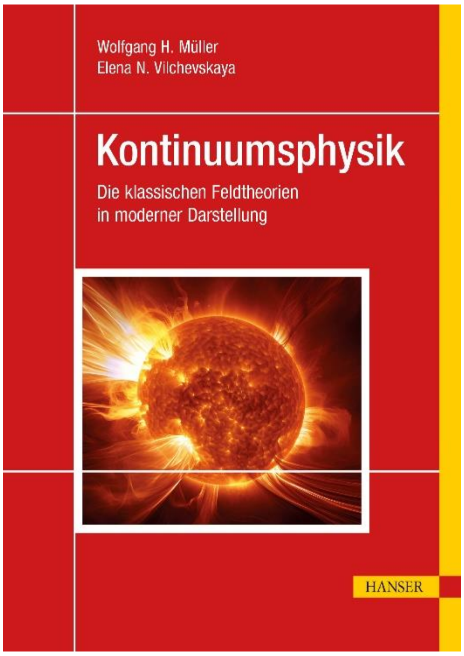
HANSER



Leseprobe

zu

Kontinuumsphysik

von Wolfgang H. Müller und Elena N. Vilchevskaya

Print-ISBN: 978-3-446-47342-3
E-Book-ISBN: 978-3-446-47933-3

Weitere Informationen und Bestellungen unter
https://www.hanser-kundencenter.de/fachbuch/artikel/9783446473423
sowie im Buchhandel

Vorwort

Es ist offensichtlich, dass alles Kontinuierliche teilbar sein muss in Teilbares, das unendlich teilbar ist. Wenn es nämlich in Unteilbares teilbar wäre, so hätten wir ein Unteilbares in Kontakt mit einem Unteilbarem, weil die Ränder der Dinge, die kontinuierlich miteinander sind, eins sind und in Kontakt.
Aristoteles, Physik Buch VI

Die Frage, ob die Welt in ihrer Natur diskret oder kontinuierlich ist, wurde spätestens von den griechischen Philosophen des Altertums gestellt. Beantwortet ist sie bis heute nicht. Eines ist jedoch sicher: Die kontinuumstheoretische Sichtweise in der Physik hat einen klaren mathematischen Vorteil, da man von mächtigen mathematischen Werkzeugen wie der Tensoranalysis und der Theorie partieller Differentialgleichungen Gebrauch machen kann. Typischerweise hören Studierende der (theoretischen) Physik von kontinuierlichen Feldern zum ersten Mal in einem Kurs zur Elektrodynamik. Ingenieurstudenten des Maschinenbaus und der Physikalischen Ingenieurwissenschaften hingegen begegnen diesem Konzept in Vorlesungen zur Fluidmechanik oder (allgemeiner) in der Kontinuumsmechanik. Letztere umfasst alle Aggregatzustände der Materie, fest, flüssig und gasförmig. Die Studierenden lernen hier zwischen Bilanzen der Erhaltungsgrößen wie Masse, Impuls, Drehimpuls und Energie auf der einen und den Material- bzw. Stoffgleichungen auf der anderen Seite zu unterscheiden. Erstere haben Allgemeingültigkeit, letztere können, wie der Name andeutet, nur zur Beschreibung des Verhaltens bestimmter Materialien verwendet werden. In der Tat komplettieren sie die Bilanzen der Erhaltungsgrößen, und man gelangt letztendlich zu einem System partieller Differentialgleichungen, das man (im schlimmsten Fall numerisch) unter Verwendung von Anfangs- und Randbedingungen löst. Um die Vielfalt bei Materialgleichungen zu reduzieren, verwendet man sog. Prinzipe, wie z. B. das Entropie- oder Isotropieprinzip.

In diesem Buch werden wir diesen Weg gehen: Von der Mechanik über die Thermodynamik bis hin zur Elektrodynamik soll diese Modellierungsmethode vorgestellt werden, um zu zeigen, dass sie in allen Bereichen der Physik anwendbar ist und in gleicher Weise vorgeht. Natürlich kann man hier nur einen ersten Eindruck gewinnen. Studierende sollten danach jedoch in der Lage sein, die einschlägigen Fachbücher zu lesen. Deshalb finden sich in diesem Buch auch zahlreiche Literaturhinweise und eine umfangreiche Diskussion bzw. Vergleich verschiedener Zugänge und Meinungen. Diese grau unterlegten Stellen kann man beim ersten Lesen übergehen.

Ein paar zusätzliche Bemerkungen zu den einzelnen Kapiteln. Kapitel 1 über Tensorrechnung ist so geschrieben, dass es für sich gelesen werden kann und eine erste Einführung in die Thematik bildet, auch wenn man nicht speziell Kontinuumstheorien studieren will. Die Kapitel 4 und 5 über Thermodynamik sowie Elektrodynamik sind im Geiste kontinuumsphysikalischer Begriffsbildungen verfasst. Das ist bei beiden Fächern ungewöhnlich, insbesondere wenn man vom Ingenieurwesen her kommt und Technische Thermodynamik und Theoretische Elektrotechnik gehört hat. Vorgebildete wird dieser Zugang erstaunen, und dennoch ist es nur fair, dass in diesem Buch versucht wird, an vielen Stellen eine Brücke zu von anderswo her bekannten Modellvorstellungen zu schlagen. Insbesondere bei der Elektrodynamik haben wir uns entschieden, explizit Vergleiche mit der gängigen Physikliteratur zu ziehen und darüber hinaus den historischen Kontext herausgearbeitet. Im übrigen ist es stets unser Ziel, die Lesenden an wissenschaftliche Arbeitsweisen zu gewöhnen. So werden z. B. Formeln referenziert, auf konsistente Schreibweise geachtet, und es wird erwartet, dass man auch die in diversen Sprachen verfasste, zitierte Literatur im Original konsultiert.

