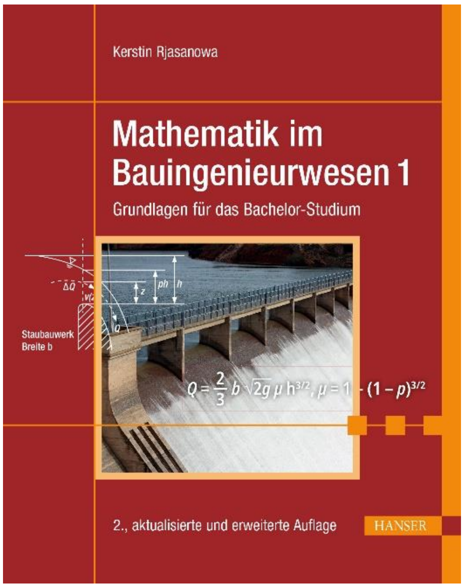
HANSER



Leseprobe

zu

Mathematik im Bauingenieurwesen 1

von Kerstin Rjasanowa

Print-ISBN: 978-3-446-47770-4
E-Book-ISBN: 978-3-446-47816-9

Weitere Informationen und Bestellungen unter
https://www.hanser-kundencenter.de/fachbuch/artikel/9783446477704
sowie im Buchhandel

Vorwort

„Auch in Wissenschaften kann man eigentlich nichts wissen, es will immer getan sein.“

Johann Wolfgang von Goethe

Das vorliegende Buch hat die Vermittlung mathematischen Grundwissens für Studierende des Bauingenieurwesens zum Ziel. Es entstand auf der Grundlage der Vorlesungen und Übungen in Ingenieurmathematik am Fachbereich Bauingenieurwesen der Fachhochschule Kaiserslautern, die ich seit langem dort halte. Es ist sowohl zur Begleitung der Vorlesungen als auch zum Selbststudium vorgesehen. Im Vergleich zu den Vorlesungen sind einige Stellen vertieft dargestellt und durch Beispiele ergänzt worden.

Das Buch beinhaltet mathematische Grundlagen (Arithmetik reeller Zahlen, Funktionen einer Veränderlichen) und darauf aufbauend für das Studium wichtige Kapitel der Höheren Mathematik (Lineare Algebra, Vektorrechnung und Analytische Geometrie, Zahlenfolgen, Grenzwerte und Stetigkeit, Differenzialrechnung, Integralrechnung, Funktionen mehrerer Veränderlicher, Gewöhnliche Differenzialgleichungen), Anwendungsbeispiele und zahlreiche Übungsaufgaben mit Lösungen. Die Auswahl des mathematischen Stoffes wurde so getroffen, dass er den veränderten Zulassungsvoraussetzungen an Fachhochschulen Rechnung trägt, im Bauingenieurwesen Anwendung findet und im Grundstudium tatsächlich vermittelbar ist. Dieser Aspekt ist insbesondere bei der derzeitigen Einführung der Bachelor-Studiengänge von Bedeutung. Die Darstellung erfolgt aufbauend, mit motivierender Begründung und mitunter, wo angebracht, mit Herleitungen. Damit soll auch der Leser mit durchschnittlichen schulischen Mathematikkenntnissen zum Studium und Selbststudium der Ingenieurmathematik in diesem Bereich angeregt werden. Trotz knapper und auf das Wesentliche beschränkter Vorstellung von Gebieten der Höheren Mathematik wird nicht auf Exaktheit verzichtet, um die logische Nachvollziehbarkeit zu gewährleisten und sichere Grundkenntnisse zu festigen. Wichtige Erkenntnisse, Formeln und Eigenschaften sind im Druck hervorgehoben, damit das Buch auch als Nachschlagewerk verwendet werden kann.

Besonderer Wert wird auf die Anwendung der vorgestellten mathematischen Werkzeuge in verschiedenen Gebieten des Bauingenieurwesens gelegt. Die Wahl der Beispiele ist oft unmittelbar diesen Disziplinen entnommen: der Statik und Festigkeitslehre, dem Vermessungswesen, dem Wasserbau, dem Straßenbau und dem Baubetrieb. Am Ende jedes Kapitels erfolgt für typische praktische Probleme die Ableitung mathematischer Aufgabenstellungen und deren vollständig durchgerechnete Lösung. Damit soll ermöglicht werden, dass der Leser auch bei neuen Problemen in der Lage ist, zunächst ein mathematisches Modell abzuleiten, um danach zu seiner Bearbeitung bekannte Methoden und Verfahren einzusetzen. Es zeigt sich, dass die Lösung praktischer Aufgaben eigenständige Ideen erfordert und oft nicht unmittelbar mit „Rezepten“ erreicht werden kann.

