . . . . .	87
3.4.4	Die Regel von Cramer . . . . .	92
3.4.5	Berechnung der Inversen . . . . .	92
3.5	Eigenwerte und Eigenvektoren . . . . .	93
3.5.1	Definition . . . . .	94
3.5.2	Eigenwerte und Eigenvektoren reeller symmetrischer Matrizen . . . . .	95
3.6	Anwendungen an Beispielen . . . . .	97
3.6.1	Professor B. Tonstein und die Werkstoffe . . . . .	97
3.6.2	Produktion von Einzelteilen . . . . .	98
3.6.3	Berechnung von Stabkräften . . . . .	99
3.6.4	Zerlegung einer Kraft . . . . .	101
3.6.5	Schwerpunkt eines Punkt-Massen-Systems . . . . .	101
3.6.6	Schwingungssystem . . . . .	102
<b>4</b>	<b>Vektorrechnung und Analytische Geometrie . . . . .</b>	<b>104</b>
4.1	Betrag eines Vektors, Projektion, Skalarprodukt . . . . .	104
4.1.1	Der Betrag eines Vektors . . . . .	104
4.1.2	Die Projektion . . . . .	106
4.1.3	Das Skalarprodukt . . . . .	107
4.1.4	Orthogonalität . . . . .	108
4.1.5	Koordinatendarstellung des Skalarproduktes . . . . .	109
4.1.6	Winkelmessung im $\mathbb{R}^n$ . . . . .	110
4.1.7	Das Vektorprodukt . . . . .	112
4.1.8	Das Spatprodukt . . . . .	115

---

4.2	Analytische Geometrie der Ebene . . . . .	116
4.2.1	Die Gerade . . . . .	117
4.2.2	Kurven zweiter Ordnung . . . . .	124
4.3	Analytische Geometrie des Raumes . . . . .	132
4.3.1	Die Gerade . . . . .	132
4.3.2	Die Ebene . . . . .	140
4.4	Koordinatensysteme und Koordinatentransformationen . . . . .	149
4.4.1	Ebene Koordinatensysteme . . . . .	150
4.4.2	Räumliche Koordinatensysteme . . . . .	151
4.4.3	Koordinatentransformationen . . . . .	153
4.5	Anwendungen an Beispielen . . . . .	157
4.5.1	Tangentenschnittpunkt . . . . .	157
4.5.2	Kleinpunktberechnung . . . . .	157
4.5.3	Schnittpunkt zweier Strecken . . . . .	159
4.5.4	Absteckungsberechnungen . . . . .	161
4.5.5	Mengenermittlung . . . . .	162
<b>5</b>	<b>Zahlenfolgen, Grenzwerte, Stetigkeit . . . . .</b>	<b>164</b>
5.1	Einführung, Definition . . . . .	164
5.2	Monotonie und Beschränktheit von Zahlenfolgen . . . . .	165
5.3	Konvergenz und Divergenz von Zahlenfolgen . . . . .	169
5.4	Grenzwerte von Funktionen . . . . .	174
5.5	Stetigkeit . . . . .	176
5.6	Anwendungen an Beispielen . . . . .	181
5.6.1	Noch einmal Zinsen . . . . .	181
5.6.2	Stabilität eines Ziegelstapels und Zahlenfolgen . . . . .	183
<b>6</b>	<b>Differenzialrechnung für Funktionen einer Veränderlichen . . . . .</b>	<b>186</b>
6.1	Einführung . . . . .	186
6.2	Ableitungsregeln . . . . .	189
6.3	Höhere Ableitungen . . . . .	192
6.4	Das Differenzial und Fehlerrechnung . . . . .	193
6.5	Die Regel von l'Hospital . . . . .	195
6.6	Kurvendiskussionen . . . . .	198
6.6.1	Extremstellen . . . . .	199
6.6.2	Monotonie . . . . .	200
6.6.3	Krümmungsverhalten und Wendepunkte . . . . .	201
6.7	Der Mittelwertsatz der Differenzialrechnung . . . . .	204

6.8	Taylor-Polynome und Funktionsapproximation . . . . .	205
6.9	Kurve, Tangente, Normale, Krümmung . . . . .	209
6.10	Anwendungen an Beispielen . . . . .	214
6.10.1	Berechnung der Biegelinie eines Balkens . . . . .	214
6.10.2	Fahrbahnverziehung im Straßenbau . . . . .	215
6.10.3	Kuppen- und Wannenausrundung im Straßenbau . . . . .	217
6.10.4	Übergangsbogen und Überhöhungsrampen im Schienenbau . . . . .	219
6.10.5	Berechnung von Punkten einer Klothoide . . . . .	220
<b>7</b>	<b>Integralrechnung für Funktionen einer Veränderlichen . . . . .</b>	<b>223</b>
7.1	Einführung . . . . .	223
7.2	Obersumme, Untersumme, Zwischensumme . . . . .	224
7.3	Das bestimmte Integral . . . . .	225
7.4	Eigenschaften des bestimmten Integrals . . . . .	227
7.5	Die Stammfunktion . . . . .	230
7.6	Der Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung . . . . .	232
7.7	Das unbestimmte Integral . . . . .	233
7.8	Integrationsmethoden . . . . .	235
7.8.1	Integranden der Form $f'/f$ . . . . .	235
7.8.2	Partielle Integration . . . . .	236
7.8.3	Substitutionsregel . . . . .	237
7.9	Anwendungen der Integralrechnung . . . . .	238
7.9.1	Berechnung der Bogenlänge . . . . .	238
7.9.2	Flächenberechnung . . . . .	241
7.9.3	Volumina und Mantelflächen von Rotationskörpern . . . . .	243
7.9.4	Momente und Schwerpunkte . . . . .	246
7.9.5	Berechnung von Schnittkräften am Balken . . . . .	254
7.9.6	Überfälle im Wasserbau . . . . .	256
	<b>Literaturverzeichnis . . . . .</b>	<b>259</b>
	<b>Sachwortverzeichnis . . . . .</b>	<b>263</b>

# 1 Arithmetik reeller Zahlen

In der Menge der reellen Zahlen sind die Addition und die Multiplikation zwei Rechenoperationen, die durch festgelegte Eigenschaften erklärt sind. Daraus ergeben sich verschiedene Schlussfolgerungen für das Rechnen mit reellen Zahlen. Außerdem gibt es in der Menge der reellen Zahlen einen Ordnungsbegriff, der z. B. dem Lösen von Ungleichungen zugrunde liegt.

## 1.1 Die Addition

In diesem Abschnitt werden die vier Axiome der Addition angegeben. Die Subtraktion wird mithilfe der Addition erklärt. Rechenregeln für die Addition und die Subtraktion werden genannt

Zu zwei beliebigen reellen Zahlen  $a$  und  $b$  gibt es eine reelle Zahl  $a + b$ , die **Summe** von  $a$  und  $b$  genannt wird. Die Zahlen  $a$  und  $b$  heißen **Summanden**.