Viele interessante Themen werden in der Kontinuumsliteratur nur sehr stiefmütterlich behandelt. Wir haben uns daher dazu entschlossen, auch für sie hier in diesem Buch eine Lanze zu brechen und diese – natürlich immer aus unserer Sichtweise – etwas ausführlicher behandelt. Das erste Thema sind Spiegelungen und die zu ihrer Beschreibung nötigen Transformationen. Das hier präsentierte Wissen kann man dann z. B. in der Kristallphysik gebrauchen. Zweitens der Unterschied zwischen Beobachterwechsel und Koordinatentransformation, was in vielen Büchern als gleichwertig abgetan wird. In diesem Zusammenhang schlagen wir dann auch die Brücke zur d'Alembert'schen Methode des Freischnittes mit Scheinkräften. Außerdem findet sich hier ein Zugang in die Wissenschaftsphilosophie in Gestalt des Begriffes und der Existenz des Inertialsystems der Mechanik. Drittens geben wir eine unserer Meinung nach logische Einführung in die Notwendigkeit der Einführung von *zwei* Paaren für die elektromagnetischen Feldgrößen und erläutern ihren Zusammenhang. Auch hier taucht der Begriff des Inertialsystems wieder auf, jedoch in über die Mechanik hinausgehender Form in Gestalt der sogenannten Maxwell-Lorentz-Äther-Relationen.

Das Buch ist mit zahlreichen Übungsaufgaben durchsetzt. Die Endlösungen oder Hinweise zur Lösung aus der Literatur sind angegeben aber der detaillierte Lösungsweg nicht. Nur selber lösen macht schlau. Den besten Lernerfolg wird man erzielen, wenn man alle Aufgaben bearbeitet. Aber um schneller voranzukommen, genügt es in einem ersten Schritt, sich wenigstens den Sinn des Gesagten klarzumachen.

Abschließend sei darauf hingewiesen, dass wenn jemand schon „offensichtlich" sagt, und sei es Aristoteles persönlich, man davon ausgehen kann, dass es nicht offensichtlich ist. Genauso verhält es sich mit dem Begriff „Kontinuum" in der Physik und eine der ersten Aufgaben wird es sein zu klären, was man sich unter diesem Kontinuum vorzustellen hat und wo mögliche Grenzen dieser Vorstellung liegen.

Und nicht zu vergessen, wollen wir Frau Ana Stanković und Herrn Jonas Eckardt für das Schreibfehlerfinden danken.

Berlin und Göteborg im Januar 2024

Wolfgang H. Müller und Elena N. Vilchevskaya

Internetseite der Verfasser:
https://www.tu.berlin/lkm

Internetseite der Verfasser zum Grundkurs der Mechanik:
https://https://www.tu.berlin/lkm/studium-lehre/lehrveranstaltungen

Inhalt

1 Tensorrechnung

1.1 Historie und Literaturhinweise

Die historischen Vorläufer der Tensoren waren Spalten- und Zeilenvektoren, Matrizen und Systeme der linearen Algebra mit Indizes, die in Algebra, Geometrie, Oberflächentheorie, Mechanik und anderen Wissenschaftsgebieten verwendet wurden. Die zugehörigen Operationen waren sehr umständlich und erforderten schließlich die Entwicklung eines neuen abstrakten mathematischen Apparats. So präsentierte Mitte des 19. Jahrhunderts der Amerikaner Josiah Willard Gibbs eine Vektoralgebra mit Additionsoperationen, Skalar- und Vektormultiplikation und Vektoranalysis eine Theorie der Differentialrechnung mit Vektorfeldern [Gi1901]. Ungefähr zur gleichen Zeit erschien das Buch von Heaviside [He1893], in dem der Differentialoperator Nabla zum ersten Mal auftritt und wo für die abstrakte Notation ebenfalls eine Lanze gebrochen wird. Bald darauf verallgemeinerte der Italiener Gregorio Ricci-Curbastro und sein Student, der später berühmte Mathematiker Tullio Levi-Civitá, die Vektorrechnung auf Systeme mit beliebig vielen Indizes. Mitte des 20. Jahrhunderts hatte sich die Tensorrechnung zu einem effektiven mathematischen Apparat entwickelt, der in verschiedenen Bereichen der Wissenschaft weit verbreitet war: in der Mechanik, der Differentialgeometrie, der Elektrodynamik, der Relativitätstheorie und vielen anderen. Eine ausführlichere Beschreibung der Entwicklungsgeschichte des Tensorkalküls findet sich beispielsweise in den modernen Lehrbüchern [Di2013], [Zh2001].

Derzeit gibt es zwei Hauptansätze für die Darstellung der Tensortheorie: der koordinatenbasierte und der abstrakte Zugang, manchmal auch „direkte Notation“ genannt. Im Koordinatenansatz ist ein Tensor eine Matrix, deren Komponenten beim Übergang von einer Koordinatenbasis zu einer anderen nach bestimmten Formeln transformiert werden (siehe z. B. [Ra1964], [Ko1965], [Di2013], [Er2018]). Beim abstrakten Ansatz wird der Tensor als ein Element eines linearen Raums behandelt, das man durch eine spezielle Multiplikation von Vektorräumen erhält. In diesem Fall sind keine Koordinatensysteme beteiligt und die Tensoren selbst hängen nicht von der Wahl des Koordinatensystems ab.

Von der direkten Notation eines Tensors ist es einfach, zu seiner Koordinatendarstellung überzugehen, indem man eine Basis im Tensorraum einführt. Aus rein mathematischer Sicht sind also beide Ansätze gleichwertig. Dennoch ist es die Sprache der direkten Tensorrechnung, die das Wesen der grundlegenden Konzepte und Ideen der Kontinuumstheorie am besten widerspiegelt und sich daher gut für die Probleme der Elastizitätstheorie, der Dynamik starrer Körper, der Hydrodynamik, der Theorie der Plastizität, der Thermodynamik und der Elektrodynamik eignet.

