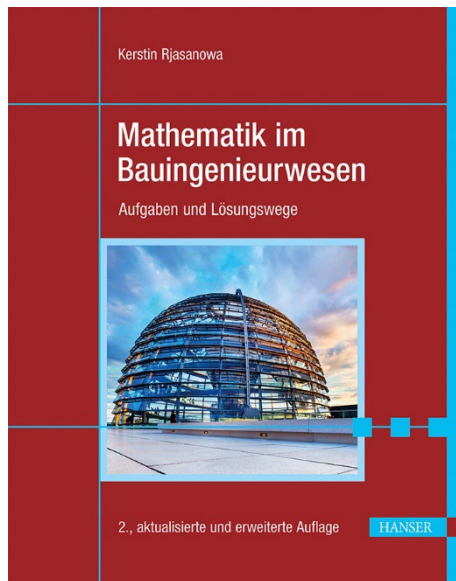


HANSER



Leseprobe

zu

Mathematik im Bauingenieurwesen

von Kerstin Rjasanowa

Print-ISBN: 978-3-446-47771-1
E-Book-ISBN: 978-3-446-47852-7

Weitere Informationen und Bestellungen unter
<https://www.hanser-kundencenter.de/fachbuch/artikel/9783446477711>

sowie im Buchhandel

© Carl Hanser Verlag, München

Vorwort

„Das Ergebnis habe ich schon, jetzt brauche ich nur noch den Weg, der zu ihm führt.“

Carl Friedrich Gauß (1777–1855),
Deutscher Mathematiker, Astronom und Physiker

Nachdem die beiden Lehrbücher „Mathematik für Bauingenieure 1. Grundlagen für das Bachelor-Studium“ und „Mathematik für Bauingenieure 2. Ausgewählte Kapitel für Ingenieure im Master-Studium“ erschienen sind, soll das vorliegende Buch „Mathematik für Bauingenieure. Aufgaben und Lösungswege“ diese Buchreihe vervollständigen. Sie ist auf der Basis meiner langjährigen Vorlesungen, Übungen und Klausuren in Mathematik im Studiengang Bauingenieurwesen der Hochschule Kaiserslautern entstanden. Viele inhaltliche Anregungen zu den Aufgaben verdanke ich der Beschäftigung mit der Anwendung mathematischer Verfahren bei spezifischen und typischen Problemen auf dem Gebiet des Bauingenieurwesens.

Anliegen dieser Aufgabensammlung ist es, dass die mathematischen Inhalte der beiden Lehrbücher, die dort an Beispielen demonstriert und angewendet werden, in den aktiven Wissensschatz des Lesers übergehen. Dazu ist das eigene, selbstständige und wiederholte Üben Voraussetzung. Anhand formaler Aufgaben können die Fertigkeiten im Umgang mit den mathematischen Inhalten geübt und überprüft werden. Eine Vielzahl praktischer Textaufgaben, vorwiegend aus dem Erfahrungsbereich des Bauingenieurwesens, steht zur Verfügung, bei deren Lösung die erworbenen theoretischen Kenntnisse und Fertigkeiten angewendet werden können. Dabei ist stets zuerst ein mathematisches Modell abzuleiten, d. h., die verbale Formulierung ist in eine mathematische Aufgabenstellung zu überführen. Deren Analyse resultiert in Vorschlägen des Einsatzes geeigneter mathematischer Lösungsverfahren. Mitunter gibt es dabei nicht nur ein einziges Standardverfahren. Andererseits lassen sich oft mit einer Methode recht unterschiedliche Anwendungsaufgaben lösen. Am Ende sollte stets das Verifizieren der Ergebnisse vorgenommen werden, z. B. durch eine Probe bei formalen Aufgaben oder durch Überprüfung auf Plausibilität bei Anwendungsaufgaben. Wird das Lösen „formaler“ Aufgaben gut beherrscht, bereitet das Realisieren der mathematischen Aufgabenstellung unabhängig vom konkreten physikalischen Hintergrund gemäß dem gewählten Lösungsalgorithmus in der Regel keine Probleme mehr. Je mehr der interessierte Leser das Erstellen eines mathematischen Modells, die Auswahl passender Lösungsmöglichkeiten und deren Umsetzung bis hin zur Bestimmung der jeweils gesuchten Größen trainiert, desto sicherer und kompetenter wird er in der Anwendung mathematischer Fertigkeiten und Erkenntnisse bei der Beantwortung vielfältiger Fragestellungen, besonders in den Ingenieurwissenschaften.

Die Aufgabensammlung ist in elf Aufgabenkapitel und elf dazugehörige Kapitel mit Lösungswegen untergliedert. Die ersten sieben Kapitel, B1 bis B7, orientieren sich an den Inhalten im Buch „Mathematik für Bauingenieure 1“ mit den Themen Arithmetik reeller Zahlen, Funktionen einer Veränderlichen, Lineare Algebra, Vektorrechnung und Analytische Geometrie, Zahlenfolgen, Grenzwerte und Stetigkeit, Differenzialrechnung sowie Integralrechnung für Funktionen einer Veränderlichen. Die restlichen vier Kapitel, M1 bis M4, orientieren sich an den Inhalten im Buch „Mathematik für Bauingenieure 2“ mit den Themen Funktionen mehrerer Veränderlicher, Differenzialgleichungen, Finanzmathematik sowie Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik.

Am Anfang jedes Aufgabenkapitels befindet sich eine Übersicht in Tabellengestalt über die wichtigsten Formeln als Erinnerung, Grundlage und Hilfestellung beim Lösen. Danach folgen formale Aufgaben und im Anschluss Textaufgaben, die Mehrheit davon mit Bezug zum Bauingenieurwesen. Kurze und klare Formulierungen der Sachverhalte und der Fragestellungen sollen die Ableitung der mathematischen Modelle erleichtern, ebenso erklärende Abbildungen. Mitunter soll der Leser aber auch selbst in der Lage sein, eine Skizze anzufertigen.

Die Rolle der Lösungswege sehe ich als Vorschlag für ein begründetes Vorgehen, um richtige Ergebnisse zu erhalten. Eigenständiges Erarbeiten und Begründen aller Lösungsschritte bis hin zum richtigen Ergebnis sind

die Kriterien, ob der Leser tatsächlich eine Aufgabe lösen kann. Darum sollte er sich in jedem Fall zuerst bemühen, selbst einen Lösungsweg und die Ergebnisse zu finden, bevor er zu den Lösungswegen im Buch greift. Damit diese Kompetenz gefördert wird, sind die Lösungswege in kleinerer Schrift gesetzt. Sie sind übersichtlich und dort, wo es möglich ist, für eine bessere Motivation kurz gehalten und in wenigen Zeilen geschrieben. Gleichartige Lösungsalgorithmen sind durch analoge Formulierungen und Gestaltung der Lösungsschritte zu erkennen. Zur leichteren Kontrolle sind die Ergebnisse bei formalen Aufgaben farblich hervorgehoben und bei Textaufgaben im Antwortsatz zusammengefasst. Illustrationen zu den Lösungen sollen die Vorstellungskraft des Lesers schulen und die Überprüfung der Ergebnisse unterstützen.

Für das sehr aufmerksame, aufwändige und gewissenhafte Korrekturlesen des Manuskriptes, an der mein Kollege des Studienganges Bauingenieurwesen der HS Kaiserslautern, Prof. Dr. Johannes Schanzenbach, die Mitarbeiter des Institutes für Angewandte Mathematik der Universität des Saarlandes Prof. Dr. Sergej Rjasanow, M. Sc. Torsten Keßler und B. Sc. Daniel Seibel und der Mitarbeiter an der Technischen Akademie Südwest e. V. Kaiserslautern, Dipl.-Math. Andreas Schraag beteiligt waren, bedanke ich mich sehr. Ein Dankeschön gilt auch vielen Studierenden des Studienganges Bauingenieurwesen der Hochschule Kaiserslautern für aufmerksames Nachvollziehen und Bestätigen der Lösungswege während der Vorlesungen, Übungen oder bei der Klausurvorbereitung. Bei Dipl.-Ing. Philipp Thorwirth bedanke ich mich für die freundliche Unterstützung dieses Buchprojektes und den fruchtbaren Austausch in der Konzeptionsphase.