Für beliebige Zahlen  $a, b, c \in \mathbb{R}$  gelten folgende Axiome (Festlegungen):

1.  $a + b = b + a$ .
2.  $(a + b) + c = a + (b + c)$ .
3. Es gibt eine reelle Zahl  $0$  so, dass für alle  $a \in \mathbb{R}$  gilt:  
 $a + 0 = 0 + a = a$ .  
Diese Zahl wird **Null** genannt.
4. Zu jeder Zahl  $a \in \mathbb{R}$  gibt es eine Zahl  $b \in \mathbb{R}$  so, dass gilt:  
 $a + b = b + a = 0$ .  
Die Zahl  $b$  wird die zu  $a$  **entgegengesetzte Zahl** genannt.

Eine Menge mit einer Operation, die diese vier Eigenschaften Kommutativität, Assoziativität, Existenz des neutralen Elementes und des zu einem beliebigen Element inversen erfüllt, wird in der Mathematik nach dem Mathematiker **Abel** kommutative oder **Abel-Gruppe** genannt. So besitzt die Menge der reellen Zahlen  $\mathbb{R}$  bezüglich der Addition die algebraische Struktur einer kommutativen Gruppe. Das neutrale Element ist die Zahl  $0$  (Axiom 3), und das zu einem Element inverse ist die entgegengesetzte Zahl (Axiom 4).

Aus den vier Axiomen ergeben sich einige Folgerungen, die für das Rechnen mit reellen Zahlen von Bedeutung sind:

### Bezeichnungen

Die Menge der reellen Zahlen wird mit  $\mathbb{R}$  bezeichnet. Die Zugehörigkeit einer Zahl  $a$  zur Menge  $\mathbb{R}$  wird mit  $a \in \mathbb{R}$  gekennzeichnet.

### Definition 1.1

#### Axiome der Addition

#### Kommutativgesetz

#### Assoziativgesetz

#### Neutrales Element

#### Inverses Element

### Bemerkung 1.2



**Niels Henrik Abel** (\* 5. August 1802 in der Nähe von Stavanger, † 6. April 1829 in Froland, Norwegen)  
norwegischer Mathematiker

*hier: Abel-Gruppen*



<b>Differenz</b>	<p>1. Zu zwei Zahlen <math>a, b \in \mathbb{R}</math> gibt es genau eine Zahl <math>x \in \mathbb{R}</math>, für die gilt <math>a + x = b</math>.  <math>x</math> heißt <b>Differenz von <math>b</math> und <math>a</math></b>. Man schreibt <math>x = b - a</math>  und sagt: „<math>a</math> wird von <math>b</math> <b>subtrahiert</b>“.  Für <math>0 - a</math> wird kurz <math>-a</math> geschrieben (siehe Axiom 3).</p>
<b>Entgegengesetzte Zahl</b>	<p>2. Für jede Zahl <math>a \in \mathbb{R}</math> gilt <math>a = -(-a)</math>, d. h., die zu <math>-a</math> entgegengesetzte Zahl ist <math>a</math>. Insbesondere ist die zu 0 entgegengesetzte Zahl 0: <math>-0 = 0</math>.</p> <p>3. Für beliebige Zahlen <math>a, b, c, d \in \mathbb{R}</math> gilt</p>
<b>Gleichheit von Differenzen</b>	$b - a = d - c$ genau dann, wenn $b + c = a + d$ ,
<b>Summe von Differenzen</b>	$(b - a) + (d - c) = (b + d) - (a + c)$ ,
<b>Differenz von Differenzen</b>	$(b - a) - (d - c) = (b + c) - (a + d)$ .

**Kopfrechnen****Beispiel 1.3**

Die Axiome der Addition und ihre Folgerungen werden z. B. beim „Kopfrechnen“ angewendet. So ist

$$\begin{aligned}
23 + 56 &= (20 + 3) + (50 + 6) = (20 + 50) + (3 + 6) = 79, \\
68 + (45 + 32) &= 68 + (32 + 45) = (68 + 32) + 45 = 145, \\
(145 - 56) + (37 - 44) &= (145 + 37) - (56 + 44) = 182 - 100 = 82.
\end{aligned}$$

**1.2 Die Multiplikation**

In diesem Abschnitt werden die vier Axiome der Multiplikation angegeben. Die Division wird mithilfe der Multiplikation erklärt. Rechenregeln für die Multiplikation und die Division werden genannt.

**Definition 1.4**

Zu zwei beliebigen reellen Zahlen  $a$  und  $b$  gibt es stets eine reelle Zahl  $a \cdot b$ , die **Produkt von  $a$  und  $b$**  genannt wird. Die Zahlen  $a$  und  $b$  heißen **Faktoren**.

**Axiome der Multiplikation**

Für beliebige Zahlen  $a, b, c \in \mathbb{R}$  gelten folgende Axiome (Festlegungen):

**Kommutativgesetz**

1.  $a \cdot b = b \cdot a$ .

**Assoziativgesetz**

2.  $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ .

**Neutrales Element**

3. Es gibt eine reelle Zahl 1 so, dass für alle  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$  gilt:  
 $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ .  
Diese Zahl wird **Eins** genannt.

**Inverses Element**

4. Zu jeder Zahl  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$  gibt es eine Zahl  $b \in \mathbb{R}$  so, dass gilt:  
 $a \cdot b = b \cdot a = 1$ .  
Die Zahl  $b$  wird die zu  $a$  **reziproke Zahl** genannt.

Die Menge der von null verschiedenen reellen Zahlen  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  hat bezüglich der Multiplikation ebenfalls die algebraische Struktur einer kommutativen Gruppe. Das neutrale Element ist hierbei die Zahl 1 (Axiom 3), und das zu einem Element inverse ist die reziproke Zahl (Axiom 4).

Zwischen Addition und Multiplikation gibt es ein Verknüpfungsgesetz. Für beliebige Zahlen  $a, b, c \in \mathbb{R}$  gilt

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$$

Aus den Axiomen der Multiplikation und dem Distributivgesetz ergeben sich einige Folgerungen für das Rechnen mit reellen Zahlen:

**1. Ein Produkt ist genau dann gleich null, wenn mindestens einer seiner Faktoren gleich null ist**, d. h., aus  $a \cdot b = 0$  folgt  $a = 0$  oder  $b = 0$  und umgekehrt.

**2.** Zu zwei Zahlen  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a \neq 0$  gibt es genau eine Zahl  $x \in \mathbb{R}$ , für die gilt  $a \cdot x = b$ .

$x$  heißt **Quotient aus  $b$  und  $a$**  oder **Bruch** mit dem **Zähler  $b$**  und dem **Nenner  $a$** . Man schreibt

$$x = b : a = \frac{b}{a} = b/a$$

und sagt: „ $b$  wird durch  $a$  **dividiert**“.