Eine große Anzahl grundlegender Monographien und Lehrbücher ist der Theorie der Tensoren gewidmet (siehe z. B. [Ve1978], [Di2013], [So1951]). Ohne einen detaillierten Literaturüberblick geben zu wollen, erwähnen wir hier für Studierende die Bücher von [Po1986], [Re2008], [Zu2006], die Anfänger in die Grundlagen der Tensorrechnung einführen, das Buch von McConnell ([Mc2014]) für Anwendungen von Tensormethoden in der analytischen und der Differentialgeometrie, das aber auch für die Festkörperdynamik, die Strömungsdynamik und die elektromagnetischen Feldtheorie gut ist. Die Werke von Eremeyev und Koautoren [Le2010], [Er2018]) behandeln Tensoranwendungen in der Elastizitätstheorie und der Platten- und Schalentheorie. Besondere Erwähnung verdienen die Bücher von Lurie ([Lu2010], [Lu2012], wo in der Sprache der direkten Tensorrechnung grundlegende Definitionen und Formeln zur Tensoralgebra und der Tensoranalysis zu finden sind, die man für das Studium der Elastizitätstheorie benötigt. Das Buch von Zhilin [Zh2001] enthält eine Darstellung der Vektor- und Tensorrechnung mit Anwendungen zur Beschreibung von Körperbewegungen, der Symmetrie von Tensoren, Tensorfunktionen, der Einführung von axialen Objekten und vieles mehr. Schließlich sei noch das Buch von Palmov erwähnt [Pa2008], in dem die Grundlagen der Tensoralgebra und der Tensoranalysis in zugänglicher Form einfach und verständlich dargestellt werden. Die Zweckmäßigkeit und Kompaktheit der mithilfe der direkten Tensorkalkulation abgeleiteten Gleichungen der Mechanik werden dort demonstriert und die Invarianz der Tensorbeziehungen diskutiert.

Die Ausführungen in unserem Lehrbuch stützen sich in erster Linie auf [Lu2012], [Lu2012], [Zu2006], [Zh2001], [Pa2008]. Es werden nachfolgend die wichtigsten Aussagen der Tensoralgebra, die Theorie der Tensorfunktionen und der Tensoranalysis behandelt sowie die Theorie der Symmetrie von Tensoren und Tensorfunktionen vorgestellt. Der größte Teil des Materials in unserem Lehrbuch wird vom Standpunkt der direkten Tensorrechnung aus präsentiert, wodurch es möglich wird, die Koordinatennotation bei der Ableitung und Analyse der wichtigsten Gleichungen der Kontinuumstheorie zu vermeiden, was die Formeln in Multi-Index-Notation oft umständlich erscheinen lässt, die das Verständnis der betreffenden Phänomene erschwert. Dennoch ist die Koordinatenschreibweise manchmal bequemer, um Zwischenableitungen beim Nachweis von Tensorrelationen vorzunehmen. In diesem Fall ist es sinnvoll, das einfache kartesische Koordinatensystem zu verwenden und nach Erhalt des Endergebnisses zur invarianten Schreibweise zurückzukehren. In der letzten Phase der Problemstellung werden auch Koordinaten eingeführt, wobei die Wahl des Koordinatensystems durch die Besonderheiten eines bestimmten Problems bestimmt wird.

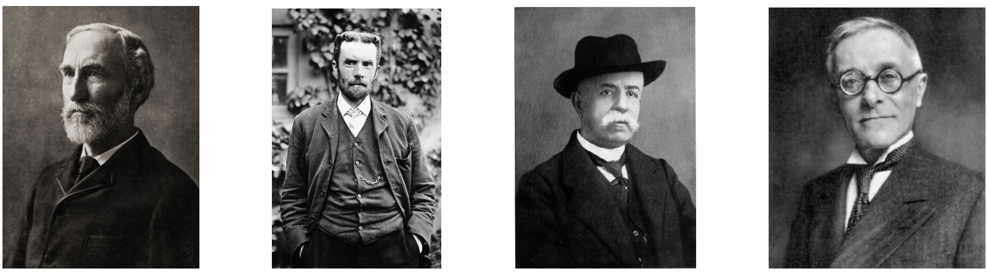


Bild 1.1 Pioniere der Vektor- und Tensorrechnung: Josiah Willard Gibbs (1839–1903), Oliver Heaviside (1850–1925), Gregorio Ricci-Curbastro (1853–1925), Tullio Levi-Civitá (1873–1941)

Die meisten klassischen Arbeiten zur Kontinuumsmechanik verwenden „materielle“ Koordinaten, die im Körper „eingefroren“ sind, so dass man die Änderung der inneren Geometrie des Körpers auf natürliche Weise mit seiner Verformung in Verbindung bringen kann (siehe [Er1980], [Ma1970], [Tr2004]). Diese Koordinaten führen zu einer nicht-orthogonalen Basis, die wiederum die Einführung einer reziproken Basis, kovarianter und kontravarianter Komponenten, Christoffel-Symbole usw. nach sich zieht. Die grundlegenden Konzepte und Operationen der Tensoralgebra und der Tensoranalysis in einer solchen nicht-orthogonalen Basis werden im letzten Abschnitt dieses Kapitels behandelt.

1.2 Tensoralgebra

1.2.1 Vektoren und Tensoren im dreidimensionalen Raum

1.2.1.1 Bezugsrahmen und Koordinatensysteme, polare und axiale Objekte

In der Begriffswelt der direkten Tensorrechnung ist der Begriff des Vektors und des Tensors einer beliebigen Stufe außerhalb eines *Bezugsrahmens* oder *Bezugssystems* bedeutungslos (vgl. auch Abschnitt 2.3). Dabei ist der Bezugsrahmen eher ein philosophisches Konzept, dessen Existenz nicht bewiesen, sondern nur postuliert werden kann. Einen Bezugsrahmen zu definieren, bedeutet insbesondere, ein Modell des absoluten Raums zu konstruieren, bei dem alle Punkte durch die Einführung von drei unabhängigen Richtungen und einer Längenskala im gegebenen Bezugsrahmen parametrisiert sind.