Zahlreiche Übungsaufgaben, die zum Teil auch aus Klausuren entnommen wurden, sind zum Training dieser Herangehensweise gedacht. Die angegebenen Lösungen dienen der Selbstkontrolle. Damit sind die Aufgaben zum Selbststudium und als Klausurvorbereitung geeignet. Sie dokumentieren gleichzeitig, dass mathematische Lösungsmethoden in vielen Gebieten des Bauingenieurwesens Anwendung finden.

Auf diesem Wege möchte ich allen herzlich danken, die mich bei dem Buchvorhaben unterstützten. Besonders bedanke ich mich bei meinem Kollegen und ehemaligen langjährigen Dekan des Fachbereiches Bauingenieurwesen der Fachhochschule Kaiserslautern, Prof. Dr. D. Ott, der eine gründliche Durchsicht des Manuskriptes vornahm und fast alle Beispiele und Aufgaben nachgerechnet hat. In vielen Gesprächen über Inhalte und Darstellung der Höheren Mathematik für Bauingenieure trug er zum Entstehen dieses Buches bei. Mein Dank gilt ebenfalls den Kollegen meines Fachbereiches, denen ich manche inhaltliche Anregung verdanke, und nicht

zuletzt den Studierenden, die mich durch ihr Interesse und ihre Fragen in den Vorlesungen zu dieser geschlossenen Darstellung motivierten. Bei Frau Fritzsch und Frau Kaufmann vom Carl Hanser Verlag möchte ich mich ebenfalls für die angenehme Zusammenarbeit und die zahlreichen Anregungen, Vorschläge und geduldigen Diskussionen zur Gestaltung des Buches bedanken.

Kaiserslautern, im Sommer 2006 Kerstin Rjasanowa

Die 2., aktualisierte und erweiterte Auflage des vorliegenden Buches soll den Anforderungen des Bachelor-Studiums, insbesondere im Bauingenieurwesen, noch besser gerecht werden. In erster Linie sind deshalb zahlreiche neue Beispiele, meistens mit direktem Bezug zum Bauingenieurwesen, in fast allen Kapiteln integriert. Dadurch soll die Anwendung der ausgeführten Theorie durchgehend gezeigt werden. Außerdem dienen Beispielrechnungen immer auch der Selbstkontrolle und Bestätigung eigener selbstständiger Überlegungen. Viele neue Abbildungen zur Illustration der Inhalte oder zur Kontrolle von Zahlenbeispielen wurden angefertigt.

Das Kapitel 3 „Lineare Algebra“ wurde um den Abschnitt „Eigenwerte und Eigenvektoren“ erweitert, das Kapitel 4 „Vektorrechnung und Analytische Geometrie“ um den Abschnitt „Koordinatensysteme und Koordinatentransformationen“ und das Kapitel 6 „Differenzialrechnungen für Funktionen einer Veränderlichen“ um den Abschnitt „Kurve, Tangente, Normale, Krümmung“. Die Notwendigkeit der Behandlung von Grundbegriffen dieser Themen hat sich während der Vorlesungen in Mathematik im Bachelorstudium in den vergangenen Jahren gezeigt, da sie unmittelbare Anwendungen im Fächerkatalog des Bauingenieurstudiums haben. Sowohl Beispiele und neue Übungsaufgaben zu diesen Themen demonstrieren dies.

Die Kapitel „Funktionen mehrerer Veränderlicher“ sowie „Differenzialgleichungen“ sind nicht mehr im vorliegenden Buch enthalten. Diese Themen können im Masterstudium behandelt werden und sind daher für ein separates Buch („Mathematik für Bauingenieure/ Masterstudium“) vorgesehen. Ebenso wurden alle Übungsaufgaben und Lösungen aus dem Buch ausgegliedert. In einer separaten Aufgabensammlung ist geplant, Übungsaufgaben mit Lösungswegen und Lösungen für das Bachelor- und Masterstudium zusammen zu stellen.

Im Vergleich zur Fassung des Buches von 2006 ist in einigen Kapiteln eine Neugestaltung bzw. gründliche Bearbeitung des Layouts vorgenommen worden, um Inhalte zu straffen und die Übersicht zu verbessern. Die Zusammenfassung der Inhalte auf der Marginalienspalte ist erweitert worden und soll die Arbeit mit dem Buch erleichtern. Auch das Sachwortverzeichnis wurde aus diesem Grund erweitert.

Für die gewissenhafte Durchsicht des Buches danke ich sehr meinem Kollegen des Studienganges Bauingenieurwesen, Prof. Dr. Schanzenbach, und dem Studenten des Bauingenieurwesens an der HS Kaiserslautern, Herrn P. Holschuh. Ein Dankeschön gilt ebenfalls vielen Studierenden des Studienganges Bauingenieurwesen der Hochschule Kaiserslautern, die Kontrollrechnungen der Übungsaufgaben vornahmen und so mithalfen, die angegebenen Lösungen zu verifizieren. Bei Herrn Ph. Thorwirth vom Fachbuchverlag Leipzig im Carl Hanser Verlag bedanke ich mich herzlich für die Unterstützung beim Entstehen des vorliegenden Buches und die gute Zusammenarbeit mit dem Verlag.