Kaiserslautern, im Januar 2018

Kerstin Rjasanowa

Nachdem die neue, aktualisierte und erweiterte Auflage des Lehrbuches „Mathematik für Bauingenieure 1. Grundlagen für das Bachelor-Studium“ mit dem Titel „Mathematik im Bauingenieurwesen 1“ erschienen ist, wurde auch die vorliegende zugehörige Aufgabensammlung „Mathematik im Bauingenieurwesen. Aufgaben und Lösungswege“ neu aufgelegt. Sie enthält sowohl Aufgaben zu den Vorlesungen in „Mathematik“ im Bachelorstudium als auch zu den Vorlesungen in „Höherer Mathematik und Statistik“ im Masterstudium. Das Spektrum der Aufgaben mit zugehörigen Lösungswegen und ggf. Illustrationen wurde um weit mehr als 100 Aufgaben, vorwiegend Anwendungen im Bauingenieurwesen, ergänzt. Dabei fand die Einheitlichkeit der Darstellung und die durchgehende Hervorhebung standardisierter Lösungsalgorithmen besondere Beachtung. Außerdem erfolgte, wo notwendig, eine Fehlerkorrektur. Das besser strukturierte Layout im Lösungsteil, besonders bei Textaufgaben, soll die Lesbarkeit und das schnelle Auffinden der Antworten erleichtern. So ist die Aufgabensammlung einmal mehr zur Vertiefung mathematischer Grundideen, zum Aufgabentraining und zur Klausurvorbereitung vorgesehen. Gleichzeitig zeigen die Anwendungsaufgaben die unverminderte Aktualität der Mathematik im Bauingenieurwesen und die Notwendigkeit basierter mathematischer Kenntnisse, Denkstrukturen und Fertigkeiten.

Bei Herrn M. Eng, Amir Abed, Assistent am Studiengang Bauingenieurwesen der Hochschule Kaiserslautern, sowie bei Herrn Frank Katzenmayer und Frau Christina Kubiak, Carl Hanser Verlag, München, bedanke ich mich sehr für die aufmerksame Durchsicht des vorliegenden Buches.

Kaiserslautern, im September 2023

Kerstin Rjasanowa

Inhaltsverzeichnis

1 Aufgaben	9
B1 Arithmetik reeller Zahlen	9
B2 Funktionen einer Veränderlichen	14
B3 Lineare Algebra	28
B4 Vektorrechnung und Analytische Geometrie	41
B5 Zahlenfolgen, Grenzwerte, Stetigkeit	55
B6 Differenzialrechnung für Funktionen einer Veränderlichen	59
B7 Integralrechnung für Funktionen einer Veränderlichen	70
M1 Funktionen mehrerer Veränderlicher	81
M2 Differenzialgleichungen	92
M3 Finanzmathematik	99
M4 Statistik	110
2 Lösungswege	132
B1 Arithmetik reeller Zahlen	132
B2 Funktionen einer Veränderlichen	134
B3 Lineare Algebra	169
B4 Vektorrechnung und Analytische Geometrie	190
B5 Zahlenfolgen, Grenzwerte, Stetigkeit	217
B6 Differenzialrechnung für Funktionen einer Veränderlichen	222
B7 Integralrechnung für Funktionen einer Veränderlichen	247
M1 Funktionen mehrerer Veränderlicher	280
M2 Differenzialgleichungen	303
M3 Finanzmathematik	323
M4 Statistik	338
Literaturverzeichnis	373
Sachwortverzeichnis	375

1 Aufgaben

B1 Arithmetik reeller Zahlen

Mengen: $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ - reelle, $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$ - positive reelle, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ - natürliche,
 $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$ - ganze Zahlen $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$

Intervalle: $x \in (-\infty, a)$ bedeutet $x < a$ $x \in (a, \infty)$ bedeutet $a < x$
 $x \in (a, b)$ bedeutet $a < x < b$ $x \in [a, b]$ bedeutet $a \leq x \leq b$
 $x \in [a, b)$ bedeutet $a \leq x < b$ $x \in (a, b]$ bedeutet $a < x \leq b$

Definitionen

Begriff	Definition
Summenzeichen	$\sum_{i=m}^n a_i = a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_n, \quad m, n \in \mathbb{Z}, m \leq n, \text{ oft } m = 0, a_i \in \mathbb{R}$
n -te Potenz	$a^n = a \cdot a \cdot \dots \cdot a, \quad a \in \mathbb{R} - \text{Basis}, n \in \mathbb{N} - \text{Exponent}$
n -te Wurzel	$a = \sqrt[n]{b}$, wenn $a^n = b, \quad a, b \geq 0, n \in \mathbb{N}$ $\sqrt[n]{1} = 1 \quad \sqrt[n]{0} = 0 \quad \sqrt[n]{a} = a \quad \sqrt[2]{a} = \sqrt{a} = a^{1/2}$
Fakultät	$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n, \quad n \in \mathbb{N} \quad 0! = 1$
Binomialkoeffizient	$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k} = \frac{n!}{k! (n-k)!}, \quad n, k \in \mathbb{N}_0 \quad \binom{n}{k} = 0, \quad k > n$
Symmetrie, Summe	$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \quad \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

Gesetze und Rechenregeln

Name	Gesetz
Kommutativität	$a + b = b + a$
Assoziativität	$(a + b) + c = a + (b + c)$
Kommutativität	$ab = ba$
Assoziativität	$(ab)c = a(bc)$
Distributivität	$a(b + c) = ab + ac$
Ausmultiplizieren	$(a + b)c = ac + bc, \quad a(b - c) = ab - ac, \quad (a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$
Ausklammern	$ac + bc = (a + b)c, \quad ab + ac = a(b + c), \quad ac - bc = (a - b)c, \quad ab - ac = a(b - c)$
1. Binomische Formel	$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2. Binomische Formel	$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3. Binomische Formel	$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$
Binomischer Lehrsatz	$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \quad (a-b)^n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$

Potenz- und Wurzelgesetze

Name	Gesetz, $a, b \in \mathbb{R}^+$, $r, s \in \mathbb{R}$, $m, n, k, l \in \mathbb{N}$		
Potenzgesetze	Gleiche Basen	$a^r a^s = a^{r+s}$	$a^r / a^s = a^{r-s}$
	Produkt, Quotient	$(ab)^s = a^s b^s$	$(a/b)^s = a^s / b^s$
	Potenz	$(a^r)^s = (a^s)^r = a^{rs}$	
	Negativer Exponent	$a^{-s} = 1/a^s = (1/a)^s$	
Wurzelgesetze	Wurzel, Potenz	$\sqrt[n]{a^n} = a$, $(\sqrt[n]{a})^n = a$,	$\sqrt[n]{a^{mn}} = a^m$
	Produkt, Quotient	$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b}$	$\sqrt[n]{a/b} = \sqrt[n]{a} / \sqrt[n]{b}$
	Rationaler Exponent	$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = a^{\frac{1}{mn}}$	$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$
	Gleiche Basen	$a^{\frac{m}{n}} a^{\frac{k}{l}} = a^{\frac{m}{n} + \frac{k}{l}}$	$a^{\frac{m}{n}} / a^{\frac{k}{l}} = a^{\frac{m}{n} - \frac{k}{l}}$
	Gleicher Exponent	$(ab)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}} b^{\frac{m}{n}}$	$(a/b)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}} / b^{\frac{m}{n}}$

Bruchrechnung

Bezeichnung	Rechenregel, $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$		Bedingung
Gleichheit Erweitern, Kürzen	$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff a \cdot d = b \cdot c$	$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot e}{b \cdot e}$ $\frac{a \cdot e}{b \cdot e} = \frac{a}{b}$	$b, d, e \neq 0$
Multiplikation, Division	$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$	$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$	$b, c, d \neq 0$
Addition, Subtraktion	$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b}$	$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d \pm b \cdot c}{b \cdot d}$	$b, d \neq 0$

Axiome der Ordnung

Name	Gesetz
Konnexität	Zwischen zwei Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ besteht genau eine der Beziehungen $a < b$, $a > b$, $a = b$.
Transitivität	Aus $a < b$ und $b < c$ folgt $a < c$.
Monotonie der Addition	Aus $a < b$ folgt $a + c < b + c$.
Monotonie der Multiplikation	Aus $a < b$ und $c > 0$ folgt $ac < bc$.

Rechenregeln für Ungleichungen

Regel, wenn $a < b$ und $c < d$	Interpretation
$-a > -b$	Wird eine Ungleichung mit -1 multipliziert, so kehrt sich ihr Relationszeichen um.
$a + c < b + d$	Ungleichungen mit demselben Relationszeichen dürfen addiert werden.
Für $a, d > 0$ folgt $ac < bd$.	Ungleichungen mit demselben Relationszeichen dürfen multipliziert werden, wenn in einer Ungleichung beide Seiten positiv sind und in der anderen die größere.
Für $a > 0$ folgt $1/a > 0$.	Das Reziproke einer positiven reellen Zahl ist ebenfalls positiv.