Die klassische Mechanik postuliert die Existenz einer unendlichen Anzahl gleicher Bezugsrahmen, und alle physikalischen Gesetze müssen diesbezüglich invariant sein, d. h. ihre Form bleibt beim Übergang von einem Rahmen zum anderen erhalten. Man spricht von *Forminvarianz* oder manchmal auch vom *Kovarianzprinzip*. Außerdem kann die Position eines beliebigen Punktes in einem bestimmten Bezugssystem durch ein Zahlentripel angegeben werden. Die Art und Weise, wie jeder Punkt in einem Bezugssystem in eine Eins-zu-Eins-Korrespondenz mit einem Zahlentripel gebracht wird, wird als Wahl des Koordinatensystems bezeichnet. In einem Bezugsrahmen können viele verschiedene Koordinatensystemen eingerichtet werden, die alle gleichwertig sind. Der Unterschied zwischen einem Bezugsrahmen und einem Koordinatensystem muss klar verstanden werden. Insbesondere hängen viele physikalische Größen (Geschwindigkeit, Beschleunigung, kinetische Energie usw.) von der Wahl des Bezugssystems ab, aber keine physikalische Größe hängt von der Wahl des Koordinatensystems in einem bestimmten Bezugssystem ab.

In dem gewählten Bezugssystem muss eine zusätzliche Vereinbarung darüber getroffen werden, welche Drehungen als positiv zu betrachten sind, d. h. es muss die Ausrichtung des Raums gewählt werden. Ein Bezugssystem wird *rechtsorientiert* genannt, wenn eine Drehung *gegen den Uhrzeigersinn* als positiv, und *linksorientiert*, wenn eine *Drehung im Uhrzeigersinn* als positiv angesehen wird.

Alle physischen Objekte werden hinsichtlich der Wahl der Orientierung im Bezugssystem in zwei Typen unterteilt (siehe auch Abschnitt 3.6.2). Objekte, die nicht von der Ausrichtung des Bezugssystems abhängen, werden als *polar* bezeichnet. Objekte, die mit dem Faktor -1 multipliziert werden, wenn die Ausrichtung des Bezugssystems umgekehrt wird, werden als *axial* bezeichnet. Zum Beispiel sind Temperatur, Verschiebung und Translationsgeschwindigkeit polare Objekte. Axiale Objekte beziehen sich in der Regel auf die Ausrichtung von Körpern im Raum. Typische Beispiele für axiale Objekte sind das Drehmoment, der Rotationsvektor, die Winkelgeschwindigkeit und die Winkelbeschleunigung.

Es ist zu beachten, dass die Ausrichtung des Bezugsrahmens erfolgt, bevor irgendwelche Operationen an Objekten im Rahmen durchgeführt werden, und dass keine weiteren Operationen an Objekten die ursprünglich gewählte Ausrichtung ändern. Insbesondere bleibt die Orientierung des Raums bei Spiegelungen erhalten.

1.2.1.2 Skalare oder Tensoren nullter Stufe

Definition: Ein Skalar oder Tensor nullter Stufe ist eine physikalische Größe, die von der Wahl des Koordinatensystems unabhängig ist und durch eine einzige reelle Zahl definiert wird.

Beispiele für Skalare in der Physik sind physikalische Größen wie Temperatur, Dichte, Energie, Ladung, usw. Nicht alle Zahlen können als Skalare bezeichnet werden. So sind beispielsweise Vektorkoordinaten keine Skalare, da sie von der Wahl des Koordinatensystems abhängen. Es ist zu beachten, dass skalare Größen oft gleich bleiben aber sich manchmal auch ändern können, wenn man das Bezugssystem ändert. So ändern sich Temperatur, Dichte und innere Energie nicht, wenn man in einen anderen Bezugsrahmen wechselt, während die kinetische Energie von der Wahl des Bezugsrahmens abhängt, weil sich dieser gegenüber dem ursprünglichen Rahmen mit einer anderen Geschwindigkeit bewegen kann. Skalare können Funktionen von Raumpunkten in einem Bezugssystem sein, z. B. die Temperaturverteilung in einem Körper. In diesem Fall handelt es sich um ein skalares *Feld*.

Betrachten wir die Menge der Skalare als Elemente der Menge der reellen Zahlen, also $\mathscr{T}_0 \equiv \mathbb{R}$,* auf denen die Operationen der Addition, Multiplikation und Division nach den Regeln der elementaren Arithmetik eingeführt werden. Als physikalische Größen haben Skalare Dimensionen. Nur skalare Größen desselben Typs, die dieselben Dimensionen und Einheiten haben, können direkt addiert und subtrahiert werden. Andererseits können Skalare verschiedener Dimensionen geteilt und multipliziert werden.

1.2.1.3 Der Vektorraum oder Tensoren erster Stufe

Das Grundelement des Vektorraums ist ein Vektor oder Tensor erster Stufe, der als „gerichteter Pfeil“ verstanden und durch seine Länge und Richtung definiert wird. Ein Beispiel für solche Vektorgrößen in der Mechanik sind Verschiebung, Translations- und Winkelgeschwindigkeit sowie der Rotationsvektor. Wir nennen einen Nullvektor einen Vektor, dessen Länge gleich Null ist. Die Richtung des Nullvektors spielt natürlich keine Rolle.