Kaiserslautern, im Sommer 2015 Kerstin Rjasanowa

Die vorliegende überarbeitete und aktualisierte Auflage des Buches enthält außer den erforderlichen Berichtigungen Vereinheitlichungen, Ergänzungen eine Umgestaltung insbesondere in Kapitel 4 „Vektorrechnung und Analytische Geometrie“, sowie einige neue Abbildungen zum besseren Verständnis.

Kaiserslautern, im Sommer 2023 Kerstin Rjasanowa

Inhaltsverzeichnis

1 Arithmetik reeller Zahlen

In der Menge der reellen Zahlen sind die Addition und die Multiplikation zwei Rechenoperationen, die durch festgelegte Eigenschaften erklärt sind. Daraus ergeben sich verschiedene Schlussfolgerungen für das Rechnen mit reellen Zahlen. Außerdem gibt es in der Menge der reellen Zahlen einen Ordnungsbegriff, der z. B. dem Lösen von Ungleichungen zugrunde liegt.

Bezeichnungen
Die Menge der reellen Zahlen wird mit $\mathbb{R}$ bezeichnet. Die Zugehörigkeit einer Zahl a zur Menge $\mathbb{R}$ wird mit $a \in \mathbb{R}$ gekennzeichnet.

1.1 Die Addition

In diesem Abschnitt werden die vier Axiome der Addition angegeben. Die Subtraktion wird mithilfe der Addition erklärt. Rechenregeln für die Addition und die Subtraktion werden genannt

Definition 1.1

Zu zwei beliebigen reellen Zahlen a und b gibt es eine reelle Zahl $a+b$, die **Summe** von a und b genannt wird. Die Zahlen a und b heißen **Summanden**.

Axiome der Addition

Für beliebige Zahlen $a, b, c \in \mathbb{R}$ gelten folgende Axiome (Festlegungen):

1. $a + b = b + a$. — **Kommutativgesetz**
2. $(a + b) + c = a + (b + c)$. — **Assoziativgesetz**
3. Es gibt eine reelle Zahl 0 so, dass für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt: — **Neutrales Element**
   $a + 0 = 0 + a = a$.
   Diese Zahl wird **Null** genannt.
4. Zu jeder Zahl $a \in \mathbb{R}$ gibt es eine Zahl $b \in \mathbb{R}$ so, dass gilt: — **Inverses Element**
   $a + b = b + a = 0$.
   Die Zahl b wird die zu a **entgegengesetzte Zahl** genannt.

Bemerkung 1.2

Eine Menge mit einer Operation, die diese vier Eigenschaften Kommutativität, Assoziativität, Existenz des neutralen Elementes und des zu einem beliebigen Element inversen erfüllt, wird in der Mathematik nach dem Mathematiker **Abel** kommutative oder **Abel-Gruppe** genannt. So besitzt die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ bezüglich der Addition die algebraische Struktur einer kommutativen Gruppe. Das neutrale Element ist die Zahl 0 (Axiom 3), und das zu einem Element inverse ist die entgegengesetzte Zahl (Axiom 4).

Niels Henrik Abel (* 5. August 1802 in der Nähe von Stavanger, † 6. April 1829 in Froland, Norwegen)
norwegischer Mathematiker
hier: Abel-Gruppen

Aus den vier Axiomen ergeben sich einige Folgerungen, die für das Rechnen mit reellen Zahlen von Bedeutung sind:

Differenz

1. Zu zwei Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ gibt es genau eine Zahl $x \in \mathbb{R}$, für die gilt
   $a + x = b$.
   x heißt **Differenz von** b **und** a. Man schreibt
   $x = b - a$
   und sagt: „a wird von b **subtrahiert**".
   Für $0 - a$ wird kurz $-a$ geschrieben (siehe Axiom 3).

Entgegengesetzte Zahl

2. Für jede Zahl $a \in \mathbb{R}$ gilt $a = -(-a)$, d. h., die zu $-a$ entgegengesetzte Zahl ist a. Insbesondere ist die zu 0 entgegengesetzte Zahl 0: $-0 = 0$.