**3.** Für jede Zahl  $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$  ist die zu  $a$  reziproke Zahl  $1/a$ . Insbesondere ist die zu 1 reziproke Zahl 1. Die zu  $1/a$  reziproke Zahl ist  $a$ , sodass gilt

$$\frac{1}{1/a} = a.$$

**4.** Für beliebige Zahlen  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  mit  $a, c \neq 0$  ist

$$\frac{b}{a} = \frac{d}{c} \quad \text{genau dann, wenn} \quad b \cdot c = a \cdot d,$$

d. h., **zwei Brüche sind genau dann gleich**, wenn die Produkte aus Zähler des einen und Nenner des anderen Bruches gleich sind.

**5.** Für beliebige Zahlen  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  ist

$$\frac{b}{a} \cdot \frac{d}{c} = \frac{b \cdot d}{a \cdot c}, \quad a, c \neq 0 \quad \text{und} \quad \frac{b}{a} : \frac{d}{c} = \frac{b \cdot c}{a \cdot d}, \quad a, c, d \neq 0,$$

d. h., **das Produkt zweier Brüche** ist ein Bruch, dessen Zähler das Produkt der Zähler der Faktoren und dessen Nenner das Produkt der Nenner der Faktoren ist, und **zwei Brüche werden dividiert**, indem der erste Bruch mit dem Reziproken des zweiten Bruches multipliziert wird.

### Bemerkung 1.5

#### Distributivgesetz

#### Produkt gleich null

#### Quotient, Bruch

#### Reziproke Zahl

#### Gleichheit von Brüchen

#### Produkt von Brüchen

#### Quotient von Brüchen

6. Für jede Zahl  $a \in \mathbb{R}$  gilt  $-a = (-1) \cdot a$ , d. h., die zu  $a$  entgegengesetzte Zahl  $-a$  ist das Produkt der Zahlen  $-1$  und  $a$ .
7. Für beliebige Zahlen  $a, b \in \mathbb{R}$  gilt  $-(a \cdot b) = (-a) \cdot b$ , d. h., die zum Produkt  $a \cdot b$  entgegengesetzte Zahl  $-(a \cdot b)$  ist das Produkt der zu  $a$  entgegengesetzten Zahl  $-a$  und der Zahl  $b$ .
8. Es gilt  $(-1) \cdot (-1) = 1$ , d. h., das Produkt der zu 1 entgegengesetzten Zahl  $-1$  mit sich selbst ergibt wieder 1.

### Bemerkung 1.6

Die Menge  $\mathbb{R}$  der reellen Zahlen mit den in **Definition 1.1** und **Definition 1.4** erklärten Rechenoperationen Addition und Multiplikation hat mit den jeweils vier Axiomen und dem Verknüpfungsgesetz (Distributivgesetz) die algebraische Struktur eines **Körpers**.

### Malzeichen

Sind ein oder beide Faktoren eines Produktes Variablen, so kann beim Schreiben des Produktes das Malzeichen weggelassen werden. Z. B. wird geschrieben

$$a \cdot b = ab, \quad 8 \cdot b = 8b.$$

### Fakultät

Das Produkt der ersten  $n$  natürlichen Zahlen wird kürzer geschrieben

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n = n! .$$

Es heißt **Fakultät** von  $n$ . Vereinbarungsgemäß ist außerdem

$$0! = 1.$$

## 1.3 Anwendungen der Rechenoperationen

Die Rechenoperationen werden beim Umformen und Auswerten von Termen angewendet. Dabei haben Klammern Vorrang vor den „Punkt-rechenarten“ Multiplikation und Division und diese wiederum vor den „Strichrechenarten“ Addition und Subtraktion. Das Erweitern und Kürzen von Brüchen wird bei ihrer Addition und Subtraktion bzw. bei ihrer Vereinfachung benutzt. Das ganzzahlige Potenzieren einer reellen Zahl wird mit der Multiplikation erklärt. Der binomische Lehrsatz zum Potenzieren von Summen mit zwei Summanden wird angegeben.

### Das Auflösen von Klammern

Steht ein Pluszeichen vor einem Summanden in Klammern, so bleibt die Klammer einfach weg. Steht ein Minuszeichen vor einem Summanden in Klammern, so sind beim Weglassen der Klammer alle in ihr vorkommenden Vorzeichen bzw. Rechenzeichen umzukehren.

Beim Auftreten von Mehrfachklammern können z. B. die Klammern von innen nach außen aufgelöst werden.

**Beispiel 1.7****Auflösen von Klammern**

Es ist

$$\begin{aligned}
 8p - (15r - 7q + 6p) + (8q - p + 7r) &= 8p - 15r + 7q - 6p + 8q - p + 7r \\
 &= p + 15q - 8r, \\
 17m + (6n - (3m + 4n)) - ((8m - n) - (5m + (3n - 6m))) &= 17m + (6n - 3m - 4n) - (8m - n - (5m + 3n - 6m)) \\
 &= 17m + (2n - 3m) - (8m - n - (-m + 3n)) \\
 &= 17m + 2n - 3m - (8m - n + m - 3n) \\
 &= 14m + 2n - (9m - 4n) \\
 &= 14m + 2n - 9m + 4n = 5m + 6n.
 \end{aligned}$$

**Das Ausmultiplizieren und das Ausklammern**

Das Ausmultiplizieren von Klammern erfolgt nach dem Distributivgesetz. So ist z. B.

$$\begin{aligned}
 (a + b)c &= ac + bc, & a(b - c) &= ab - ac, \\
 (a + b)(c + d) &= a(c + d) + b(c + d) = ac + ad + bc + bd.
 \end{aligned}$$

Umgekehrt gelesen, ergeben sich daraus Regeln zum Ausklammern von gleichen Faktoren in Summanden:

$$\begin{aligned}
 ac + bc &= (a + b)c, & ab + ac &= a(b + c), \\
 ac - bc &= (a - b)c, & ab - ac &= a(b - c).
 \end{aligned}$$

**Beispiel 1.8****Ausmultiplizieren, Ausklammern**

Im ersten Beispiel wird zuerst jeder Summand der ersten Klammer mit der zweiten Klammer multipliziert und danach diese ausmultipliziert. Im zweiten Beispiel wird der Faktor  $x - y$  ausgeklammert.

$$\begin{aligned}
 (a + 4b - 7c)(x - y) &= a(x - y) + 4b(x - y) - 7c(x - y) \\
 &= ax - ay + 4bx - 4by - 7cx + 7cy, \\
 n(x - y) - x + y &= n(x - y) - (x - y) = (n - 1)(x - y).
 \end{aligned}$$