Folgende vier Regeln werden auf der Menge der Vektoren erklärt:

1. **Vektoradditionsregel**: Sie setzt in eindeutiger Weise zwei Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ desselben Typs mit einem dritten Vektor $\boldsymbol{c}$ desselben Typs gemäß der Parallelogramm- oder Dreiecksregel in Verbindung. Die folgenden Eigenschaften der Additionsoperation gilt es festzuhalten:

* Das Symbol $\mathscr{T}$ weißt auf Tensorraum hin, der nachfolgende Index kennzeichnet die Stufe.

- Kommutativität: $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$,
- Assoziativität: $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$,
- Existenz eines Nullvektors: $\boldsymbol{a}+\mathbf{0}=\mathbf{0}+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$,
- Existenz des Gegenvektors: $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\mathbf{0}$.

2. Die Regel der **Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar**: Jedem Vektor $\boldsymbol{a}$ und Skalar α kann eindeutig ein Vektor $\boldsymbol{b}=\alpha\,\boldsymbol{a}$ zugeordnet werden, der die Länge $|\alpha||\boldsymbol{a}|$ und die Richtung hat, die mit der Richtung von $\boldsymbol{a}$ übereinstimmt, wenn $\alpha>0$ und entgegengesetzt ist, wenn $\alpha<0$. Diese Vorschrift hat folgende Eigenschaften:

$$(\alpha+\beta)\boldsymbol{a}=\alpha\,\boldsymbol{a}+\beta\,\boldsymbol{a}\,,\quad \alpha(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\alpha\,\boldsymbol{a}+\beta\,\boldsymbol{a}\,,\quad \alpha(\beta\,\boldsymbol{a})=(\alpha\,\beta)\boldsymbol{a}\,. \tag{1.1}$$

Der Vektortyp bleibt bei der Multiplikation mit einem polaren Skalar erhalten und wird bei der Multiplikation mit einem axialen Skalar umgekehrt.

Die Menge der Vektoren, für welche die beiden oben genannten Bildungsgesetze gelten, heißt *linearer Vektorraum.*

3. **Skalarmultiplikation von Vektoren**: Die Skalarmultiplikation setzt jedes Paar von Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ zu einem Skalar $\alpha=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ in Beziehung und hat die folgenden Eigenschaften:

- Kommutativität: $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$,
- Distributivität: $(\alpha\,\boldsymbol{a}+\beta\,\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\alpha(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})+\beta(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$,
- Positivdefinitheit: $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}\geq 0\,,\quad \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=0 \Leftrightarrow \boldsymbol{a}=\mathbf{0}$.

Das Ergebnis der Skalarmultiplikation ist ein polarer Skalar, wenn die beteiligten Vektoren den gleichen Typ haben, und ein axialer Skalar, wenn die Vektortypen unterschiedlich sind.

Die **Norm eines Vektors** ist seine Länge:

$$|\boldsymbol{a}|=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a})^{1/2}\,. \tag{1.2}$$

Die Menge der Vektoren, für welche die drei oben genannten Kompositionsgesetze gelten, heißt *linear normierter Raum* oder *euklidischer Raum.*

Zwei Vektoren, die nicht Null sind, werden *orthogonal* genannt, wenn ihr Skalarprodukt Null ist.

Der *Einheitsvektor* eines Vektors $\boldsymbol{a}$ zeigt dessen Richtung an und hat die Länge 1:

$$\boldsymbol{e}_a=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}\,,\ |\boldsymbol{a}|\neq 0\,. \tag{1.3}$$

Die *Projektion* eines Vektors $\boldsymbol{a}$ auf die Richtung von $\boldsymbol{b}$ ist der Vektor

$$\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{b}}=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{e}_b\,. \tag{1.4}$$

Oft hat die Projektion eines Vektors $\boldsymbol{a}$ auf einen Vektor $\boldsymbol{b}$ die Länge

$$|\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{b}}|=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}_b)\,. \tag{1.5}$$

4. **Vektorielle Multiplikation oder Kreuzprodukt** von Vektoren. Im Gegensatz zu den vorangegangenen Gesetzen ist dieses Bildungsgesetz nur in einem orientierten Bezugsrahmen sinnvoll. Das Vektorprodukt der Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ ist ein Vektor $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$, dessen Länge gegeben ist durch $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \sin(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ und dessen Richtung orthogonal zu der über die Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ aufgespannten Ebene ist. Vom Ende des Vektors $\boldsymbol{c}$ aus betrachtet, entsteht dieser im rechtsorientierten Bezugssystem durch kürzeste Drehung vom ersten auf den zweiten Vektor gegen den Uhrzeigersinn, im linksorientierten Bezugssystem im Uhrzeigersinn. Der Typ des Vektors $\boldsymbol{c}$ hängt vom Typ der Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ ab. Wenn beide Quellvektoren vom gleichen Typ sind, dann ist $\boldsymbol{c}$ ein Axialvektor. Wenn einer der Vektoren polar und der andere axial ist, dann ist der Vektor $\boldsymbol{c}$ polar.

   Eigenschaften des Vektorprodukts sind:

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}\,, \quad (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c} + \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}\,. \tag{1.6}$$

Folgende Produkte dreier Vektoren werden häufig verwendet, das sog. *gemischte* (oder *Spatprodukt*), $\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$, und das *doppelte Vektorprodukt*, $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$. Der Betrag des gemischten Produkts ist gleich dem Volumen des Parallelepipeds, das aus den gegebenen Vektoren gebildet wird. Man beachte, dass ein gemischtes Produkt ein Axialskalar ist, wenn alle Vektoren, die es enthält, vom gleichen Typ sind oder zwei von ihnen axial sind.

Erinnert sei in diesem Zusammenhang an die folgenden Identitäten:

Spat- und **doppeltes Kreuzprodukt**:

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b} \cdot (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a})\,; \tag{1.7}$$

dies ist sogenannte *Spatproduktsregel*, da diese Größe das Volumen des von den drei Vektoren aufgespannten Volumens bestimmt.