Addition und Multiplikation

1.1 Die Klammern sind aufzulösen:

- a) $p+(q+r)$ b) $p+(q-r)$ c) $p-(q+r)$
 d) $p-(q-r)$ e) $p+(q-r+s)$
 f) $(p+q)-(r+s-u-v)$
 g) $p-(q-r)+(s-u)-(v+w)$
 h) $p-(q-r+s)-(u-v+w)$

1.2 Die Terme sind zusammenzufassen:

- a) $(3x+5y)-(x+2y)$
 b) $(7m+5n)-(4m+2n)$
 c) $(12a+19b)-(8a+17b)$
 d) $(20x+13y)-(15x+8y)$
 e) $(27m+18n)-(5n-12m)$
 f) $(33p-27q)+(15q-18p)$
 g) $(15x-38z)-(25z+10x)$
 h) $(5\frac{3}{4}q+7\frac{1}{2}r)-(2\frac{3}{4}q+1\frac{1}{2}r)$

1.3 Die Klammern sind aufzulösen und die Terme sind zusammenzufassen:

- a) $\langle\langle 6x+3y\rangle+\langle 2y+9z\rangle\rangle-\langle 2x+3z\rangle$
 b) $\langle\langle 15p-8q\rangle+\langle 11r+9s\rangle\rangle-\langle-(8p+2q)+\langle 6r-5s\rangle\rangle$
 c) $\langle\langle 17a-12b\rangle-\langle 8c+7d\rangle\rangle-\langle\langle 5c-4d\rangle-\langle 14a+9b\rangle\rangle$
 d) $\langle\langle 8r+5s\rangle+\langle -7t-10u\rangle\rangle-\langle\langle 2s+7r\rangle+\langle -3u+2t\rangle\rangle$
 e) $\langle\langle\langle 3a-4b\rangle-2x\rangle-\langle 3x+3b\rangle\rangle-\langle 4x-2a+b\rangle$
 f) $17p-\{13r-\langle 6q+\langle 5r-9p\rangle\rangle+\langle 14q-\langle 7p+8r\rangle\rangle\}-\{11r-\langle 10q-\langle 12p-3q\rangle\rangle-\langle 15r+\langle 4p-16q\rangle\rangle\}$
 g) $2.3x-\{0.4y+\langle 5.35x-2.6y\rangle-\langle 3.45x-\langle 1.8x-4.35y\rangle-0.5x\rangle+\langle 3.15y-4.25x\rangle\}-\langle 0.75y-\langle 4.5x+0.8y\rangle-\langle 2.55y-2.85x\rangle\rangle$

1.4 Die Klammern sind auszumultiplizieren und die Terme sind zusammenzufassen:

- a) $35(p+x+y)+37(x+y+z)+39(y+z+p)+41(z+p+y)$
 b) $(x+y)z+x(y+z)+(x+z)y$
 c) $15(a+b+c)-(b+c+d)\cdot 19-14(c+d+a)+(a+b+d)\cdot 12$
 d) $(x+y)z+(y+z)u-x(y+z)-y(z+u)$
 e) $(a-b)c+(c-a)b+a(b+c)$
 f) $(m+n)x-(m-x)n-m(n+x)$
 g) $(7a-4b+5c)\cdot 12+(2b-3c-4a)\cdot 7-(6c+a-8b)\cdot 9$
 h) $12\{p-(q+r)\}$ i) $n\{(u+v)-(v-y)\}$
 j) $7\{(a-b)-(a-c)\}$

1.5 Wie wird eine Summe mit einer Summe multipliziert? Die Klammern sind auszumultiplizieren und die Terme sind so weit wie möglich zusammenzufassen:

- a) $(a+b)(m+n)$
 b) $(p+q+r)(x+y+z)$
 c) $(p+q+r)(p+q-r)$
 d) $(p+q-r)(p-q+r)$
 e) $(p+q+r)(-p+q+r)$
 f) $(p-q+r)(-p+q-r)$
 g) $(a+b)(b-c)+\langle b+c\rangle\langle c-a\rangle-\langle a+c\rangle\langle a-b\rangle$
 h) $(x-y+z)(x+y-z)+\langle y-z+x\rangle\langle y+z-x\rangle+\langle z-x+y\rangle\langle z+x-y\rangle$

1.6 Folgende Terme sind durch Ausklammern der gleichen Faktoren zusammenzufassen:

- a) $(a+b)x+\langle a+b\rangle y+a\langle 2x-y\rangle+b\langle 2x-y\rangle$
 b) $(7a-3b)\langle x+y\rangle-\langle 5a-7b\rangle\langle x+y\rangle-\langle 2a+4b\rangle\langle x-y\rangle$
 c) $(9a-7b+3c)\langle 7a-13b+8c\rangle+\langle 4a+5b-3c\rangle\langle 9a-7b+3c\rangle-\langle 7a-13b+8c\rangle\langle 4a+b-8c\rangle-\langle 4a+b-8c\rangle\langle 4a+5b-3c\rangle$

1.7 Mithilfe der binomischen Formeln ist zu berechnen:

- a) $(x+y)(x+y)$ b) $(7x+5)^2$
 c) $(2m+\frac{1}{2}n)^2$ d) $(a+1)(a-1)$
 e) $(3a-4)^2$ f) $(1+x)(1-x)$
 g) $(a+b+c)(a+b-c)$
 h) $(a-b+c+d)(a-b-c-d)$
 i) $(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$
 j) $(a^3-a^2b+ab^2-b^3)(a+b)$

1.8 Die Terme sind so weit wie möglich zu kürzen und zusammenzufassen:

- a) $\frac{18a}{3} - \frac{28a}{7} + \frac{5ab}{b}$
 b) $\frac{12ab^2 - 18abc + 30ac^2}{6a}$
 c) $\frac{20pq - 12qs}{4q} + \frac{15ts - 20tu}{5t}$
 d) $\frac{78m^2p + 60mnp + 102mp^2}{2m \cdot 3p}$
 e) $\frac{30y^2x + 10x^2y}{5x \cdot 2y} \cdot \frac{35x^2y - 105xy^2}{7x \cdot 5y}$
 f) $\frac{30xz + 24yz}{6z} - \frac{35xy - 15xz}{5x} + \frac{7yz - 21xy}{7y}$

1.9 Die Brüche sind gleichnamig zu machen und zu addieren:

- a) $m + \frac{3mn}{m-n}$ b) $\frac{a^2}{a+b} + b$
 c) $\frac{(p+q)^2}{4pq} - 1$ d) $\frac{x}{ab} - \frac{y}{ac} - \frac{z}{bc}$
 e) $\frac{3(2a-3b)}{8} - \frac{2(3a-5b)}{3} + \frac{5(a-b)}{6}$
 f) $\frac{a(3b-2c)}{6bc} - \frac{b(4a-5c)}{10ac} + \frac{8a^2+3b^2}{6ab} - \frac{5a-4b}{10c}$

1.10 Folgende Produkte sind zu berechnen:

- a) $\left(\frac{p}{n} + \frac{q}{m}\right) \cdot mn$ b) $\left(\frac{a}{p^2q} - \frac{b}{pq^2}\right) \cdot mn$
 c) $\frac{2a-3b}{a^2b^2} \cdot (2a^2b + 3ab^2)$
 d) $\frac{12(a+b)(m-n)}{5(a-b)(m+n)} \cdot (a^2-b^2)(m^2-n^2)$

1.11 Folgende Quotienten sind zu berechnen:

- a) $42xy : \frac{6x^2y^2}{7x}$ b) $35a^2b^2c^2 : \frac{7a^2bc^2}{4d^2}$
 c) $32(m^2-n^2) : \frac{4(m-n)}{p+q}$
 d) $7(4a^2+4ab+b^2) : \frac{3(2a+b)}{2a-b}$
 e) $\left(\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x}\right) : \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$ f) $\frac{a+b}{a-b} + \frac{a-b}{a+b}$
 g) $\frac{x-1}{2x+2} - \frac{3x-4}{3x+3} + \frac{2x-1}{6x+6}$
 h) $\frac{9}{3x+x^2} + \frac{x^2}{9-3x} + \frac{9}{9-x^2}$

1.12 Die Terme sind zu multiplizieren und so weit wie möglich zu kürzen:

- a) $\frac{8ap}{5r^2} - \left(\frac{2p^2q}{3r} + \frac{5q^2r}{4p} - \frac{10r^2p}{3q}\right) \cdot \frac{12a}{5pqr}$
 b) $\frac{m^2-n^2}{2mn} \left(\frac{m+n}{m-n} - \frac{m-n}{m+n}\right) - 1$

1.13 Folgende Terme sind mithilfe der binomischen Formeln in Produkte umzuformen:

- a) a^2-6a+9 b) x^2+2x+1
 c) $36x^2-25y^2$ d) $(a-b)^2-x^2$
 e) $81a^2-16(2a-3x)^2$ f) $a^2+2ab+b^2-c^2$
 g) $9x^2-4y^2+4yz-z^2$ h) x^4+x^3+x+1

1.14 Zähler und Nenner der Brüche sind in Produkte umzuformen. Die Brüche sind danach zu kürzen:

- a) $\frac{a^2+ab}{a^2-ab}$ b) $\frac{am-bm}{bn-an}$ c) $\frac{7a^2b-7ab^2}{7a^2c-7ac^2}$
 d) $\frac{ax-a}{b-bx}$ e) $\frac{a^4-b^4}{a^2-b^2}$ f) $\frac{m^2-2mn+n^2}{n^2-m^2}$
 g) $\frac{a^4-b^4}{a^3-b^3}$ h) $\frac{a^4-b^4}{a^3+b^3}$ i) $\frac{a^4+b^4}{a^3+b^3}$