**Addition und Subtraktion von Brüchen**

Das **Erweitern** eines Bruches ist das Multiplizieren seines Zählers und Nenners mit *derselben* Zahl, das **Kürzen** entsprechend das Dividieren durch *dieselbe* Zahl. Erweitern und Kürzen verändern den Wert eines Bruches nicht:

$$\frac{a}{c} = \frac{ad}{cd}, \quad \frac{ad}{cd} = \frac{a}{c}.$$

Gleichnamige Brüche (d. h., Brüche, deren Nenner gleich sind,) werden

**Erweitern und Kürzen****Gleichnamige Brüche**

addiert bzw. subtrahiert, indem ihre Zähler addiert bzw. subtrahiert werden und der Nenner beibehalten wird:

$$\frac{a}{c} \pm \frac{b}{c} = \frac{a \pm b}{c}.$$

### Ungleichnamige Brüche

Ungleichnamige Brüche werden addiert bzw. subtrahiert, indem sie durch Erweitern gleichnamig gemacht und dann addiert bzw. subtrahiert werden:

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} \pm \frac{bc}{bd} = \frac{ad \pm bc}{bd}.$$

### Hauptnenner

#### Beispiel 1.9

Der Hauptnenner der zu subtrahierenden Brüche ist  $(x-1)(x-2)$ . Der erste Bruch wird mit  $(x-2)$ , der zweite mit  $(x-1)$  erweitert:

$$\frac{4}{x-1} - \frac{3}{x-2} = \frac{4(x-2) - 3(x-1)}{(x-1)(x-2)} = \frac{x-5}{(x-1)(x-2)}.$$

## Das Potenzieren

Die  $n$ -ten **Potenz einer reellen Zahl**  $a$  ist das Produkt aus  $n$  Faktoren, die alle gleich  $a$  sind:

$$a^n = a \cdot a \cdot \dots \cdot a, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dabei wird die reelle Zahl  $a$  **Basis** und die natürliche Zahl  $n$  **Exponent** der Potenz  $a^n$  genannt.

Insbesondere ist  $a^1 = a$ .

Vereinbarungsgemäß ist für eine beliebige reelle Zahl  $a \neq 0$  stets  $a^0 = 1$ .

### Potenzgesetze

Es gelten folgende **Potenzgesetze** für das Multiplizieren und Dividieren von Potenzen:

**Potenz von Produkt, Quotient**  
**Produkt, Quotient von Potenzen**  
**Potenz, negativer Exponent**  
**Potenz einer Potenz**

$$\begin{aligned} (a \cdot b)^n &= a^n \cdot b^n, & (a/b)^n &= a^n/b^n, \\ a^m \cdot a^n &= a^{m+n}, & a^m/a^n &= a^{m-n}, \\ a^{-n} &= 1/a^n & &= (1/a)^n, \\ (a^m)^n &= (a^n)^m & &= a^{mn}. \end{aligned}$$

### Zusammenfassen von Potenzen

#### Beispiel 1.10

Potenzen werden nach gleichen Basen zusammengefasst:

$$\begin{aligned} (xy)^{m+n} (yz)^{2m-n} (xz)^{m-2n} &= x^{m+n} y^{m+n} z^{2m-n} x^{m-2n} z^{m-2n} \\ &= x^{m+n+m-2n} y^{m+n+2m-n} z^{2m-n+m-2n} \\ &= x^{2m-n} y^{3m} z^{3m-3n}, \\ \frac{a^{1-m}}{a^{n+1}} &= a^{(1-m)-(n+1)} = a^{-(m+n)} = \frac{1}{a^{m+n}}. \end{aligned}$$

## Die binomischen Formeln und der binomische Lehrsatz

Die binomischen Formeln ergeben sich, wenn folgende Klammern nach dem Distributivgesetz ausmultipliziert werden:

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2, \\ (a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2, \\ (a+b)(a-b) &= a^2 - b^2.\end{aligned}$$

1. Binomische Formel
2. Binomische Formel
3. Binomische Formel

Bei steigenden Potenzen ergibt sich durch fortgesetztes Ausmultiplizieren der Klammern

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3, \\ (a+b)^4 &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4, \\ (a+b)^5 &= a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5 \text{ usw.}\end{aligned}$$

Für die  $n$ -te Potenz der Summe  $a+b$  gilt der **binomische Lehrsatz** als Regel zum Ausmultiplizieren:

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots \\ &\quad + \binom{n}{n-1} a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n} a^0 b^n \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.\end{aligned}$$

### Binomischer Lehrsatz

Dabei sind die Ausdrücke  $\binom{n}{k}$  die **Binomialkoeffizienten**. Für ihre Berechnung gilt

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k} = \frac{n!}{k! (n-k)!}, \quad \binom{n}{0} = 1.$$

#### Beispiel 1.11

Die Binomialkoeffizienten für die Potenz  $(a+b)^5$  berechnen sich z. B. wie folgt:

$$\begin{aligned}\binom{5}{0} &= 1, & \binom{5}{1} &= \frac{5}{1} = 5, & \binom{5}{2} &= \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10, & \binom{5}{3} &= \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 10 \\ \binom{5}{4} &= \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 5, & \binom{5}{5} &= \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 1.\end{aligned}$$

### Berechnung von Binomialkoeffizienten

Folgende **Eigenschaften der Binomialkoeffizienten** lassen sich leicht nachweisen:

$$\binom{n}{n} = 1, \quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \quad \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

### Eigenschaften der Binomialkoeffizienten



Sei  $n$  eine natürliche Zahl. Die  $n$ -te **Wurzel**  $a = \sqrt[n]{b}$  aus einer *nicht negativen* reellen Zahl  $b$  ist die *nicht negative* reelle Zahl  $a$ , deren  $n$ -te Potenz  $a^n$  den Wert  $b$  hat:  $a^n = b$ . Das Ermitteln der Wurzel aus einer reellen Zahl heißt **Radizieren**.

**Definition 1.15****Beispiel 1.16**

Es ist z. B.  $\sqrt[3]{8} = 2$ ,  $\sqrt[3]{0.125} = 0.5$ ,  $\sqrt[5]{0} = 0$ .

**Radizieren**

Für das Rechnen mit Wurzeln ergeben sich einige Folgerungen:

1. Es gilt  $\sqrt[n]{1} = 1$ , da  $1^n = 1$  ist.  
Es gilt  $\sqrt[n]{0} = 0$ , da  $0^n = 0$  ist.  
Es gilt  $\sqrt[1]{b} = b$ , da  $b^1 = b$  ist.
2. Aus  $a^n = b$  folgt dann  $a = \sqrt[n]{b}$ , wenn  $a$  und  $b$  *nicht negativ* sind. Radizieren und Potenzieren sind im Bereich *nicht negativer* reeller Zahlen Umkehrungen voneinander.