3. Für beliebige Zahlen $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ gilt

Gleichheit von Differenzen

Summe von Differenzen

Differenz von Differenzen

$$\begin{array}{ccc} b-a = d-c & \text{genau dann, wenn} & b+c = a+d\ , \\ (b-a)+(d-c) & = & (b+d)-(a+c), \\ (b-a)-(d-c) & = & (b+c)-(a+d). \end{array}$$

Kopfrechnen

Beispiel 1.3

Die Axiome der Addition und ihre Folgerungen werden z. B. beim „Kopfrechnen" angewendet. So ist

$$\begin{array}{lcl} 23+56 & = & (20+3)+(50+6) = (20+50)+(3+6) = 79, \\ 68+(45+32) & = & 68+(32+45) = (68+32)+45 = 145, \\ (145-56)+(37-44) & = & (145+37)-(56+44) = 182-100 = 82. \end{array}$$

1.2 Die Multiplikation

In diesem Abschnitt werden die vier Axiome der Multiplikation angegeben. Die Division wird mithilfe der Multiplikation erklärt. Rechenregeln für die Multiplikation und die Division werden genannt.

Definition 1.4

Zu zwei beliebigen reellen Zahlen a und b gibt es stets eine reelle Zahl $a \cdot b$, die **Produkt von** a **und** b genannt wird. Die Zahlen a und b heißen **Faktoren**.

Axiome der Multiplikation

Für beliebige Zahlen $a, b, c \in \mathbb{R}$ gelten folgende Axiome (Festlegungen):

Kommutativgesetz

1. $a \cdot b = b \cdot a$.

Assoziativgesetz

2. $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

Neutrales Element

3. Es gibt eine reelle Zahl 1 so, dass für alle $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ gilt: $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$.
   Diese Zahl wird **Eins** genannt.

Inverses Element

4. Zu jeder Zahl $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ gibt es eine Zahl $b \in \mathbb{R}$ so, dass gilt: $a \cdot b = b \cdot a = 1$.
   Die Zahl b wird die zu a **reziproke Zahl** genannt.

Bemerkung 1.5

Die Menge der von null verschiedenen reellen Zahlen $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ hat bezüglich der Multiplikation ebenfalls die algebraische Struktur einer kommutativen Gruppe. Das neutrale Element ist hierbei die Zahl 1 (Axiom 3), und das zu einem Element inverse ist die reziproke Zahl (Axiom 4).

Zwischen Addition und Multiplikation gibt es ein Verknüpfungsgesetz. Für beliebige Zahlen $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt

Distributivgesetz

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$$

Aus den Axiomen der Multiplikation und dem Distributivgesetz ergeben sich einige Folgerungen für das Rechnen mit reellen Zahlen:

Produkt gleich null

1. **Ein Produkt ist genau dann gleich null, wenn mindestens einer seiner Faktoren gleich null ist**, d. h., aus $a \cdot b = 0$ folgt $a = 0$ oder $b = 0$ und umgekehrt.

Quotient, Bruch

2. Zu zwei Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$ gibt es genau eine Zahl $x \in \mathbb{R}$, für die gilt $a \cdot x = b$.
   x heißt **Quotient aus** b **und** a oder **Bruch** mit dem **Zähler** b und dem **Nenner** a. Man schreibt
   $$x \;=\; b : a \;=\; \frac{b}{a} \;=\; b/a$$
   und sagt: „b wird durch a **dividiert**".

Reziproke Zahl

3. Für jede Zahl $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$ ist die zu a reziproke Zahl $1/a$. Insbesondere ist die zu 1 reziproke Zahl 1. Die zu $1/a$ reziproke Zahl ist a, sodass gilt
   $$\frac{1}{1/a} \;=\; a.$$

Gleichheit von Brüchen

4. Für beliebige Zahlen $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $a, c \neq 0$ ist
   $$\frac{b}{a} \;=\; \frac{d}{c} \quad \text{genau dann, wenn} \quad b \cdot c \;=\; a \cdot d,$$
   d. h., **zwei Brüche sind genau dann gleich**, wenn die Produkte aus Zähler des einen und Nenner des anderen Bruches gleich sind.

Produkt von Brüchen

5. Für beliebige Zahlen $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ist
   $$\frac{b}{a} \cdot \frac{d}{c} \;=\; \frac{b \cdot d}{a \cdot c}, \; a, c \neq 0 \quad \text{und} \quad \frac{b}{a} : \frac{d}{c} \;=\; \frac{b \cdot c}{a \cdot d}, \; a, c, d \neq 0,$$

Quotient von Brüchen

   d. h., **das Produkt zweier Brüche** ist ein Bruch, dessen Zähler das Produkt der Zähler der Faktoren und dessen Nenner das Produkt der Nenner der Faktoren ist, und **zwei Brüche werden dividiert**, indem der erste Bruch mit dem Reziproken des zweiten Bruches multipliziert wird.

6. Für jede Zahl $a \in \mathbb{R}$ gilt $-a = (-1) \cdot a$, d. h., die zu a entgegengesetzte Zahl $-a$ ist das Produkt der Zahlen -1 und a.