Potenz- und Wurzelrechnung

1.15 Potenzen mit gleichen Basen sind zusammenzufassen:

- a) $p^n \cdot p^n$ b) $b^7 \cdot b^{2-x}$ c) $c^{x-7} \cdot c^{5+x}$
- d) $k^{m+n} \cdot k^{1-m}$ e) $x^n \cdot x^{n-1} \cdot x^{9-2n}$
- f) $\frac{3}{4}a^n b x^3 \cdot \frac{4}{5}ab^m x^4 \cdot \frac{5}{6}a^2 x^p$
- g) $(a^5 + a^2)(a^3 - a)$ h) $(y^9 + y^4)(y^6 - y)$
- i) $(a^4 - a^2 b^2 + b^4)(a^2 + b^2)$ j) $\frac{a^{x-1}}{a}$
- k) $\frac{x^2}{x^{n-2}}$ l) $\frac{a^{3+x}}{a^{x-3}}$ m) $\frac{a^{m+1} b^{n+1}}{a^m b^n}$
- n) $\frac{a^5(x-y)^2}{a(y-x)^5}$ o) $\frac{a^{2x-3y} a^{3y-5}}{a^{5-3x} a^{7-2y}} : \frac{a^{5x+3y-10}}{a^{x+y+10}}$

1.16 In folgenden Termen sind die Brüche gleichnamig zu machen und dann zu vereinigen:

- a) $\frac{1}{x^7} + \frac{1}{x^6} + \frac{1}{x}$ b) $\frac{1}{x^3} + \frac{1-x}{x^4}$
- c) $\frac{1-2x^2}{x^p} + \frac{2-3x^2}{x^{p-2}} + \frac{3}{x^{p-4}}$
- d) $\frac{x^n}{(x+y)^n} + \frac{2x^{n-1}}{(x+y)^{n-1}} - \frac{x^{n-2}}{(x+y)^{n-2}}$

1.17 Die Potenzen sind so weit wie möglich zusammenzufassen:

- a) $\frac{a^{5p-4q}}{b^{2q-5p}} \cdot \frac{b^{3p-7q}}{a^{5q-3p}}$ b) $\frac{p^{12x+3y}}{q^{2y-4x}} : \frac{p^{2x-8y}}{q^{6x+13y}}$
- c) $\left(\frac{8xy^2}{3z^3}\right)^n : \left(\frac{2x^2y}{9z^2}\right)^n$ d) $\left(\frac{a^2b^3}{x^3y^4}\right)^5$
- e) $\left(\frac{a+b}{x+y}\right)^3 \cdot \left(\frac{a-b}{x-y}\right)^3 \cdot \left(\frac{x^2-y^2}{b^2-a^2}\right)^2$
- f) $\left(\frac{4a^{n-1}b^3c^{3-x}}{9x^2y^{3n-2}z^6}\right)^2 : \left(\frac{2a^2b^2c^{2-x}}{3xy^{2n-1}z^4}\right)^3$

1.18 Mithilfe der binomischen Formeln ist zu potenzieren:

- a) $(a^2 - b)^3$ b) $(x + 1)^3 + (x - 1)^3$
- c) $(a - b)^5$ d) $(2x + 3)^5 - (2x - 3)^5$
- e) $(a^m - a^n)^2$ f) $(x + y)^4 - (a - x)^4$

1.19 Folgende Polynomdivisionen sind auszuführen:

- a) $(6am - 9an - 4bm + 6bn) : (3a - 2b)$
- b) $(x^2 - 2x - 15) : (x - 5)$
- c) $(a^3 - a^2b + 2b^3) : (a + b)$
- d) $(a^5 + b^5) : (a + b)$

1.20 Die Terme sind so weit wie möglich zusammenzufassen:

- a) $(\sqrt{x+y} + \sqrt{x-y})^2$
- b) $\left(\sqrt{\frac{a-x}{x-b}} - \sqrt{\frac{x-b}{a-x}}\right)^2$
- c) $\sqrt[3]{x + \sqrt{x^2 - 1}} \cdot \sqrt[3]{x - \sqrt{x^2 - 1}}$
- d) $(a + b)\sqrt{\frac{ax^2 - bx^2}{9a^2 + 18ab + 9b^2}}$
- e) $\sqrt{x\sqrt{x^{-1}\sqrt{x^{-1}}}}$

1.21 In folgenden Termen sind die Wurzeln in den Nennern zu beseitigen:

- a) $\frac{a}{a + \sqrt{a}}$ b) $\frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$ c) $\frac{a\sqrt{x} - b\sqrt{y}}{c\sqrt{x} - d\sqrt{y}}$
- d) $\frac{2\sqrt{15}}{\sqrt{3} + \sqrt{5} + 2\sqrt{2}}$ e) $\sqrt{\frac{a + \sqrt{x}}{a - \sqrt{x}}}$
- f) $\frac{a + x + \sqrt{a^2 + x^2}}{a + x - \sqrt{a^2 + x^2}}$

Ungleichungen

1.22 Zu bestimmen sind alle reellen Zahlen x , die die folgenden Ungleichungen erfüllen:

- a) $3 - x < 5 - 2x$ b) $2x - 17 < 13 + 6x$
- c) $\frac{5x}{3} - 4 < x + 6$ d) $\frac{5}{x} - 4 > \frac{4}{x} - 5$
- e) $(x - 2)(x + 5) > 0$

1.23 Für welche reellen Zahlen a hat die folgende Ungleichung reelle Lösungen x ? Die Lösungsmenge ist anzugeben.

$$\frac{x^2 + 1}{4} < a^2$$

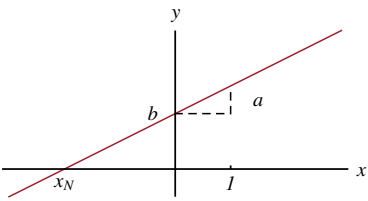
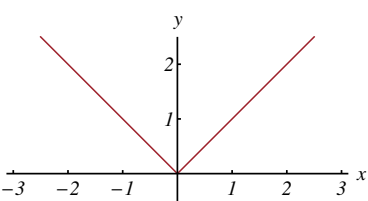
B2 Funktionen einer Veränderlichen

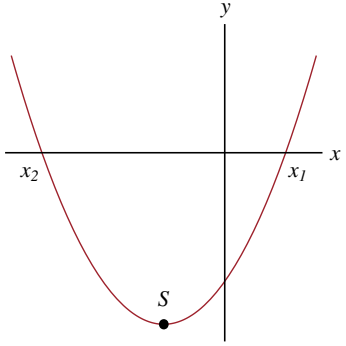
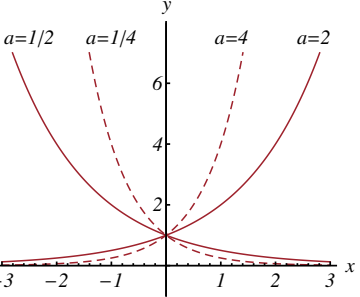
Definitionen

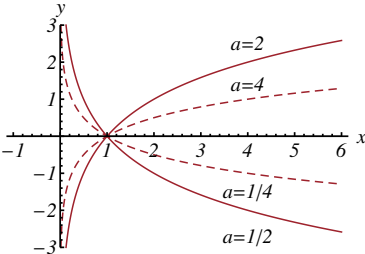
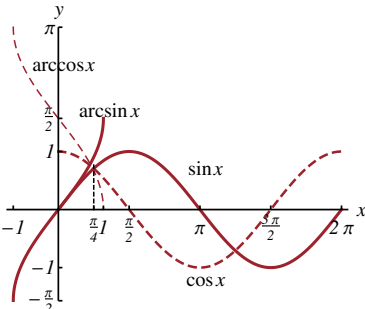
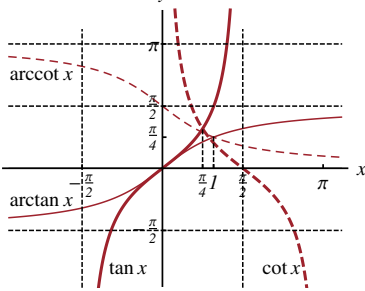
$f : D_f \rightarrow W_f$ - reelle Funktion, $D_f \subseteq \mathbb{R}$ - Definitionsbereich, $W_f \subseteq \mathbb{R}$ - Wertebereich, $I \subseteq D_f$ - Intervall