**Beispiel 1.17**

1. Aus der Gleichung  $9 = 3^2$  folgt  $\sqrt{9} = 3$ .
2. Aus der Gleichung  $9 = (-3)^2$  folgt *nicht*  $\sqrt{9} = -3$ , sondern  $\sqrt{9} = |-3| = 3$ .
3. Die Gleichung  $x^2 = b$  mit der gegebenen *nicht negativen* reellen Zahl  $b$  hat die Lösungen  $x = \sqrt{b}$  und  $x = -\sqrt{b}$ . Wird die Quadratwurzel auf beiden Seiten der Gleichung gebildet, so ergibt sich links für  $x \geq 0$  die *nicht negative* Zahl  $x$  und für  $x < 0$  die *nicht negative* Zahl  $-x$ . Rechts ergibt sich  $\sqrt{b}$ .
4. Ist  $n$  eine *ungerade natürliche Zahl*, so ist die  $n$ -te Wurzel aus der *negativen* reellen Zahl  $b$  diejenige *negative* Zahl  $a$ , für die  $a^n = b$  gilt.

**Quadratwurzel ist nicht negativ****Beispiel 1.18**

Z. B. gilt  $\sqrt[3]{-27} = -3$ ,  $\sqrt[5]{-32} = -2$ ,  $\sqrt[n]{-1} = -1$  für *ungerade* natürliche Zahlen  $n$ .

**Wurzel aus negativer Zahl**

5. Die Gleichung  $x^n = b$  mit  $b < 0$  hat nur dann eine reelle Lösung  $x$ , wenn  $n$  ungerade ist. Dann ist  $x < 0$ .  
Die Gleichung  $x^n = b$  mit  $b > 0$  hat genau die positive reelle Lösung  $x = \sqrt[n]{b}$ , wenn  $n$  ungerade ist. Wenn  $n$  gerade ist, existieren genau zwei Lösungen:  $x = \sqrt[n]{b}$  (positiv) und  $x = -\sqrt[n]{b}$  (negativ). Die Probe zeigt jeweils, dass die angegebenen Zahlen  $x$  auch wirklich Lösung der Ausgangsgleichung sind.



**Potenzgleichungen****Beispiel 1.19**

1. Die Gleichung  $x^5 = -243$  hat die (negative) Lösung  $x = \sqrt[5]{-243} = -3$ .
2. Die Gleichung  $x^5 = 243$  hat die (positive) Lösung  $x = \sqrt[5]{243} = 3$ .
3. Die Gleichung  $x^4 = 81$  hat die (positive) Lösung  $x = \sqrt[4]{81} = 3$  und die (negative) Lösung  $x = -\sqrt[4]{81} = -3$ .

**Wurzelgesetze**

Für das Rechnen mit Wurzeln und das Radizieren arithmetischer Ausdrücke gibt es folgende **Wurzelgesetze**:

- Wurzel aus Produkt**
- Wurzel aus Quotienten**
- Wurzel aus Wurzel**
- Wurzel aus Potenz**
- Rationale Exponenten**

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{a^n} &= a, & (\sqrt[n]{a})^n &= a, & \sqrt[n]{a^{mn}} &= a^m, \\ \sqrt[n]{ab} &= \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b}, \\ \sqrt[n]{a/b} &= \sqrt[n]{a} / \sqrt[n]{b}, \\ \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} &= \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = m\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{mn}}, \\ \sqrt[n]{a^m} &= a^{\frac{m}{n}}, \\ a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} &= a^{\frac{m}{n} + \frac{p}{q}}, & a^{\frac{m}{n}} / a^{\frac{p}{q}} &= a^{\frac{m}{n} - \frac{p}{q}}, \\ (ab)^{\frac{m}{n}} &= a^{\frac{m}{n}} b^{\frac{m}{n}}, & (a/b)^{\frac{m}{n}} &= a^{\frac{m}{n}} / b^{\frac{m}{n}}. \end{aligned}$$

**Anwendung der Wurzelgesetze****Beispiel 1.20**

Mit den Wurzelgesetzen ergibt sich

1.  $\sqrt{b^{2x}} = b^x$ ,
2.  $\sqrt[3]{12x^6y^9} = \sqrt[3]{12} \sqrt[3]{(x^2)^3} \sqrt[3]{(y^3)^3} = \sqrt[3]{12} x^2 y^3$  (Wurzel aus Produkt),
3.  $\sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$  (Wurzel aus Quotienten),
4.  $\sqrt[4]{\sqrt{256}} = 2$  (Wurzel aus Wurzel),
5.  $\sqrt[nx]{a^{mx}} = \sqrt[n]{a^m}$  (Wurzel aus Potenz).

Treten im Nenner von arithmetischen Ausdrücken Wurzeln auf, so können sie durch äquivalente Umformungen beseitigt werden.

**Wurzelfreier Nenner****Beispiel 1.21**

$$\text{Es ist } \frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \frac{1 \cdot (\sqrt{a} + \sqrt{b})}{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})} = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{a - b}.$$

Hier wurde der Bruch mit  $\sqrt{a} + \sqrt{b}$  erweitert, sodass der Nenner nach der dritten binomischen Formel dadurch wurzelfrei ist.

**1.5 Anordnung reeller Zahlen, Ungleichungen**

Mithilfe von vier Axiomen (Festlegungen) wird ermöglicht, dass reelle Zahlen miteinander verglichen werden können. Daraus ergeben sich