7. Für beliebige Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ gilt $-(a \cdot b) = (-a) \cdot b$, d. h., die zum Produkt $a \cdot b$ entgegengesetzte Zahl $-(a \cdot b)$ ist das Produkt der zu a entgegengesetzten Zahl $-a$ und der Zahl b.

8. Es gilt $(-1) \cdot (-1) = 1$, d. h., das Produkt der zu 1 entgegengesetzten Zahl -1 mit sich selbst ergibt wieder 1.

Bemerkung 1.6 Die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen mit den in **Definition 1.1** und **Definition 1.4** erklärten Rechenoperationen Addition und Multiplikation hat mit den jeweils vier Axiomen und dem Verknüpfungsgesetz (Distributivgesetz) die algebraische Struktur eines **Körpers**.

Malzeichen Sind ein oder beide Faktoren eines Produktes Variablen, so kann beim Schreiben des Produktes das Malzeichen weggelassen werden. Z. B. wird geschrieben

$$a \cdot b = ab, \qquad 8 \cdot b = 8b.$$

Fakultät Das Produkt der ersten n natürlichen Zahlen wird kürzer geschrieben

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = n!\ .$$

Es heißt **Fakultät** von n. Vereinbarungsgemäß ist außerdem

$$0! = 1.$$

1.3 Anwendungen der Rechenoperationen

Die Rechenoperationen werden beim Umformen und Auswerten von Termen angewendet. Dabei haben Klammern Vorrang vor den „Punktrechenarten“ Multiplikation und Division und diese wiederum vor den „Strichrechenarten“ Addition und Subtraktion. Das Erweitern und Kürzen von Brüchen wird bei ihrer Addition und Subtraktion bzw. bei ihrer Vereinfachung benutzt. Das ganzzahlige Potenzieren einer reellen Zahl wird mit der Multiplikation erklärt. Der binomische Lehrsatz zum Potenzieren von Summen mit zwei Summanden wird angegeben.

Das Auflösen von Klammern

Steht ein Pluszeichen vor einem Summanden in Klammern, so bleibt die Klammer einfach weg. Steht ein Minuszeichen vor einem Summanden in Klammern, so sind beim Weglassen der Klammer alle in ihr vorkommenden Vorzeichen bzw. Rechenzeichen umzukehren.

Beim Auftreten von Mehrfachklammern können z. B. die Klammern von innen nach außen aufgelöst werden.

Beispiel 1.7

Auflösen von Klammern

Es ist

$$\begin{aligned}
&8p - (15r - 7q + 6p) + (8q - p + 7r)\\
&\quad = \quad 8p - 15r + 7q - 6p + 8q - p + 7r\\
&\quad = \quad p + 15q - 8r,\\
&17m + (6n - (3m + 4n)) - ((8m - n) - (5m + (3n - 6m)))\\
&\quad = \quad 17m + (6n - 3m - 4n) - (8m - n - (5m + 3n - 6m))\\
&\quad = \quad 17m + (2n - 3m) - (8m - n - (-m + 3n))\\
&\quad = \quad 17m + 2n - 3m - (8m - n + m - 3n)\\
&\quad = \quad 14m + 2n - (9m - 4n)\\
&\quad = \quad 14m + 2n - 9m + 4n \; = \; 5m + 6n.
\end{aligned}$$

Das Ausmultiplizieren und das Ausklammern

Das Ausmultiplizieren von Klammern erfolgt nach dem Distributivgesetz. So ist z. B.

$$\begin{aligned}
(a+b)c &= ac + bc, & a(b-c) &= ab - ac,\\
(a+b)(c+d) &= a(c+d) + b(c+d) &&= ac + ad + bc + bd.
\end{aligned}$$

Umgekehrt gelesen, ergeben sich daraus Regeln zum Ausklammern von gleichen Faktoren in Summanden:

$$\begin{aligned}
ac + bc &= (a+b)c, & ab + ac &= a(b+c),\\
ac - bc &= (a-b)c, & ab - ac &= a(b-c).
\end{aligned}$$

Beispiel 1.8

Ausmultiplizieren, Ausklammern

Im ersten Beispiel wird zuerst jeder Summand der ersten Klammer mit der zweiten Klammer multipliziert und danach diese ausmultipliziert. Im zweiten Beispiel wird der Faktor $x - y$ ausgeklammert.

$$\begin{aligned}
(a + 4b - 7c)(x - y) &= a(x - y) + 4b(x - y) - 7c(x - y)\\
&= ax - ay + 4bx - 4by - 7cx + 7cy,\\
n(x - y) - x + y &= n(x - y) - (x - y) \; = \; (n - 1)(x - y).
\end{aligned}$$