Begriff	Definition
Nullstelle $x_N \in D_f$	$f(x_N) = 0$
Monotonie steigend (fallend)	Für alle $x_1 < x_2$ folgt $f(x_1) \leq f(x_2)$ ($f(x_1) \geq f(x_2)$), $x_1, x_2 \in I$.
Strenge Monotonie steigend (fallend)	Für alle $x_1 < x_2$ folgt $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$), $x_1, x_2 \in I$.
Beschränktheit nach oben (unten)	Es gibt eine Zahl $S(s) \in \mathbb{R}$, sodass für alle $x \in I$ gilt $f(x) \leq S$ ($f(x) \geq s$). $S(s)$ - obere (untere) Schranke
Unbeschränktheit nach oben (unten)	f ist auf I nicht nach oben (unten) beschränkt.
Supremum $\sup_{x \in I} f(x)$	kleinste aller oberen Schranken auf I
Infimum $\inf_{x \in I} f(x)$	größte aller unteren Schranken auf I
Gerade (ungerade) Funktion	Für alle $x \in D_f$ gilt $f(-x) = f(x)$ ($f(-x) = -f(x)$), $D_f = (-a, a)$, $a \in \mathbb{R}$, oder $D_f = \mathbb{R}$.
Periodizität mit der Periode $p \in \mathbb{R}$	Für alle $x \in D_f$ gilt $x + p \in D_f$ und $f(x) = f(x + p)$.
Umkehrfunktion $f^{-1} : W_f \rightarrow D_f$	f^{-1} ordnet jedem Funktionswert sein Argument zu, wenn f jedem Argument genau einen Funktionswert zuordnet.

Elementare Funktionen

Lineare Funktion	$f(x) = ax + b$	$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
	Steigung y -Achsenabschnitt Nullstelle Proportionalität	$a \in \mathbb{R}, a \neq 0$ $b \in \mathbb{R}$ $x_N = -b/a$ $b = 0: y = ax$ Proportionalitätsfaktor a
Betragsfunktion	$f(x) = x = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$	$f : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$
	Beschränktheit Produkt Quotient Wurzel Dreiecksungleichung	$ x \leq a \iff -a \leq x \leq a$ $ xy = x y $ $ x/y = x / y , y \neq 0$ $ x = \sqrt{x^2}$ $ x + y \leq x + y $

<p>Quadratische Funktion</p>	$f(x) = ax^2 + bx + c$ $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$	$f(x) = x^2 + px + q$ $p, q \in \mathbb{R}$
	$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Diskriminante $D = b^2 - 4ac$ Nullstellen $D > 0$ $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ $D = 0$ $x_{1,2} = -b/(2a)$ $D < 0$ keine reelle Wurzelsatz $x_1 + x_2 = -b/a$ von Vieta $x_1 x_2 = c/a$ Scheitelpunkt $S \left(-\frac{b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a} \right)$	$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $D = p^2/4 - q$ $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$ $x_{1,2} = -p/2$ keine reelle $x_1 + x_2 = -p$ $x_1 x_2 = q$ $S \left(-\frac{p}{2}, q - \frac{p^2}{4} \right)$
<p>Polynom</p>	$P_n(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ $P_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, a_i \in \mathbb{R}, i = 0, \dots, n, a_n \neq 0$	
$x^* \in \mathbb{R}, b_{n-1} = a_n,$ $b_{i-1} = b_i x^* + a_i, i = 1, \dots, n-1$ $P_n(x^*) = b_0 x^* + a_0$ $P_{n-1}(x) = \sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i$	Nullstellen r Nullstellen $x_k \in \mathbb{R}, r \leq n, k = 1, \dots, r$ Linearfaktorzerlegung $P_n(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_r) P_{n-r}(x),$ P_{n-r} - Polynom ohne reelle Nullstellen Horner-Schema $\begin{array}{r cccccc} & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & a_1 & a_0 \\ x^* \downarrow & & x^* b_{n-1} & x^* b_{n-2} & & x^* b_2 & x^* b_1 & x^* b_0 \\ \hline & b_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-3} & & b_1 & b_0 & P_n(x^*) \end{array} +$	Polynomdivision $P_n(x) = (x - x^*) P_{n-1}(x) + P_n(x^*)$
<p>Rationale Funktion</p>	$f(x) = \frac{P_n(x)}{P_m(x)}$ $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, P_n(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i, P_m(x) = \sum_{j=0}^m b_j x^j$ $a_i \in \mathbb{R}, i = 0, \dots, n, b_j \in \mathbb{R}, j = 0, \dots, m, a_n, b_m \neq 0$ x verschieden von den Nullstellen von P_m	
x_0 - k -fache Nullstelle von P_n und l -fache Nullstelle von $P_m,$ $k, l = 0, 1, 2, \dots$	Nullstelle x_0 wenn $k > 0, l = 0$ ($x_0 \in D_f$) Polstelle x_0 wenn $k < l$ ($x_0 \notin D_f$) Lücke x_0 wenn $k \geq l > 0$ ($x_0 \notin D_f$)	
<p>Exponentialfunktion</p>	$f(x) = a^x$ $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+, a \in \mathbb{R}, a > 0$	
	natürliche Basis $f(x) = e^x$ Euler-Zahl $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$ $e = 2.71828 18284 59045 23536 \dots$ Potenzgesetze $a^{x_1} a^{x_2} = a^{x_1+x_2}$ $a^{x_1}/a^{x_2} = a^{x_1-x_2}$ $(ab)^x = a^x b^x$ $(a/b)^x = a^x/b^x, b > 0$ $(a^{x_1})^{x_2} = a^{x_1 x_2}$ $a^{-x} = 1/a^x = (1/a)^x$	

Logarithmusfunktion	$f(x) = \log_a x$ $\log_{10} x = \lg x$	$f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 1$ $\log_e x = \ln x$
	Definition Nullstelle Produkt Quotient Exponent Potenz Wechsel der Basis Identität	$y = \log_a x \iff x = a^y$ $x_{\mathbb{N}} = 1$, d. h., $\log_a 1 = 0$ $\log_a bc = \log_a b + \log_a c$ $\log_a(b/c) = \log_a b - \log_a c$ $a^{\log_a b} = b$ $\log_a b^c = c \cdot \log_a b$ $\log_a b = \log_c b / \log_c a$ $\log_a a = 1$
Trigonometrische Funktionen Arcusfunktionen	$f(x) = \sin x$ $f(x) = \arcsin x$	$f(x) = \cos x$ $f(x) = \arccos x, k \in \mathbb{Z}$
	$f:$ Periode Nullstellen Symmetrie Definition $f:$ Nullstellen Symmetrie	$\sin x$ $\mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ $\sin x = \sin(x + 2k\pi)$ $x_{\mathbb{N}} = k\pi$ $\sin(-x) = -\sin x$ $y = \arcsin x$ $\implies x = \sin y$ $[-1, 1] \rightarrow [-\pi/2, \pi/2]$ $x_{\mathbb{N}} = 0$ $\arcsin(-x) = -\arcsin x$ $\cos x$ $\mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ $\cos x = \cos(x + 2k\pi)$ $x_{\mathbb{N}} = \pi/2 + k\pi$ $\cos(-x) = \cos x$ $y = \arccos x$ $\implies x = \cos y$ $[-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$ $x_{\mathbb{N}} = 1$ $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$
Trigonometrische Funktionen Arcusfunktionen	$f(x) = \tan x$ $f(x) = \arctan x$	$f(x) = \cot x$ $f(x) = \operatorname{arccot} x, k \in \mathbb{Z}$
	$f:$ Periode Nullstellen Symmetrie Definition $f:$ Nullstellen Symmetrie	$\tan x$ $\mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi\} \rightarrow \mathbb{R}$ $\tan x = \tan(x + k\pi)$ $x_{\mathbb{N}} = k\pi$ $\tan(-x) = -\tan x$ $y = \arctan x$ $\implies x = \tan y$ $\mathbb{R} \rightarrow (-\pi/2, \pi/2)$ $x_{\mathbb{N}} = 0$ $\arctan(-x) = -\arctan x$ $\cot x$ $\mathbb{R} \setminus \{k\pi\} \rightarrow \mathbb{R}$ $\cot x = \cot(x + k\pi)$ $x_{\mathbb{N}} = \pi/2 + k\pi$ $\cot(-x) = -\cot x$ $y = \operatorname{arccot} x$ $\implies x = \cot y$ $\mathbb{R} \rightarrow (0, \pi)$ keine $\operatorname{arccot}(-x) = \pi - \operatorname{arccot} x$

Monotonie, Beschränktheit, Umkehrfunktion

2.1 Die Graphen folgender Funktionen sind zu entwerfen:

a) $y = f(x) = \frac{1}{x^2}$ b) $y = f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$
 c) $y = f(x) = \frac{1}{x^2-1}$

2.2 Gesucht sind Definitionsbereich und Wertebereich sowie die Graphen folgender Funktionen:

a) $y = f(x) = \sqrt{-2x-3}$
 b) $y = f(x) = \sqrt{(a-x)(b-x)}$,
 zu diskutieren ist $a \neq b$ und $a = b$.