# Sachwortverzeichnis

- Abbildung, 23, 164
  - bijektive, 27
- Ableitung, 187, 189, 205, 209, 212, 214, 216, 217, 219, 221, 230, 231, 239, 240, 243
  - dritte, 192
  - erste, 200–202
  - höhere, 192, 193, 206
  - vierte, 192
  - zweite, 192, 202, 204
- Abstand, 22, 57, 70, 118, 120, 121, 124, 125, 128, 130–132, 134–139, 142, 143, 150–152, 159, 161, 169, 170, 211, 217, 240, 252
- Absteckung, 161
- Addition, 11, 13–15, 21, 35, 59, 60, 67, 72, 73, 78, 82, 87
- Additionstheorem, 45, 46, 56, 122, 161, 232
- Adjunkte, 80, 83
- Annuität, 52, 54, 55
- Antisymmetrie, 112
- Arbeit, 110
- Arcuscosinus, 47
- Arcussinus, 46
- Arcustangens, 47
- Argument, 24, 27, 28, 36, 42, 46, 47
- Assoziativgesetz, 11, 12, 60, 72, 73
- Axiom, 59
  - von Newton, 31
- Axiome, 11–14, 20
  - der Addition, 11, 12
  - der Multiplikation, 12, 13
- Basis, 16, 42, 43, 58, 69, 90, 109, 190
  - kanonische, 69, 104, 109, 111, 112
  - Orthogonal-, 109
  - Orthonormal-, 109, 154
  - vektoren, 69, 153, 154
  - wechsel, 153, 154
- beschränkt, 26, 27, 29, 30, 45, 166, 167, 169–172, 180, 225, 226, 229
  - nach oben, 26, 34, 166, 224
  - nach unten, 26, 32–34, 42, 166, 224
- Beschränktheit, 23, 25, 26, 165, 180, 221
- Betrag, 104–106, 108–111, 113–115, 120, 134, 135, 142, 143, 149, 159, 162
- Biegelinie, 193, 199, 214
- Biegemoment, 36, 52, 188, 192, 214, 254, 255
- Binomialkoeffizienten, 17, 18
- binomische(r)
  - Formeln, 17, 20
  - Lehrsatz, 17, 18
- Bogenlänge, 213, 238, 239
  - differenzial, 211
- Bogenmaß, 44
- Brennpunkt, 125, 128, 130, 132
- Bruch, 13, 15, 16, 20
- Brüche
  - gleichnamige, 15
  - ungleichnamige, 16
- Definitionsbereich, 24, 28–30, 33, 41, 43, 178, 180, 187, 189, 200, 202
- Determinante, 79–84, 100, 102, 115, 119, 123, 137, 142, 160, 162
- Diagonalisierung, 95
- Differenz, 12, 38, 41, 61, 62, 114, 122, 128, 147, 171, 176, 179
- Differenzenquotient, 187, 188, 190, 230
- Differenzial, 194, 234
  - Bogen-, 212, 213, 244, 245
- Dimension, 58, 69, 70, 72, 73, 75, 76, 87, 90, 92
- Diskriminante, 36
- Distributivgesetz, 13–15, 17, 60, 67, 73, 75, 107, 112, 114
- Divergenz, 169, 175, 196
  - bestimmte, 175, 179
  - unbestimmte, 175
- Division, 12, 14, 24, 25, 39, 119
  - Polynom-, 37, 39
- Dreiecksungleichung, 32, 105, 108
- Durchbiegung, 52, 193, 214
- Ebene, 116, 140–142, 144–150, 154
  - allgemeine Form, 140–143
  - Hesse-Normalform, 140, 142, 143
  - Lagebeziehungen, 145–148
  - Parameterform, 142
- Eigenfrequenz, 103
- Eigenschwingung, 103
- Eigenvektor, 94–96, 103
- Eigenwert, 94–96, 103
- eindeutig, 23, 65, 66, 69, 75, 84, 85, 88, 90–92, 117, 140, 145, 160, 164, 165
- Einheitsvektor, 104, 105, 111, 119, 149–152, 154–156, 210
  - zugehöriger, 105, 106, 136, 151
- Eins, 12, 18, 78
- Element, 22–24, 59–61, 67, 69–71, 74, 75, 78, 82, 83, 138
  - Hauptdiagonal-, 75, 78, 81, 82
  - inverses, 11–13, 60, 61, 72
  - neutrales, 11–13, 60
  - Nichtnull-, 78, 79
  - Null-, 61, 68, 72
- Ellipse, 125–127, 213, 239
  - Normalform, 125–127
  - Parameterform, 126

- sektor, 243
- Tangente, 126, 127
- Entwicklungssatz von Laplace, 81
- Erweitern, 15, 16
- Erzeugendensystem, 67–69
- Euler-Zahl, 42, 173
- Exponent, 16, 18, 20, 33, 43, 58
- Exzentrizität
  - lineare, 125, 128
- Fahrbahnverziehung, 215
- Faktor, 12–16, 66, 101
- Fakultät, 14
- Fehler
  - absoluter, 193, 195, 207
  - relativer, 193, 195
- Flächeninhalt, 50, 51, 112–114, 124, 162, 163, 195, 223, 230, 241, 242
- Folge, 164, 169, 171–175, 182, 183, 224–226
  - Element der -, 165
  - Glieder der -, 165, 169, 170, 172
  - konvergente, 172, 225
- Fredholm-Alternative, 91
- Freiheitsgrad, 86–88, 99
- Fundamentalsystem, 90, 91
- Funktion, 23, 24, 26, 28, 35, 126, 129, 177, 178, 189, 199, 205, 223, 230, 240–242, 247, 249
  - äußere, 28
  - Betrags-, 31
  - differenzierbare, 187, 189, 192, 199, 200, 202–204, 230, 231, 235, 236, 239
  - divergente, 175
  - Exponential-, 41
  - gerade, 45
  - gleichung, 24, 27, 29–31, 33–37, 40–42, 45–47, 52
  - Graph, 24, 25, 27
  - innere, 28
  - integrierbare, 226–228, 231, 233
  - konkave, 202
  - konstante, 29, 253
  - konvexe, 201, 202
  - Kosinus-, 45
  - Kotangens-, 46
  - lineare, 30, 31, 35
  - linksseitig differenzierbar, 188, 189
  - Logarithmus-, 42
  - Potenz-, 33
  - rationale, 40, 41
  - rechtsseitig differenzierbar, 188, 189
  - reelle, 24
  - Reziprok-, 34
  - Signum-, 29
  - Sinus-, 27, 45
  - stetige, 177, 179–181, 186, 189, 225, 229, 249
  - streng konkave, 202
  - streng konvexe, 202
  - Tangens-, 46
  - trigonometrische, 44
  - Umkehr-, 27, 28, 30, 33, 34, 42, 46, 47, 49
  - ungerade, 45
  - Verkettung, 28, 38, 41
  - wert, 24, 38
  - Wurzel-, 33
- Gauß-Algorithmus, 70, 78, 82, 84, 86, 87, 90, 91, 93, 97, 144, 145
- Gerade, 113, 116–124, 126, 129, 131–135, 138–141, 145–148, 157, 159, 186, 201, 217, 219, 223, 226
  - Achsenabschnittsform, 118, 120
  - allgemeine Gleichung, 119, 122, 124, 126, 131
  - Hesse-Normalform, 119–121, 124
  - Lagebeziehungen, 122, 123, 139, 147, 148
  - Momentenform, 133
  - Normalform, 118, 120, 122
  - Parameterform, 117, 124, 145, 158, 160
  - Punkttrichtungsform, 117, 118, 133, 134
  - windschief, 135
  - Zweipunkteform, 118, 120, 133
- Gesetz
  - von Hooke, 31
- Gleichheit, 12, 13, 35, 59, 63, 64, 71, 73
- Gleichung, 24, 31, 35, 39, 43, 44, 49, 74, 87–89, 100
  - algebraische, 38
  - lineare, 30
  - quadratische, 36, 37
- Gleichungssystem
  - lineares, 70, 85, 88, 90, 93, 97, 102, 104, 136–138, 144, 145, 160, 192, 220
- Gradmaß, 44
- Grenzwert, 187, 230, 238
  - einseitiger, 188
  - linksseitiger, 174, 177, 179
  - rechtsseitiger, 174, 177, 179
  - von Funktionen, 174, 175, 177, 195–197
  - von Zahlenfolgen, 170–173, 182, 224, 227
- Hauptachse, 125, 128
- Hauptscheitelpunkt, 125, 128
- Hauptträgheitsachse, 96
- Hauptträgheitsmoment, 96
- Höhe, 48–51, 115, 124, 134, 157, 162
- homogen, 85, 89–91, 102
- Horner-Schema, 38, 39, 205
  - fortlaufendes, 39
  - vollständiges, 40
- Hyperbel, 128
  - Asymptoten, 129
  - Normalform, 128
  - Parameterform, 129
  - Tangente, 129, 130
- Hypotenuse, 47, 108
- Identität von Lagrange, 137
- Infimum, 26, 166, 167, 169, 180, 224, 225
- inhomogen, 85, 91
- Inkreisradius, 51