Addition und Subtraktion von Brüchen

Erweitern und Kürzen

Das **Erweitern** eines Bruches ist das Multiplizieren seines Zählers und Nenners mit *derselben* Zahl, das **Kürzen** entsprechend das Dividieren durch *dieselbe* Zahl. Erweitern und Kürzen verändern den Wert eines Bruches nicht:

$$\frac{a}{c} = \frac{ad}{cd}, \qquad \frac{ad}{cd} = \frac{a}{c}.$$

Gleichnamige Brüche

Gleichnamige Brüche (d. h., Brüche, deren Nenner gleich sind,) werden addiert bzw. subtrahiert, indem ihre Zähler addiert bzw. subtrahiert werden und der Nenner beibehalten wird:

$$\frac{a}{c} \pm \frac{b}{c} = \frac{a \pm b}{c}.$$

Ungleichnamige Brüche

Ungleichnamige Brüche werden addiert bzw. subtrahiert, indem sie durch Erweitern gleichnamig gemacht und dann addiert bzw. subtrahiert werden:

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} \pm \frac{bc}{bd} = \frac{ad \pm bc}{bd}.$$

Hauptnenner

Beispiel 1.9

Der Hauptnenner der zu subtrahierenden Brüche ist $(x-1)(x-2)$. Der erste Bruch wird mit $(x-2)$, der zweite mit $(x-1)$ erweitert:

$$\frac{4}{x-1} - \frac{3}{x-2} = \frac{4(x-2) - 3(x-1)}{(x-1)(x-2)} = \frac{x-5}{(x-1)(x-2)}.$$

Das Potenzieren

Die **n-ten Potenz einer reellen Zahl** a ist das Produkt aus n Faktoren, die alle gleich a sind:

$$a^n = a \cdot a \cdot \ldots \cdot a, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Dabei wird die reelle Zahl a **Basis** und die natürliche Zahl n **Exponent** der Potenz a^n genannt.

Insbesondere ist $a^1 = a$.
Vereinbarungsgemäß ist für eine belebige reelle Zahl $a \neq 0$ stets $a^0 = 1$.

Potenzgesetze

Es gelten folgende **Potenzgesetze** für das Multiplizieren und Dividieren von Potenzen:

Potenz von Produkt, Quotient
Produkt, Quotient von Potenzen
Potenz, negativer Exponent
Potenz einer Potenz

$$\begin{aligned}
(a \cdot b)^n &= a^n \cdot b^n, & (a/b)^n &= a^n/b^n, \\
a^m \cdot a^n &= a^{m+n}, & a^m/a^n &= a^{m-n}, \\
a^{-n} &= 1/a^n & &= (1/a)^n, \\
(a^m)^n &= (a^n)^m & &= a^{mn}.
\end{aligned}$$

Zusammenfassen von Potenzen

Beispiel 1.10

Potenzen werden nach gleichen Basen zusammengefasst:

$$\begin{aligned}
(xy)^{m+n}(yz)^{2m-n}(xz)^{m-2n} &= x^{m+n}y^{m+n}y^{2m-n}z^{2m-n}x^{m-2n}z^{m-2n} \\
&= x^{m+n+m-2n}y^{m+n+2m-n}z^{2m-n+m-2n} \\
&= x^{2m-n}y^{3m}z^{3m-3n}, \\
\frac{a^{1-m}}{a^{n+1}} &= a^{(1-m)-(n+1)} = a^{-(m+n)} = \frac{1}{a^{m+n}}.
\end{aligned}$$

Die binomischen Formeln und der binomische Lehrsatz

Die binomischen Formeln ergeben sich, wenn folgende Klammern nach dem Distributivgesetz ausmultipliziert werden:

$$
\begin{aligned}
(a+b)^2 &= a^2+2ab+b^2, \\
(a-b)^2 &= a^2-2ab+b^2, \\
(a+b)(a-b) &= a^2-b^2.
\end{aligned}
$$

1. Binomische Formel

2. Binomische Formel

3. Binomische Formel

Bei steigenden Potenzen ergibt sich durch fortgesetztes Ausmultiplizieren der Klammern

$$
\begin{aligned}
(a+b)^3 &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3, \\
(a+b)^4 &= a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4, \\
(a+b)^5 &= a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5 \text{ usw.}
\end{aligned}
$$

Für die n-te Potenz der Summe $a+b$ gilt der **binomische Lehrsatz** als Regel zum Ausmultiplizieren:

$$
\begin{aligned}
(a+b)^n &= \binom{n}{0}a^nb^0+\binom{n}{1}a^{n-1}b^1+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\ldots \\
&\quad +\binom{n}{n-1}a^1b^{n-1}+\binom{n}{n}a^0b^n \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k.
\end{aligned}
$$

Binomischer Lehrsatz

Dabei sind die Ausdrücke $\binom{n}{k}$ die **Binomialkoeffizienten**. Für ihre Berechnung gilt

$$
\binom{n}{k}=\frac{n\cdot(n-1)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdots k}=\frac{n!}{k!\,(n-k)!}, \qquad \binom{n}{0}=1.
$$