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}) - \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\,; \tag{1.8}$$

dies ist die sogenannte *bakzap-Regel*, wobei sich der Name aus den Buchstaben der gewählten Vektoren erklärt.

Die eingeführte Menge gerichteter Segmente mit den obigen Bildungsgesetzen ist ein vektororientierter Raum $\mathscr{T}_1$. Schließlich ist zu beachten, dass die Divisionsoperation nicht auf einer Vektormenge definiert ist, da sie nur auf Mengen definiert werden kann, in denen es ein einziges Einheitselement gibt. Beim Vektorraum ist das nicht der Fall, da er eine unendliche Anzahl von Einheitsvektoren unterschiedlicher Richtung enthält.

Übungsaufgabe *Kreuzprodukt*

1. Zeige, dass $|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|^2 = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}) \cdot (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{b}) - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})^2$.
2. Beweise, dass $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) + \boldsymbol{b} \times (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}) + \boldsymbol{c} \times (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{0}$.

1.2.1.4 Der Tensorraum oder Tensoren beliebiger Stufe

Skalare und Vektoren sind nur ein Teil der ganzen Vielfalt an Größen und Begriffen, welche die moderne Naturwissenschaft benötigt. Tensoren höherer Stufe entstehen in der Mechanik als Verallgemeinerung von Vektorräumen. Betrachten wir als Beispiel ein System, das aus drei Federn mit unterschiedlichen Federsteifigkeiten k_i besteht (Bild 1.2). Geben wir dem Mittelpunkt der Federbindung eine Verschiebung $\Delta\boldsymbol{r}$. Es liegt auf der Hand, dass die Rückstellkraft die Summe der in den Federn erzeugten elastischen Kräfte ist, $\boldsymbol{F} = F_1\boldsymbol{e}_1 + F_2\boldsymbol{e}_2 + F_3\boldsymbol{e}_3$, wobei $\boldsymbol{e}_i$ ein Einheitsvektor ist, der entlang der i-ten Feder zeigt, und die Größe der Kraft F_i proportional zur Projektion des Kopplungsmittelpunktes auf die entsprechende Einheitsrichtung ist, $F_i = -k_i\boldsymbol{e}_i\cdot\Delta\boldsymbol{r}$. Wir haben also $\boldsymbol{F} = -(k_1\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_1 + k_2\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_2 + k_3\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_3)\cdot\Delta\boldsymbol{r} = -\boldsymbol{K}\cdot\Delta\boldsymbol{r}$, wobei der Tensor $\boldsymbol{K}$, der sich aus der Summe von drei Paaren von Vektoren multipliziert mit den entsprechenden Federsteifigkeiten ergibt, als Tensorsteifigkeit des Federsystems interpretiert werden kann. Man beachte, dass in diesem Fall die soeben verwendeten Vektorpaare $\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_i$, $i = 1,2,3$ als Ganzes wirken, wobei der erste Vektor dieses Paares die Richtung der Feder und der zweite Vektor die Richtung der Kraft angibt, die beide in diesem Problem zusammenfallen. Um diesen Unterschied zu verdeutlichen, untersuchen wir, wie der Spannungszustand in einem verformbaren Körper beschrieben wird.

Bild 1.2 Steifigkeitstensor eines Federsystems

Schneiden wir den Körper gedanklich durch die Fläche ΔS in zwei Teile und betrachten einen der Teile. Bezeichnen wir mit $\boldsymbol{n}$ die äußere Normale zur Oberfläche. Auf die Fläche $\Delta\boldsymbol{f}(\boldsymbol{n})$ wirkt von der Seite des deformierten Teils eine Kraft ΔS, die von der Ausrichtung der Fläche abhängt (Bild 1.3). Der *Spannungsvektor* in einem Punkt M, der auf ein infinitesimales Flächenelement ΔS wirkt, ist der Grenzwert des Verhältnisses

$$\boldsymbol{t}(\boldsymbol{n}) = \lim_{d\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{f}}{\Delta S}, \tag{1.9}$$

wobei d der größte Durchmesser des Bereichs ist.

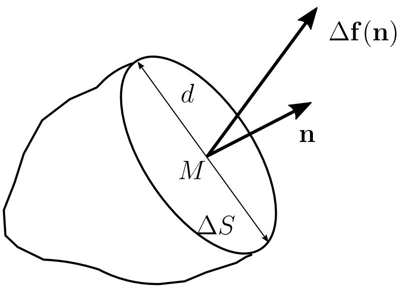


Bild 1.3 Zum Spannungstensor

Um die Spannung im Punkt M zu bestimmen, ist es also notwendig, eine orientierte Fläche zu definieren, die durch die Normale $\boldsymbol{n}$ und den auf diese Fläche wirkenden Spannungsvektor definiert ist. Der *Spannungstensor* ist also ein geordnetes Paar von Vektoren $\boldsymbol{n}$ und $\boldsymbol{t}$, von denen der erste die Fläche und der zweite die auf diese Fläche wirkende Kraft definiert. Die Reihenfolge der Faktoren ist dabei von grundlegender Bedeutung und darf – einmal festgelegt – nicht geändert werden. Man beachte in diesem Zusammenhang, dass die Paare $\boldsymbol{nt}$ und $\boldsymbol{tn}$ unterschiedlich sind. Um den Spannungszustand im Punkt M vollständig zu beschreiben, müssen die Spannungsvektoren in allen Ebenen, die durch M verlaufen, angegeben werden. Es gibt eine unendliche Anzahl solcher Ebenen. Mit einer Standardargumentation, siehe z. B. [Pa2008], kann gezeigt werden, dass der Spannungszustand an einem Punkt vollständig definiert ist, wenn eine ungeordnete Menge von drei geordneten Vektorpaaren gegeben ist.