2.3 Sind folgende Zuordnungen Funktionen?

a) $y = f(x) = \begin{cases} x, & x^2 = x \\ 2, & x \neq 0 \end{cases}$
 b) $y = f(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$

2.4 Das Monotonieverhalten folgender Funktionen ist zu untersuchen:

a) $y = f(x) = ax$ b) $y = f(x) = ax^2$
 c) $y = f(x) = \frac{\sqrt{5x+4}-3}{\sqrt{5x+4}+4}, x \geq -\frac{4}{5}$
 d) $y = f(x) = x - \sqrt{x^2-4}, x \geq 2$

2.5 Ist die Funktion $y = x^4$

- a) im Intervall $0 \leq x < +\infty$,
- b) im Intervall $-\infty < x \leq 0$,
- c) im Intervall $-\infty < x < +\infty$,
- d) im Intervall $-2 \leq x \leq 1$

umkehrbar? Wie lautet gegebenenfalls jeweils die Formel für die Umkehrfunktion? Auf welchem Intervall ist die Umkehrfunktion definiert?

Lineare Funktionen, Betragsfunktion

2.6 Folgende lineare Gleichungen bzw. Ungleichungen, die sich auf lineare zurückführen lassen, sind zu lösen:

- a) $\frac{3x-4}{5} - \frac{3-4x}{7} = \frac{5x-6}{10} - \frac{9-10x}{14}$
- b) $\frac{7}{3} + \frac{13}{5x} = \frac{13x-24}{3x} - \frac{37}{20} + \frac{10}{x}$
- c) $\frac{2x+1}{3x-15} - \frac{x-11}{2x-10} = 1$
- d) $(x-3)(x-4) = (x-6)(x-2)$
- e) $ab + (b+1)x = (a+x)b + a$
- f) $(a+bx)(a-b) - (ax-b)(a+b) = ab(x+1)$
- g) $(a+b)x + (a-b)x - ax = b+c$
- h) $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}x-1 \right) - 1 \right] - 1 \right\} - 1 \right) - 1 = 0$
- i) $\frac{a-x}{bc} + \frac{b-x}{ac} + \frac{c-x}{ab} = 0$
- j) $\frac{2x^n + 7x^{(n-1)}}{9} + \frac{7x^n - 44x^{(n-1)}}{5x-14} = \frac{4x^n + 27x^{(n-1)}}{18}$
- k) $\frac{x-\sqrt{a}}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} + \frac{x-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{c}} + \frac{x-\sqrt{c}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = 3$
- l) $\frac{a}{b}(a-x) + \frac{a}{c}(b-x) + \frac{c^2-ax}{a} + \frac{ab-cx}{b} = \frac{a^2}{b} + \frac{c^2}{a}$
- m) $(2\sqrt{x}+3)(2\sqrt{x}-3) = 7$
- n) $\sqrt{7x+2} = \frac{5x+6}{\sqrt{7x+2}}$
- o) $\sqrt{14-x} + \sqrt{11-x} = \frac{3}{\sqrt{11-x}}$
- p) $(\sqrt{a\sqrt{b}} - \sqrt{b\sqrt{a}}) = a\sqrt{b\sqrt{x}} - b\sqrt{a\sqrt{x}}$
- q) $\sqrt{a^{7-3x}} \cdot \sqrt[3]{a^{x+1}} \cdot \sqrt[4]{a^{5x-7}} \cdot \sqrt[5]{a^{7-2x}} = 1$
- r) $\left(\frac{3}{4}\right)^x = \left(\frac{4}{3}\right)^7$

2.7 Zu bestimmen sind alle Zahlen $x \in \mathbb{R}$, für die folgende Gleichungen erfüllt sind:

- a) $\left| \frac{3}{2}x - 2 \right| = \frac{5}{2}$ b) $|2x+1| - |x-1| - 1 = 0$
- c) $||x+1| - |x+3|| = 1$

2.8 Zu bestimmen sind alle $x \in \mathbb{R}$, für die folgende Ungleichungen gelten:

- a) $|3x-9| \geq 1$ b) $|x+1| - 4 < 0$
- c) $|x| + |x-2| < 5$

- 2.9** Die Menge aller Punkte (x, y) mit $|x| + |y| = 1$ ist im kartesischen Koordinatensystem (O, x, y) darzustellen.
- 2.10** Eine Baustelle wird von einer 4 km entfernten Mischzentrale mit Transportbeton beliefert. Der eingesetzte Mischtransporter fährt im Pendelverkehr leer mit einer Geschwindigkeit von 40 km/h und beladen mit einer Geschwindigkeit von 30 km/h. Die Übernahme des Mischgutes dauert 6 min, das Entleeren auf der Baustelle 4 min. Wie viel Fahrten können bis zur Frühstückspause durchgeführt werden, wenn die Abfahrt um 6.15 Uhr vom Betonwerk erfolgt und die Frühstückspause gegen 9.00 Uhr im Betonwerk stattfinden soll? Vor der Pause muss eine gründliche Reinigung des Fahrzeugs von Betonresten erfolgen, wofür 15 min in Rechnung gestellt werden.
- 2.11** Um eine wichtige Durchgangsstraße nach einem Erdbeben wieder freizumachen, werden drei Bagger eingesetzt. Das erste Fahrzeug würde das Geröll in 27 Tagen, das zweite in 36 Tagen und das dritte in 54 Tagen wegschaffen.
- Wie lange benötigen alle drei Bagger gemeinsam für diese Arbeit?
 - Wie lange dauern die Aufräumarbeiten, wenn der zweite Bagger erst am zweiten Tag und der dritte Bagger erst am vierten Tag eingesetzt werden kann?
- 2.12** Vier Gipser sind mit dem Verputzen einer Hausfassade beschäftigt. Gipser A würde die Fassade allein in 12 Tagen, B in 14, C in 30 und D in 18 Tagen verputzen. In welcher Zeit wird die Arbeit fertiggestellt, wenn alle vier gemeinsam arbeiten?
- 2.13** Ein Becken einer Kläranlage kann durch drei Abflussrohre geleert werden, durch das erste in zwei, das zweite in drei und das dritte in sechs Stunden. In welcher Zeit wird das Becken geleert sein, wenn das Wasser durch alle drei Abflussrohre gleichzeitig abfließt?
- 2.14** Zwei Stahlsorten enthalten 12 % bzw. 30 % Nickel. Aus beiden Stählen soll ein Stahl mit einem Nickelgehalt von 25 % und einer Masse von 180 kg geschmolzen werden. Wie viel kg Stahl jeder Sorte werden benötigt, wenn von Schmelzverlusten gänzlich abgesehen wird?
- 2.15** Für eine längere Autofahrt rechnet der Fahrer mit einer durchschnittlichen Geschwindigkeit von 60 km/h. Nachdem er genau die Hälfte der Strecke zurückgelegt hat, stellt er fest, dass er aufgrund von Baustellen durchschnittlich nur 40 km/h gefahren ist. Wie schnell müsste er die zweite Hälfte durchfahren, um den Zeitverlust wieder aufzuholen?
- 2.16** An einer Mauer, die eine Länge von $26\frac{2}{3}$ m, eine Breite von 1 m und eine Höhe von 4 m hat, arbeiten zwei Maurer. Der erste von ihnen kann, wenn er täglich 9 Stunden arbeitet, an einem Tage $5\frac{1}{3}$ m³, und der zweite, wenn er täglich 11 Stunden arbeitet, in 9 Tagen $53\frac{1}{3}$ m³ Mauerwerk fertigstellen. In welcher Zeit wird die Mauer fertig, wenn jeder der Maurer täglich 10 Stunden arbeitet und der erste 5 Arbeitstage, der zweite aber nur 2 Arbeitstage versäumt?
- 2.17** Bei einem Brand sollen alle Besucher ein vollbesetztes Kino durch die beiden Notausgänge innerhalb von drei Minuten verlassen können. Ein Notausgang hat wegen geringerer Breite nur zwei Drittel vom Durchlassvermögen des anderen. Wie lange dauert das vollständige Räumen des Kinos, wenn jeweils einer der beiden Notausgänge blockiert ist?
- 2.18** Bei einer Lokomotive macht auf einer Strecke von 441 m das Laufrad 112 Umdrehungen mehr als das größere Treibrad. Auf je sieben Umdrehungen des Laufrades kommen je drei Umdrehungen des Treibrades. Wie viel Umdrehungen macht das Treibrad auf einer Strecke von 10.5 km?
- 2.19** Auf einen unbiegsamen Stab, der durch die Punkte A und F verläuft, wirken sechs zu ihm senkrechte Kräfte, die nacheinander in den Angriffspunkten A, B, C, D, E und F angebracht sind. In A wirken 6 N abwärts, in B 4 N aufwärts, in C 5 N abwärts, in D 3 N aufwärts, in E 2 N aufwärts und in F 1 N abwärts. Die Entfernungen der Angriffspunkte betragen: $|AB| = 3$ m, $|BC| = 2$ m, $|CD| = 4$ m,