Beispiel 1.11

Berechnung von Binomialkoeffizienten

Die Binomialkoeffizienten für die Potenz $(a+b)^5$ berechnen sich z. B. wie folgt:

$$
\binom{5}{0}=1, \quad \binom{5}{1}=\frac{5}{1}=5, \quad \binom{5}{2}=\frac{5\cdot 4}{1\cdot 2}=10, \quad \binom{5}{3}=\frac{5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3}=10
$$

$$
\binom{5}{4}=\frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}=5, \qquad \binom{5}{5}=\frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}=1.
$$

Folgende **Eigenschaften der Binomialkoeffizienten** lassen sich leicht nachweisen:

$$
\binom{n}{n}=1, \quad \binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}, \quad \binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}.
$$

Eigenschaften der Binomialkoeffizienten

Dreieck von Pascal

Aufgrund dieser Eigenschaften können die Binomialkoeffizienten auch rekursiv aus dem **Dreieck von Pascal** ermittelt werden:

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & & 1 & & & & & \\ & & & & 1 & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\ & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\ 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\ & & & & & \dots & & & & & \end{array}$$

Dabei stellt jede Zeile die Binomialkoeffizienten der entsprechenden Potenz von $a+b$ dar, angefangen mit der 0-ten. Die Binomialkoeffizienten der Folgezeile ergeben sich aus denen der vorherigen, indem die beiden unmittelbar darüber stehenden addiert werden. Außen werden jeweils Einsen ergänzt.

Binomischer Lehrsatz

Beispiel 1.12

1. Aus dem binomischen Lehrsatz ergibt sich unmittelbar nach Ersetzen von b durch $-b$

$$\begin{aligned}(a-b)^n &= \binom{n}{0} a^n - \binom{n}{1} a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 - \dots \\ &\quad +(-1)^{n-1}\binom{n}{n-1} ab^{n-1} + (-1)^n \binom{n}{n} b^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} a^{n-k}b^k.\end{aligned}$$

2. Für die Quadrate von Summen mit mehr als zwei Summanden folgt sukzessive

$$\begin{aligned}(a_1+a_2+a_3+\dots+a_n)^2 &= a_1^2+a_2^2+a_3^2+\dots+a_n^2 \\ &\quad + 2a_1a_2+2a_1a_3+\dots+2a_1a_n+2a_2a_3+\dots+2a_{n-1}a_n.\end{aligned}$$

3. Nach dem binomischen Lehrsatz ergibt sich unmittelbar

$$(1-2z)^4 = 1-8z+24z^2-32z^3+16z^4.$$

1.4 Der Wurzelbegriff

Die Wurzel aus einer nicht negativen reellen Zahl wird mithilfe der Multiplikation und des Potenzbegriffes erklärt. Gesetze für das Rechnen mit Wurzeln bzw. Potenzen mit rationalen Exponenten werden angegeben.

Definition 1.13

Die **Quadratwurzel** $a = \sqrt{b}$ aus einer *nicht negativen* reellen Zahl b ist die *nicht negative* reelle Zahl a, die mit sich selbst multipliziert b ergibt: $a^2 = b$.

Quadratwurzel

Beispiel 1.14

Es ist z. B. $\sqrt{9} = 3$, $\sqrt{0.0144} = 0.12$, $\sqrt{0} = 0$.

Definition 1.15

Sei n eine natürliche Zahl. Die **n-te Wurzel** $a = \sqrt[n]{b}$ aus einer *nicht negativen* reellen Zahl b ist die *nicht negative* reelle Zahl a, deren n-te Potenz a^n den Wert b hat: $a^n = b$. Das Ermitteln der Wurzel aus einer reellen Zahl heißt **Radizieren**.

Beispiel 1.16 — **Radizieren**

Es ist z. B. $\sqrt[3]{8} = 2$, $\sqrt[3]{0.125} = 0.5$, $\sqrt[5]{0} = 0$.

Für das Rechnen mit Wurzeln ergeben sich einige Folgerungen:

1. Es gilt $\sqrt[n]{1} = 1$, da $1^n = 1$ ist.
   Es gilt $\sqrt[n]{0} = 0$, da $0^n = 0$ ist.
   Es gilt $\sqrt[1]{b} = b$, da $b^1 = b$ ist.

2. Aus $a^n = b$ folgt dann $a = \sqrt[n]{b}$, wenn a und b *nicht negativ* sind. Radizieren und Potenzieren sind im Bereich *nicht negativer* reeller Zahlen Umkehrungen voneinander.

Beispiel 1.17 — **Quadratwurzel ist nicht negativ**

1. Aus der Gleichung $9 = 3^2$ folgt $\sqrt{9} = 3$.
2. Aus der Gleichung $9 = (-3)^2$ folgt *nicht* $\sqrt{9} = -3$, sondern $\sqrt{9} = |-3| = 3$.