Das formale Produkt zweier Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$, die zu der Menge $\mathscr{T}_1$ gehören, heißt *Tensormultiplikation* oder *dyadisches Produkt*. Es sei erwähnt, dass in der Literatur häufig ein spezielles Zeichen für diese Tensormultiplikation, nämlich $\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b}$, verwendet wird, das auch in diesem Lehrbuch gelegentlich zum Einsatz kommt. Der Begriff Tensormultiplikation zeigt an, dass diese Operation einige Eigenschaften einer gewöhnlichen Multiplikationsoperation hat.

Man betrachte die endliche Summe der Dyaden:

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{ab} + \boldsymbol{cd} + \boldsymbol{ef} + \cdots \,. \tag{1.10}$$

Die Elemente von $\boldsymbol{A}$ werden als Tensoren zweiter Stufe bezeichnet, wenn folgende Äquivalenzbedingungen erfüllt sind (α ist ein Skalar):

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{ab} + \boldsymbol{cd} = \boldsymbol{cd} + \boldsymbol{ab}\,, \ \ \boldsymbol{a}(\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{ab} + \boldsymbol{ac}\,, \\ &(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})\boldsymbol{c} = \boldsymbol{ac} + \boldsymbol{bc}\,, \ \ (\alpha\,\boldsymbol{a})\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}(\alpha\,\boldsymbol{b})\,. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Ein Tensor zweiter Stufe ist also eine ungeordnete Menge von geordneten Dyaden.

Bezeichnen wir die Menge der Tensoren zweiter Stufe, die man durch Tensorprodukt dreidimensionaler linearer Räume $\mathscr{T}_1\mathscr{T}_1$ erhält, mit $\mathscr{T}_2$. Wir führen auf der Menge $\mathscr{T}_2$ die Operationen der Addition und Multiplikation mit einer Zahl ein, so dass die Grenzen der Menge nicht überschritten werden:

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{A} = \boldsymbol{ab} + \boldsymbol{cd}\,, \ \ \boldsymbol{B} = \boldsymbol{de} + \boldsymbol{gh}\,, \\ &\boldsymbol{S} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{ab} + \boldsymbol{cd} + \boldsymbol{de} + \boldsymbol{gh}\,, \\ &\alpha\,\boldsymbol{A} = (\alpha\,\boldsymbol{a})\boldsymbol{b} + (\alpha\,\boldsymbol{c})\boldsymbol{d} = \boldsymbol{a}(\alpha\,\boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c}(\alpha\,\boldsymbol{d})\,. \end{aligned} \tag{1.12}$$

Eine wichtige Eigenschaft des linearen Raums ist das Vorhandensein eines Null- und eines Gegentensors:

Der *Nulltensor* der Stufe 2 ist der Tensor $\mathbf{0} = \mathbf{oo}$, der über eine Dyade zweier Nullvektoren (hier zur Unterscheidung mit $\mathbf{o}$ bezeichnet) entsteht. Wenn wir den Nullvektor in der Form $\mathbf{o} = 0\boldsymbol{a}$ darstellen, erhalten wir eine alternative Darstellung des Nulltensors:

$$\mathbf{0} = \mathbf{o}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}\mathbf{o}\,. \tag{1.13}$$

Der *Gegentensor* ist derjenige Tensor, der bei Summation zu einem Nulltensor führt.

$$\boldsymbol{\Pi} = (-1)\boldsymbol{A}\,. \tag{1.14}$$

Tensoren noch höherer Stufe werden auf die gleiche Weise eingeführt. Wir definieren das Tensorprodukt von k Vektorräumen: $\mathcal{T}_k = \underbrace{\mathcal{T}_1\mathcal{T}_1\ldots\mathcal{T}_1}_{k}$. Wir nennen die geordnete Menge aufsteigender Tensoren k-ter Stufe auch: $\boldsymbol{ab}$-Dyade, $\boldsymbol{abc}$-Triade und $\boldsymbol{abcd}$-Tetrade.

Die Elemente der Menge $\mathcal{T}_k$, für die die entsprechenden Äquivalenzbeziehungen erfüllt sind, heißen Tensoren k-ter Stufe und werden, wenn es nicht aus dem Kontext hervorgeht, in dem Symbol ${}^k\boldsymbol{A}$ erfasst. Somit bezeichnet z. B. ${}^2\boldsymbol{A} \equiv \boldsymbol{A}$ einen Tensor zweiter Stufe.

Da der Raum der Tensoren k-ter Stufe $\mathcal{T}_k$ ein linearer Raum ist, definiert man Additions- und Multiplikationsoperationen mit einer Zahl wie folgt:

$$\alpha\left({}^k\boldsymbol{A} + {}^k\boldsymbol{B}\right) = \alpha\,{}^k\boldsymbol{A} + \alpha\,{}^k\boldsymbol{B}\,. \tag{1.15}$$

Man beachte, dass die Summe von Tensoren nur für Tensoren gleichen Ranges definiert ist.

1.2.1.5 Vektor- und Tensorbasen sowie Tensor-Koordinaten

Die Dreidimensionalität des Bezugssystems bedeutet, dass es im eingeführten Raum $\mathcal{T}_1$ Dreiergruppen linear unabhängiger Vektoren gibt, aber vier (und mehr) beliebige Vektoren erweisen sich als linear abhängig.

Definition: Jedes Triplett linear unabhängiger Vektoren wird als **Basis** bezeichnet.

Man beachte, dass alle Operationen mit Tensoren invariant sind und nicht von der gewählten Basis abhängen. Der Einfachheit halber wählen wir daher drei beliebig orientierte orthogonale Einheitsvektoren $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$:*

$$\boldsymbol{e}_m \cdot \boldsymbol{e}_n = \delta_{mn} = \begin{cases} 1, & m = n; \\ 0, & m \neq n, \end{cases} \tag{1.16}$$

wobei δ_{mn} das sogenannte *Kroneckersymbol* ist. Eine Basis, welche die Gleichung (1.16) erfüllt, heißt *orthonormal*.