- Integral  
  bestimmtes, 226, 230, 232, 238  
  unbestimmtes, 233–236
- Integrationsgrenze, 228, 240, 244, 245, 257  
  obere, 226, 230, 232  
  untere, 226, 232
- Integrationsvariable, 226, 237
- Integrieren, 237  
  logarithmisches, 236  
  partiell, 236
- Invarianz, 60, 73, 76
- invertierbar, 79, 83, 92
- Kathete, 47, 108
- Kleinpunkte, 157
- Klothoide, 213, 220, 237, 238  
  Einheits-, 238
- Koeffizienten, 35, 36, 39, 60, 62, 64–66, 69, 70, 85, 119,  
  180, 192, 206, 214, 216, 219  
  -vergleich, 37, 39
- kollinear, 66
- kommutativ, 73, 75
- kommutative Gruppe, 11, 13
- Kommutativgesetz, 11, 12, 60, 72, 75, 107
- komplanar, 66
- Konvergenz, 169, 173, 175, 225
- Koordinaten, 104, 112, 116, 120, 125, 126, 128, 131, 132,  
  143, 144, 149, 157, 159, 162, 212  
  kartesische, 150, 151  
  Kugel-, 149, 152  
  Polar-, 149, 150, 212  
  Zylinder-, 149, 151
- Koordinatensystem, 104, 111, 124, 127, 131, 132, 149,  
  154–156  
  ebenes, 150  
  gedrehtes, 155  
  kartesisches, 124, 125, 128, 149, 154, 155, 157, 159,  
  161  
  räumliches, 151  
  verschobenes, 155
- Koordinatentransformation, 149, 153–155, 206
- Körper, 14
- Kosinus, 44, 45, 47, 48  
  Richtungs-, 111, 119  
  -satz, 48–50, 55
- Kosinus hyperbolicus, 129
- Kotangens, 45
- Kraft, 31, 101, 104, 107, 110, 114, 115, 134, 203  
  resultierende, 62  
  -vektor, 65, 66
- Kreis, 127, 161, 164, 208, 213, 239, 253  
  -bogen, 219, 220, 239  
  Parameterform, 127  
  Tangente, 161
- Krümmung, 210–213  
  -kreis, 211, 217, 218  
  -radius, 210–212  
  -verhalten, 202, 203
- Kuppen- und Wannenausrundung, 217
- Kurve, 126, 149, 186–188, 210–213, 238–240, 242, 245,  
  248–252, 254  
  -zweiter Ordnung, 116, 124
- Kürzen, 15
- linear abhängig, 63–65, 68, 116
- linear unabhängig, 63–66, 68, 69, 77, 78, 90, 109, 141
- Linearfaktor, 37, 39, 41
- Linearität, 105, 107, 112, 235, 256
- Linearkombination, 58, 62–66, 68, 69, 90, 91, 142, 227,  
  228, 233
- Lösung, 128, 130, 138, 149  
  Gleichungssystem, 84–86, 90–92, 99, 102, 122, 145,  
  160
- Lotfußpunkt, 120, 121, 130, 131, 135, 136, 138, 142, 143,  
  159, 161
- Lücke, 41, 178, 226
- Majorantenkriterium, 171, 172
- Mantelfläche, 244, 245, 251
- Matrix, 70–75, 77–79, 81, 87, 92, 153, 154  
  Diagonal-, 76, 78, 79  
  Dreiecks-, 82, 83  
  Einheits-, 76, 77, 84, 93  
  erweiterte Koeffizienten-, 86, 90, 92, 99, 144, 145  
  Hesse-, 119  
  inverse, 70, 79, 83, 84, 92, 93, 153  
  Koeffizienten-, 58, 70, 79, 86–93, 97, 102, 137, 144,  
  145, 160  
  Null-, 72, 75, 77  
  obere Dreiecks-, 82, 93  
  quadratische, 70, 72, 75, 79, 80, 93  
  -schreibweise, 85, 90, 97, 100–102  
  symmetrische, 72  
  Transformations-, 154  
  transponierte, 71, 72, 76, 77, 82, 83  
  untere Dreiecks-, 82  
  Vielfaches, 70, 72
- Maximum  
  globales, 199  
  lokales, 199, 201, 202, 214
- Mengenermittlung, 162
- Minimum  
  globales, 199  
  lokales, 199, 201, 202
- Mittelpunkt, 125, 127, 128, 130, 161
- Mittelwertsatz  
  der Differenzialrechnung, 204, 239, 242  
  der Integralrechnung, 229, 231, 247
- Moment, 107, 114, 134, 193, 201, 246  
  Achs-, 114, 115  
  Flächen-, 247, 252  
  Punkt-, 114  
  statisches, 247–249
- monoton, 167, 173, 200, 202  
  fallend, 25, 28, 29, 52, 167, 170, 200, 224, 225  
  steigend, 25, 29, 52, 167, 170, 200, 224, 225