---

3. Die Gleichung $x^2 = b$ mit der gegebenen *nicht negativen* reellen Zahl b hat die Lösungen $x = \sqrt{b}$ und $x = -\sqrt{b}$. Wird die Quadratwurzel auf beiden Seiten der Gleichung gebildet, so ergibt sich links für $x \geq 0$ die *nicht negative* Zahl x und für $x < 0$ die *nicht negative* Zahl $-x$. Rechts ergibt sich $\sqrt{b}$.

4. Ist n eine *ungerade natürliche Zahl*, so ist die n-te Wurzel aus der *negativen* reellen Zahl b diejenige *negative* Zahl a, für die $a^n = b$ gilt.

Beispiel 1.18 — **Wurzel aus negativer Zahl**

Z. B. gilt $\sqrt[3]{-27} = -3$, $\sqrt[5]{-32} = -2$, $\sqrt[n]{-1} = -1$ für *ungerade* natürliche Zahlen n.

---

5. Die Gleichung $x^n = b$ mit $b < 0$ hat nur dann eine reelle Lösung x, wenn n ungerade ist. Dann ist $x < 0$.

   Die Gleichung $x^n = b$ mit $b > 0$ hat genau die positive reelle Lösung $x = \sqrt[n]{b}$, wenn n ungerade ist. Wenn n gerade ist, existieren genau zwei Lösungen: $x = \sqrt[n]{b}$ (positiv) und $x = -\sqrt[n]{b}$ (negativ). Die Probe zeigt jeweils, dass die angegebenen Zahlen x auch wirklich Lösung der Ausgangsgleichung sind.

Potenzgleichungen

Beispiel 1.19

1. Die Gleichung $x^5 = -243$ hat die (negative) Lösung $x = \sqrt[5]{-243} = -3$.
2. Die Gleichung $x^5 = 243$ hat die (positive) Lösung $x = \sqrt[5]{243} = 3$.
3. Die Gleichung $x^4 = 81$ hat die (positive) Lösung $x = \sqrt[4]{81} = 3$ und die (negative) Lösung $x = -\sqrt[4]{81} = -3$.

Wurzelgesetze

Für das Rechnen mit Wurzeln und das Radizieren arithmetischer Ausdrücke gibt es folgende **Wurzelgesetze**:

Wurzel aus Produkt

Wurzel aus Quotienten

Wurzel aus Wurzel

Wurzel aus Potenz

Rationale Exponenten

$$\begin{aligned}
\sqrt[n]{a^n} &= a, \ (\sqrt[n]{a})^n = a, \ \sqrt[n]{a^{mn}} = a^m,\\
\sqrt[n]{ab} &= \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b},\\
\sqrt[n]{a/b} &= \sqrt[n]{a}/\sqrt[n]{b},\\
\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} &= \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a} = a^{\frac{1}{mn}},\\
\sqrt[n]{a^m} &= a^{\frac{m}{n}},\\
a^{\frac{m}{n}}\cdot a^{\frac{p}{q}} &= a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}, \quad a^{\frac{m}{n}}/a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}},\\
(ab)^{\frac{m}{n}} &= a^{\frac{m}{n}}b^{\frac{m}{n}}, \quad (a/b)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}}/b^{\frac{m}{n}}.
\end{aligned}$$

Anwendung der Wurzelgesetze

Beispiel 1.20

Mit den Wurzelgesetzen ergibt sich

1. $\sqrt[x]{b^{2x}} = b^2$,
2. $\sqrt[3]{12x^6y^9} = \sqrt[3]{12}\,\sqrt[3]{(x^2)^3}\,\sqrt[3]{(y^3)^3} = \sqrt[3]{12}x^2y^3$ (Wurzel aus Produkt),
3. $\sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$ (Wurzel aus Quotienten),
4. $\sqrt[4]{\sqrt{256}} = 2$ (Wurzel aus Wurzel),
5. $\sqrt[nx]{a^{mx}} = \sqrt[n]{a^m}$ (Wurzel aus Potenz).

Treten im Nenner von arithmetischen Ausdrücken Wurzeln auf, so können sie durch äquivalente Umformungen beseitigt werden.

Wurzelfreier Nenner

Beispiel 1.21

Es ist $\dfrac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \dfrac{1\cdot(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})} = \dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}$.

Hier wurde der Bruch mit $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ erweitert, sodass der Nenner nach der dritten binomischen Formel dadurch wurzelfrei ist.

1.5 Anordnung reeller Zahlen, Ungleichungen

Mithilfe von vier Axiomen (Festlegungen) wird ermöglicht, dass reelle Zahlen miteinander verglichen werden können. Daraus ergeben sich

Sachwortverzeichnis