Für jeden Vektor $\boldsymbol{a}$ gibt es eine einzige Menge von Zahlen a_1, a_2, $a_3 \in \mathcal{T}_0$, die man Koordinaten des Vektors in der gewählten Basis nennt:

$$\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3 = a_i\boldsymbol{e}_i\,, \quad a_i = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}_i\,. \tag{1.17}$$

Hier und im Folgenden wird nach der *Einstein'schen Summenkonvention* vorgegangen, d. h. bei zweimal wiederholten Indizes** wird automatisch von 1 bis 3 summiert.

Die skalare Multiplikation der Vektoren $\boldsymbol{a} = a_m\boldsymbol{e}_m$ und $\boldsymbol{b} = b_n\boldsymbol{e}_n$ in Koordinatenschreibweise hat die Form:

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = a_m b_n \delta_{mn} = a_n b_n\,. \tag{1.18}$$

Wir ordnen nun die Basisvektoren so an, dass sie das rechte Tripel der Vektoren $(\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2)\cdot\boldsymbol{e}_3 = 1$ bilden und betrachten das Vektorprodukt zwischen $\boldsymbol{e}_i$ und $\boldsymbol{e}_j$,

$$\boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_j = \epsilon_{ijk}\boldsymbol{e}_k \equiv \epsilon_{kij}\boldsymbol{e}_k\,, \tag{1.19}$$

* Die nicht-orthogonale Basis wird in Abschnitt 1.5 betrachtet.

** Für eine nicht-orthogonale Basis wird diese Regel modifiziert (siehe Abschnitt 1.5).

wobei ϵ_{ijk} das sog. *Levi-Civitá-Symbol* bezeichnet. Die Werte von ϵ_{ijk} sind gleich Null, wenn es sich wiederholende Indizes ijk gibt, gleich 1 für die Sequenz der Indizes 123 und Sequenzen, die durch zyklische Permutation daraus erhalten werden, und schließlich gleich -1, wenn diese Ordnung gebrochen ist, d. h. für Sequenzen 132, 213 und 321. Diese Regeln haben wir im letzten Schritt in Gleichung (1.19) bereits angewandt.

Multipliziert man Gleichung (1.19) skalar mit $\boldsymbol{e}_n$, erhält man eine nützliche Formel zur Bestimmung der Komponenten des Levi-Civitá-Tensors,

$$\epsilon_{ijk} = (\boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_j) \cdot \boldsymbol{e}_k \,. \tag{1.20}$$

Betrachten wir nun die Tensormultiplikation von Vektoren. Jede Dyade $\boldsymbol{ab}$ kann in folgender Form dargestellt werden:

$$\boldsymbol{ab} = (a_m \boldsymbol{e}_m)(b_n \boldsymbol{e}_n) = a_m b_n \boldsymbol{e}_m \boldsymbol{e}_n \,. \tag{1.21}$$

Stellt man in ähnlicher Form alle im Tensorausdruck enthaltenen Dyaden dar, so erhält man, dass jeder Tensor zweiter Stufe durch folgende Erweiterung dargestellt werden kann:

$$\boldsymbol{A} = A_{ij} \boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_j \,, \quad A_{mn} = \boldsymbol{e}_m \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{e}_n \,. \tag{1.22}$$

Die Kombinationen $\boldsymbol{e}_m \boldsymbol{e}_n$ werden als Elemente der Tensorbasis bezeichnet, und Werte von A_{mn} sind die Tensorkoordinaten in Bezug auf die eingeführte Tensorbasis. Der Tensor des zweiten Ranges kann also als Summe von neun Dyaden dargestellt werden.

Satz: Die Dimensionalität des Raumes $\mathcal{T}_2$ ist 9, d. h. die Elemente der Tensorbasis $\boldsymbol{e}_m \boldsymbol{e}_n$ sind linear unabhängig.

Beweis: Lineare Unabhängigkeit der Tensorbasiselemente bedeutet, dass

$$\alpha_{mn} \boldsymbol{e}_m \boldsymbol{e}_n = \boldsymbol{0} \tag{1.23}$$

dann und nur dann möglich ist, wenn $\alpha_{mn} = 0$ gilt. Durch skalare Multiplikation der Gleichung (1.23) mit $\boldsymbol{e}_k$ erhalten wir: $\alpha_{mn} \boldsymbol{e}_m \delta_{nk} = \alpha_{mk} \boldsymbol{e}_m = \boldsymbol{0}$, $k = 1, 2, 3$. Aufgrund der linearen Unabhängigkeit der Vektorbasiselemente ergibt sich also, dass $\alpha_{mn} = 0$. In einer festen Basis ist ein Tensor zweiter Stufe also vollständig durch seine Koordinatenmatrix der Ordnung 3×3 definiert. □

Behauptung: Jeder Tensor zweiter Stufe kann als Summe von drei Dyaden dargestellt werden.

Beweis durch Konstruktion: Wenn man die Ausdrücke in der Gleichung (1.22) zusammenfasst, erhält man

$$\boldsymbol{A} = (A_{m1} \boldsymbol{e}_m) \boldsymbol{e}_1 + (A_{m2} \boldsymbol{e}_m) \boldsymbol{e}_2 + (A_{m3} \boldsymbol{e}_m) \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{a}_1 \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{a}_2 \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{a}_3 \boldsymbol{e}_3 \,. \;\square \tag{1.24}$$

Man beachte, dass, obwohl jede Dyade ein Tensor zweiter Stufe ist, ein beliebiger Tensor zweiter Stufe nur in Ausnahmefällen auf eine einzelne Dyade reduziert werden kann.

Index

E

F

K

L

M

N

O

P

Z