- Monotonie, 21, 23, 25, 28, 165, 200  
 Multiplikation, 11–14, 18, 21, 28, 35, 59, 60, 67, 73, 74,  
     78, 87, 93, 106  
     Matrix-, 75, 76  
     skalare, 111  
     Vektor-, 76
- Näherung  
     lineare, 194
- Nebenachse, 125, 128  
 Nebenscheitelpunkt, 125, 128  
 Nenner, 13, 65  
 Null, 11, 13, 24, 26, 52, 64–66, 78, 89, 92, 102, 108, 137  
 Nullfolge, 171, 172, 175  
 Nullstelle, 24, 25, 29, 30, 33, 36, 37, 39–41, 43, 45, 46,  
     52, 181, 188, 204, 214, 215, 241
- Obersumme, 225, 226  
 Ordnungsrelation, 21  
 orthogonal, 95, 96, 108, 109, 126
- Parabel, 130, 132, 215, 217  
     Achse, 130  
     Leitlinie, 130  
     Normalform, 131  
     Parameterform, 131  
     Tangente, 131, 132
- parallel, 61, 66, 113, 117, 118, 122, 124, 127, 128, 130,  
     132, 135–137, 139–141, 145, 147, 148, 159,  
     204
- Parameterform, 213, 239, 240, 242, 243, 245  
 Periode, 45, 46  
 Polstelle, 40, 41, 46, 179  
 Polygonzug, 56  
 Polynom, 35–40, 51, 52, 60, 61, 180, 192, 193, 205, 206,  
     214, 219, 221  
     Taylor-, 205, 207–209, 221, 222  
     Vielfaches, 61
- Positive Definitheit, 105, 107, 112  
 Potenz, 16–20, 39, 40, 43, 58  
     -gesetze, 16, 42  
     -gleichungen, 20
- Potenzieren, 14, 16, 19  
 Produkt, 12–14, 16, 20, 32, 34, 37, 38, 41, 43, 48, 50,  
     70, 73–76, 81–84, 105, 106, 110, 134, 163,  
     171, 179, 180, 197, 247, 251, 252, 256
- Projektion, 106, 107, 110, 114, 115  
 proportional, 30, 31  
 Proportionalitätsfaktor, 30, 31
- Querkraft, 36, 52, 188, 192, 254, 255  
 Quotient, 13, 16, 20, 32, 41, 43, 45, 47, 172, 176, 180,  
     186, 195, 197
- Radiant, 44  
 Radizieren, 19, 20  
 Rang, 70, 78, 79, 86, 88, 90, 92, 144, 145  
     -kriterium, 84, 86
- Spalten-, 77, 78  
 Zeilen-, 77, 78
- Regel  
     Ableitung-, 189, 190, 232  
     Grenzwert-, 172, 175  
     Substitutions-, 237  
     von Cramer, 84, 92, 97, 100, 122, 137, 146, 160,  
         220  
     von Guldin, 251, 252  
     von l'Hospital, 195–197
- Reihe  
     harmonische, 185  
     Taylor-, 209
- Restglied, 207, 209  
 Restschuld, 52–54  
 Rotation, 154, 155  
     -matrix, 155
- Rotationskörper, 243, 244, 249–251, 253  
 Rückwärtseinschneiden, 55
- Satz  
     des Pythagoras, 108, 125, 129, 131  
     des Thales, 108  
     von Bolzano, 181  
     von Rolle, 204  
     von Weierstraß, 180
- Scheitelpunkt, 130, 132, 216, 217  
 Schnittgerade, 145  
 Schnittkraft, 36, 51  
 Schnittpunkt, 122, 123, 139, 144, 157, 159, 188  
 Schranke, 207  
     obere, 26, 166, 169, 170  
     untere, 26, 166, 169, 170
- Schwerpunkt, 101, 183, 185, 203, 246, 249, 251  
     einer Fläche, 249  
     einer Kurve, 250  
     eines Rotationskörpers, 250
- Schwingungssystem, 102  
 Seitenhalbierende, 50  
 Sektorformel von Leibniz, 243  
 Sinus, 44, 45, 47, 50  
     -satz, 48, 49, 55, 56  
 Sinus hyperbolicus, 129  
 Skalarprodukt, 107–112, 135, 137  
     Koordinatendarstellung, 109  
 Spatprodukt, 115, 116, 136, 141, 162  
     Koordinatendarstellung, 115  
 Sprungstelle, 179  
 Stammfunktion, 231–233, 237  
 Steigung, 117, 118, 122, 157, 186, 187, 212, 218  
 Stelle  
     kritische, 200–204, 215
- stetig, 177, 178  
     linksseitig, 177  
     rechtsseitig, 177
- streng monoton  
     fallend, 25, 28, 30, 32–34, 41, 43, 45–47  
     steigend, 25, 28, 30, 32, 33, 41, 43, 45–47

- Subtraktion, 11, 14, 15, 53, 98  
Summand, 11, 14, 15, 18, 35  
Summe, 11, 12, 14, 17, 18, 35, 37, 38, 41, 48, 50, 51, 53,  
58, 59, 61, 62, 66, 67, 70, 72, 74, 77, 91, 110,  
125, 157, 158, 162, 171, 176, 179  
Supremum, 26, 166, 180, 224, 225
- Tangens, 45, 47  
Tangente, 186, 187, 194, 204, 205, 210, 211, 213  
-schnittpunkt, 157, 217  
Tilgung, 52, 54  
-zeitraum, 54  
Trägheitsmoment, 252, 253  
polares, 254  
Trägheitstensor, 96  
Trapezform, 87, 88, 93
- Übergangsbogen, 219  
Überhöhungsrampe, 219  
Umkreisradius, 50  
unbeschränkt, 23, 26, 30, 33, 34, 43, 46, 172, 175, 180  
nach oben, 26, 32–34, 42, 167  
nach unten, 26, 34  
Unendlichkeitsstelle, 179, 180  
Unstetigkeitsstelle, 177, 178, 181  
hebbare, 178  
Unterraum, 67–69, 90, 109  
Untersumme, 225
- Vektor, 58–70, 73, 77, 85, 92, 93, 104–108, 111, 112,  
114, 119, 131, 136, 141, 142, 153, 159  
Hauptnormalen-, 210  
Hauptnormaleneinheits-, 210, 211  
kanonischer, 69, 76, 77, 92, 111  
Normalen-, 119–123, 126, 128, 131, 140–145, 147–  
149, 159, 212, 213  
Null-, 123  
Orts-, 61, 66, 102, 213  
Richtungs-, 114, 115, 117, 120, 121, 124, 126, 131–  
139, 141, 145, 147, 148, 158, 159, 210  
-schreibweise, 85  
Spalten-, 71, 73, 74, 76–78, 92  
Tangenten-, 210, 212, 213  
Tangenteneinheits-, 210, 211  
Vielfaches, 58, 59, 61, 62, 66  
Zeilen-, 71, 77
- Vektorprodukt, 112, 113, 115, 123, 134, 136, 149  
Koordinatendarstellung, 112, 134  
Vektorraum  
linearer, 58, 60, 61, 63, 73  
Vergleichskriterium, 172, 224, 225  
Volumen, 115, 116, 162, 243, 250, 251  
Vorwärtseinschneiden, 55
- Wendepunkt, 203  
Wertebereich, 24, 28, 49  
Winkel, 111, 121, 138, 144, 147, 149–152, 154, 161, 164,  
203, 240, 242  
Richtungs-, 111  
Winkelhalbierende, 27, 50, 51  
Wurzel, 18–20, 32  
gesetze, 20  
Quadrat-, 18, 19  
-satz von Vieta, 37
- Zahl, 58–60, 67, 77, 82, 86, 87, 89, 99  
entgegengesetzte, 11, 12, 14  
natürliche, 14, 16, 19  
reelle, 11–14, 16, 18–20, 22, 29, 30  
reziproke, 12, 13  
Zahlenfolge, 164–169, 171, 173, 175, 183  
divergente, 170, 172  
konvergente, 170  
Zahlengerade, 21, 22  
Zähler, 13  
Zerlegungsstelle, 206–209  
Zwischenpunkte, 157  
Zwischensumme, 225–227