Sachwortverzeichnis

- Ableitung, 59, 61, 62, 64, 73, 112, 206, 222, 227–232, 234, 235, 237, 239, 257, 258, 260, 261, 264, 265, 300, 309, 310, 312–322
 -regeln, 59, 247
 partielle, 81, 86, 281, 289–297, 299, 301
- Abschreibung, 101, 105, 106, 331
 -zinssatz, 101, 332
 arithmetisch degressive, 101, 107, 331
 digitale, 101, 107, 332
 geometrisch degressive, 101, 107, 332
 lineare, 101, 106, 107, 331
- Adjunkte, 30
- Annuität, 100, 104, 105, 107, 326, 333
- Arbeit, 41, 48, 84, 91, 192, 300
- Barwert, 99, 100, 102, 106, 108, 323–325, 327–330, 332–336
- Bereich, 84, 90, 91, 299, 301
- beschränkt, 14, 17, 55, 57, 58, 134, 217–220
- Betrag, 14, 41
- Biegelinie, 64, 96, 98, 228, 314, 317, 318, 321, 322
- Binomialkoeffizient, 9, 363
- binomisch
 Formel, 9, 12, 13, 143, 144, 153
 Lehrsatz, 9
- Bogenlänge, 71, 72, 75, 84, 91, 260–262, 300
- Charakteristische Gleichung, 92, 306–322
- Darlehen, 101, 104
- Determinante, 30, 35, 93, 175, 192
 Wronski-, 93
- Differenzenquotient, 59
- Differenzial, 59, 86, 87, 300
 Bogen-, 61, 83, 300
 partielles, 81
 totales, 81, 86, 283
- Differenzialgleichung, 95
 n -ter Ordnung, 92
 erster Ordnung, 92, 94
 homogene, 93, 94, 314, 315
 inhomogene, 93, 94, 96, 318
 lineare, 92
 mit konstanten Koeffizienten, 310–312, 316
 zugehörige homogene, 92, 304–314, 318–322
- Divergenz, 55, 56
 bestimmte, 55, 56
- Drehwinkel, 95, 315
- Dreieck, 42
 -ungleichung, 14
- Ebene, 42, 45, 46, 50, 52, 53, 90, 195, 196, 198, 209–212, 280, 293–296, 299
- Achsenabschnittsform, 45
 allgemeine Form, 45, 52, 209, 212
 Dreipunkteform, 45, 209, 210
 Hesse-Normalform, 45, 214, 293, 295, 296
 Parameterform, 45, 212
- Effektivzins
 -berechnung, 101, 107, 332
 -satz, 107, 108, 332–334, 337
- Eigenvektor, 32, 40, 188
- Eigenwert, 32, 40, 188
- Ellipse, 43, 51, 54, 69, 77, 198, 199, 205–207, 215, 216, 233, 235, 236, 264, 265, 269, 294
 Flächeninhalt, 75, 258
- Endwert, 99, 102, 104, 106, 108, 323–326, 328–330, 333–337
- Ereignis, 110, 111, 128, 343, 360, 363
 disjunkte, 110, 119, 342–350, 355
 komplementäres, 110, 119, 342–346, 360, 362
 sicheres, 110, 347
 Teil-, 110
 unabhängige, 110, 119, 128, 340–346, 350, 351, 353, 357, 360, 362, 363
 unmögliches, 110, 111
 Vereinigung, 110
- Erwartungswert, 111–113, 122, 124, 125, 127, 129, 131, 349–351, 355–357, 362, 367, 368
- Euler-Zahl, 15, 55
- Fakultät, 9
- Federschwinger, 95, 97, 319
- Fehler
 absoluter, 60, 62, 63, 223, 224
 relativer, 223, 224
- Fehlerrechnung, 60, 62, 81, 87, 223, 285
- Fläche, 41, 42, 62, 74–77, 79, 90, 223, 252, 253, 257, 258, 266, 269, 272, 275, 276, 293, 296, 297, 299
 -inhalt, 49, 53, 64–66, 72, 74, 83, 85, 89, 229–233, 235, 236, 252, 288, 292, 301
- Mantel-, 72, 77
- Fluss, 84
- Fundamentalsystem, 31, 92, 93
- Funktion, 59, 71, 92, 93, 113, 114, 122, 124, 349, 354
 Arcus-, 16
 Betrags-, 14, 17
 differenzierbare, 60
 Exponential-, 15, 23, 156
 Gamma-, 113
 gerade, 14, 22, 153, 257
 lineare, 14, 17, 135, 136, 141, 143
 Logarithmus-, 16, 23, 156
 Potenz-, 153
 quadratische, 15, 19

- rationale, 15, 21, 22, 152, 155
- Stamm-, 70, 71, 73, 247, 251–254, 257, 261, 264, 265, 268, 275
- Stichproben-, 113, 115, 116
- trigonometrische, 16, 24, 161
- Umkehr-, 14, 17, 23, 59, 72, 134, 136, 156, 256, 261
- ungerade, 14
- Wurzel-, 135
- Funktionen
 - differenzierbare, 63, 225
- Gauß-Algorithmus, 31, 32, 35
- Gerade, 42, 44–46, 50–53, 192, 196, 208
 - Achsenabschnittsform, 42
 - allgemeine Form, 42, 196–198
 - Hesse-Normalform, 42, 196, 197
 - Momentenform, 44
 - Normalform, 42
 - Parameterform, 42, 44, 52, 205, 208, 211, 212
 - Punktrichtungsform, 42, 44
 - Zweipunkteform, 42, 44, 196
- Gleichungssystem, 31, 32
 - homogenes, 31, 186
 - inhomogenes, 31
 - lineares, 31, 32, 40, 93, 176, 180, 181, 183, 185–187, 358
- Gradient, 81, 86, 283
- Grenzverteilungssätze, 113, 128, 362–367
- Grenzwert, 56
 - regel, 55, 56
 - linksseitiger, 56, 222
 - rechtsseitiger, 56, 222
 - von Funktionen, 56, 219
 - von Zahlenfolgen, 55, 217
- Häufigkeit, 117
- Hyperbel, 43, 51, 77, 199, 200, 202, 203
- Infimum, 14, 55
- Integral, 73, 74, 261, 278
 - über ebene Bereiche, 82, 90, 299
 - bestimmtes, 71, 73
 - Kurven-, 83, 90, 91, 300, 301
 - unbestimmtes, 70, 73, 247
- Integration
 - grenzen, 71, 252, 255
 - intervall, 71, 273
 - konstante, 70
 - regeln, 70, 71, 73
 - variable, 70
 - logarithmische, 70
 - mit Substitution, 70, 71
 - partielle, 70, 71, 73, 264, 266, 268
- interner Zinsfuß, 101, 105, 328
 - Methode, 101, 328
- Investition, 101, 105, 106, 108, 328, 329, 335
 - rechnung, 100, 105, 328
- Körper
 - Position, 96, 97
- Kapitalwert, 106
 - methode, 101, 328
- Kardioide, 75
- Koeffizientenvergleich, 307–314, 319–322
- Kombinationen, 110, 338–340
- Konfidenzintervall, 115
- konkav, 82, 225–227
 - streng, 61, 82
- Konvergenz, 55, 58
- konvex, 82, 225–227
 - streng, 61, 82
- Koordinaten, 61, 72
 - system, 41
 - transformation, 46, 47, 54, 215
 - ursprung, 43, 46, 47
 - ebene, 46
 - kartesische, 46, 47, 54, 61, 207, 215, 216
 - Kugel-, 47, 54, 215
 - Polar-, 46, 54, 61, 72, 215
 - räumliche, 47
 - Zylinder-, 47, 54, 216
- Krümmung, 61, 63, 69, 225–227, 245, 246
 - radius, 43, 61, 245, 246
- Kraft, 41, 42, 48, 49, 88, 192
 - feld, 84, 91, 300
 - Einzel-, 88
 - Normal-, 195
 - Quer-, 237, 278
 - Stab-, 48, 49, 191, 195
- Kragarm, 96
- Kreis, 25, 43, 50, 51, 64, 65, 69, 161, 164, 201, 203, 206, 229, 230, 232, 233
 - Thales-, 164
- Kriterium
 - Majoranten-, 55
 - Vergleichs-, 55, 219
- Kurve, 61, 72, 77, 83
 - zweiter Ordnung, 43, 50, 198
- Lösung
 - allgemeine, 92, 94, 304–322
 - linear unabhängige, 92
 - partikuläre, 93, 304–314, 318–322
- Ladung, 83
- Laufzeit, 99, 102, 104, 105, 107, 108, 323, 328, 335–337
- linear
 - abhängig, 28, 33, 170–172, 174
 - unabhängig, 28, 30, 31, 33, 170–172, 174
- Linearkombination, 28, 31, 92, 169, 172, 367
- Masse, 83, 84, 87, 285, 299, 300, 356, 358, 365
- Matrix, 28–30, 32, 34, 35, 172–174, 189
 - Multiplikation, 29
 - Diagonal-, 29, 35
 - Dreiecks-, 29, 30
 - Einheits-, 29

- erweiterte Koeffizienten-, 31
- inverse, 29, 30
- Koeffizienten-, 31, 32, 93, 186, 192
- orthogonale, 29
- quadratische, 29, 30, 35
- symmetrische, 29
- transponierte, 29
- Maximum, 61
 - lokales, 82
 - strenges lokales, 82
- Minimum, 61
 - lokales, 82
 - strenges lokales, 82
- Moment, 42, 49, 72, 79, 84, 278, 279
 - axiales, 83
 - Biege-, 80, 278, 279
 - Flächen- 1. Grades, 72, 85, 266, 267, 269, 299
 - Flächen- 2. Grades, 72, 78, 85, 88, 89, 272, 273, 288
 - polares, 83
 - Schnitt-, 87, 286
 - statisches, 72, 268, 269, 300
 - Trägheits-, 72, 78, 272
- Momentenlinie, 79, 98, 278, 320, 321
- monoton, 10, 17, 58, 63, 134, 218
 - fallend, 14, 55, 135, 217, 225, 226
 - fallend, streng, 14, 61, 135, 150, 217, 218
 - steigend, 14, 55, 135, 217, 219, 225, 226
 - steigend, streng, 14, 61, 135, 150, 153, 217–219
 - streng, 217, 218
- Normale, 69, 245
- Nullfolge, 55, 219
- Nullhypothese, 116
- Nullstelle, 14–16, 21, 22, 63, 171, 183, 207, 217, 218, 229, 252, 253, 261, 272
- orthogonal, 32
- Parabel, 43, 51, 52, 54, 64, 67, 199, 200, 202, 203, 205–207, 215, 228–230, 238
- Parallelepipet, 49
- Permutationen, 110, 338
- Polynom, 15, 21, 22, 64, 152–154, 171, 183, 217, 218, 222, 252, 261
 - Taylor-, 60, 68, 243, 262
- Potenz, 9, 13, 16, 133, 139, 144, 145, 153, 157
 - gesetze, 10, 15, 139, 158
- Projektion, 41, 47, 48, 191, 192
- Pyramide, 49, 195, 196
- Quantil, 111, 112, 115, 116, 127, 358, 362, 365
- Querkraftlinie, 79, 98, 278, 321
- Rang, 30, 35, 186
 - kriterium, 31
- Regel
 - von Cramer, 32, 93, 205
 - von Guldin, 267, 269
 - von l'Hospital, 60, 62
- Rente, 102, 108, 335
 - arithmetisch wachsende, 102
 - ewige, 102, 108, 335
 - geometrisch wachsende, 102
 - konstante, 102, 108, 323, 335
 - nachschüssige, 102, 323, 334–336
 - vorschüssige, 102, 108, 330, 334–336
- Resonanzfall, 93, 308, 309, 318, 321, 322
- Rotationskörper, 71, 72, 76, 77, 263–265, 267–269
- Sattelpunkt, 82
- Satz von Green, 83–85, 91, 301
- Schätzung, 115
 - Konfidenz-, 115, 117, 129, 367
 - Punkt-, 115, 131
- Scheitelpunkt, 15
- Schwerpunkt, 48, 72, 77, 78, 266–269
 - geometrischer, 83–85, 90, 91, 294, 297, 299–301
 - Massen-, 83, 84, 90, 91, 299, 300
- Schwingung, 95, 97, 315
- Sektor, 71
 - formel von Leibniz, 258
 - Inhalt, 72
- Skalarprodukt, 41, 48, 191, 197, 198
- Spatprodukt, 41, 42, 49, 193
- Störterm, 93
- Stab, 94, 96
- Standardabweichung, 111, 122, 124–126, 129, 130, 349, 350, 355, 356, 358, 365, 368
- Steigung, 14, 42, 44, 61
 - winkel, 42, 62, 207, 223
- stetig, 56, 57, 219
 - linksseitig, 56
 - rechtsseitig, 56
 - stückweise, 56
- Stichprobe, 114–116, 123, 128–130, 352, 353
 - funktion, 129, 365
 - umfang, 116, 367
- Summe, 9, 28, 29, 31
 - regel, 59
 - zeichen, 9
 - Riemann-, 71
- Supremum, 14, 55
- Tangente, 43, 50, 51, 69, 201–207, 233, 235, 238, 245
 - abschnitt, 51, 202, 204
 - Gleichung, 62, 69, 233, 235, 238, 245, 246
 - Winkel, 69, 223
- Temperatur, 95, 97, 316, 320
- Test, 116
 - χ^2 -Anpassungs-, 117, 131, 371
 - einseitiger, 117, 369, 370
 - Signifikanz-, 116
 - zweiseitiger, 117, 369
- Tetraeder, 42, 49, 52, 195, 210
- Tilgung, 100, 101, 104, 105, 326

- Annuitäten-, 100, 104, 326, 327
- Raten-, 100, 104
- Zinsschuld-, 100, 104
- Trennung der Variablen, 92, 303–306, 310, 312, 314, 316, 317
- Umfang, 111, 115, 116
- Umgebung, 82
- unbeschränkt, 14, 55, 56, 217, 218
- Ungleichung, 10, 13, 133, 135, 141, 146, 150, 160, 324, 338, 343, 370
- unstetig, 56, 57, 220, 226
- Varianz, 111–113, 122, 124, 125, 130, 131, 349, 351, 355, 356, 367, 368
 - empirische, 113, 115, 365
- Variation der Konstanten, 92–94
- Variationen, 110, 338
- Vektor, 28–30, 33, 34, 36, 38, 41, 45–47, 93, 169–172, 183
 - Einheits-, 41, 44–47, 54, 195–197, 203, 210, 214, 245
 - Normalen-, 42, 44–46, 61, 196–198, 203, 209, 212
 - Null-, 28, 31
 - Orts-, 41
 - Richtungs-, 42, 44–46, 203, 208, 209, 212
 - Tangenten-, 61
- Vektorfeld, 83
 - stetig differenzierbares, 84
- Vektorprodukt, 41, 42, 49, 193
- Verteilung, 113, 115, 117
 - χ_n^2 -, 113
 - t_n -, 113
 - Binomial-, 111, 112, 353, 362–369
 - diskrete, 111, 350
 - Exponential-, 112, 115, 126, 127, 359, 360
 - Gamma-, 112
 - geometrische, 111, 112, 350, 351, 372
 - hypergeometrische, 111, 112, 352, 353
 - Normal-, 112, 113, 124, 125, 129, 356, 357, 363–366
 - Poisson-, 111, 112, 123, 127, 128, 351, 352, 360, 362–364
 - Prüf-, 113
 - Rechteck-, 112, 124, 356
 - Standard-Normal-, 112, 113, 357
 - stetige, 112
 - Weibull-, 112
- Verteilungsdichtefunktion, 112, 124, 350, 363
- Verteilungsfunktion, 111–113, 115–117, 122, 124, 349, 350, 355–357, 359–362, 371, 372
 - empirische, 114
- Verzinsung, 103, 108, 109, 325, 333
 - geometrische, 99, 109
 - jährliche, 335
 - lineare, 99, 103, 323, 329, 330, 333
 - stetige, 99
 - tägliche, 332
 - taggenaue, 99
 - unterjährige, 99, 333
 - wechselnde, 99
- Volumen, 42, 49, 72, 76, 77, 83, 87, 90, 263, 265, 267, 269, 285, 293, 297, 299, 300
- Wahrscheinlichkeit, 110–112
- Wendepunkt, 61, 63, 225, 226
- Winkel, 41, 44–48, 50–54, 62, 63, 66, 147, 161, 164–166, 168, 197, 206, 208–210, 216, 223, 229, 230, 232, 234, 235
 - Polar-, 69, 245
 - Tangenten-, 69, 245
- Wurzel, 9, 13, 14, 133, 145
 - gesetze, 10
- Wurzelsatz von Vieta, 15
- Zahlenfolge, 56
 - divergente, 55
 - konvergente, 55
- Zinsen, 99, 100, 103, 105, 107, 323, 325, 326
- Zinsfaktor, 99–102, 323, 325, 326, 328, 329, 332, 333, 335
 - effektiver, 101
- Zinssatz, 99, 100, 102–104, 108, 323–326, 335, 336
 - effektiver, 99
 - interner, 101, 329
 - Kalkulations-, 101
- Zirkulation, 84
- Zufallsvariable, 111, 113–116, 122, 124–127, 129, 349, 351–353, 355–369
 - diskrete, 111, 122, 351
 - stetige, 111, 112, 124, 354
- Zufallsvektor, 113, 115
- Zykloide, 75, 258