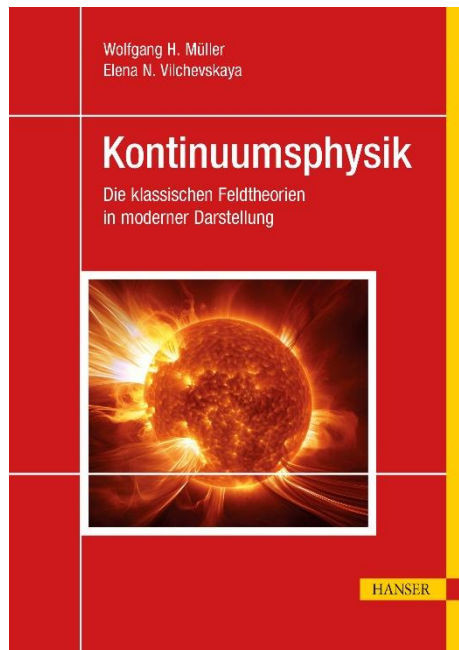


HANSER



Leseprobe

zu

Kontinuumsphysik

von Wolfgang H. Müller und Elena N. Vilchevskaya

Print-ISBN: 978-3-446-47342-3

E-Book-ISBN: 978-3-446-47933-3

Weitere Informationen und Bestellungen unter

<https://www.hanser-kundencenter.de/fachbuch/artikel/9783446473423>

sowie im Buchhandel

© Carl Hanser Verlag, München

Vorwort

Es ist offensichtlich, dass alles Kontinuierliche teilbar sein muss in Teilbares, das unendlich teilbar ist. Wenn es nämlich in Unteilbares teilbar wäre, so hätten wir ein Unteilbares in Kontakt mit einem Unteilbarem, weil die Ränder der Dinge, die kontinuierlich miteinander sind, eins sind und in Kontakt.
Aristoteles, Physik Buch VI

Die Frage, ob die Welt in ihrer Natur diskret oder kontinuierlich ist, wurde spätestens von den griechischen Philosophen des Altertums gestellt. Beantwortet ist sie bis heute nicht. Eines ist jedoch sicher: Die Kontinuumstheoretische Sichtweise in der Physik hat einen klaren mathematischen Vorteil, da man von mächtigen mathematischen Werkzeugen wie der Tensoranalysis und der Theorie partieller Differentialgleichungen Gebrauch machen kann. Typischerweise hören Studierende der (theoretischen) Physik von kontinuierlichen Feldern zum ersten Mal in einem Kurs zur Elektrodynamik. Ingenieurstudenten des Maschinenbaus und der Physikalischen Ingenieurwissenschaften hingegen begegnen diesem Konzept in Vorlesungen zur Fluidmechanik oder (allgemeiner) in der Kontinuumsmechanik. Letztere umfasst alle Aggregatzustände der Materie, fest, flüssig und gasförmig. Die Studierenden lernen hier zwischen Bilanzen der Erhaltungsgrößen wie Masse, Impuls, Drehimpuls und Energie auf der einen und den Material- bzw. Stoffgleichungen auf der anderen Seite zu unterscheiden. Erstere haben Allgemeingültigkeit, letztere können, wie der Name andeutet, nur zur Beschreibung des Verhaltens bestimmter Materialien verwendet werden. In der Tat komplettieren sie die Bilanzen der Erhaltungsgrößen, und man gelangt letztendlich zu einem System partieller Differentialgleichungen, das man (im schlimmsten Fall numerisch) unter Verwendung von Anfangs- und Randbedingungen löst. Um die Vielfalt bei Materialgleichungen zu reduzieren, verwendet man sog. Prinzipie, wie z. B. das Entropie- oder Isotropieprinzip.

In diesem Buch werden wir diesen Weg gehen: Von der Mechanik über die Thermodynamik bis hin zur Elektrodynamik soll diese Modellierungsmethode vorgestellt werden, um zu zeigen, dass sie in allen Bereichen der Physik anwendbar ist und in gleicher Weise vorgeht. Natürlich kann man hier nur einen ersten Eindruck gewinnen. Studierende sollten danach jedoch in der Lage sein, die einschlägigen Fachbücher zu lesen. Deshalb finden sich in diesem Buch auch zahlreiche Literaturhinweise und eine umfangreiche Diskussion bzw. Vergleich verschiedener Zugänge und Meinungen. Diese grau unterlegten Stellen kann man beim ersten Lesen übergehen.

Ein paar zusätzliche Bemerkungen zu den einzelnen Kapiteln. [Kapitel 1](#) über Tensorrechnung ist so geschrieben, dass es für sich gelesen werden kann und eine erste Einführung in die Thematik bildet, auch wenn man nicht speziell Kontinuumstheorien studieren will. Die [Kapitel 4](#) und [5](#) über Thermodynamik sowie Elektrodynamik sind im Geiste kontinuumsphysikalischer Begriffsbildungen verfasst. Das ist bei beiden Fächern ungewöhnlich, insbesondere wenn man vom Ingenieurwesen her kommt und Technische Thermodynamik und Theoretische Elektrotechnik gehört hat. Vorgebildete wird dieser Zugang erstaunen, und dennoch ist es nur fair,

dass in diesem Buch versucht wird, an vielen Stellen eine Brücke zu von anderswo her bekannten Modellvorstellungen zu schlagen. Insbesondere bei der Elektrodynamik haben wir uns entschieden, explizit Vergleiche mit der gängigen Physikk-literatur zu ziehen und darüber hinaus den historischen Kontext herausgearbeitet. Im übrigen ist es stets unser Ziel, die Lesenden an wissenschaftliche Arbeitsweisen zu gewöhnen. So werden z. B. Formeln referenziert, auf konsistente Schreibweise geachtet, und es wird erwartet, dass man auch die in diversen Sprachen verfasste, zitierte Literatur im Original konsultiert.

Viele interessante Themen werden in der Kontinuumsliteratur nur sehr stiefmütterlich behandelt. Wir haben uns daher dazu entschlossen, auch für sie hier in diesem Buch eine Lanze zu brechen und diese – natürlich immer aus unserer Sichtweise – etwas ausführlicher behandelt. Das erste Thema sind Spiegelungen und die zu ihrer Beschreibung nötigen Transformationen. Das hier präsentierte Wissen kann man dann z. B. in der Kristallphysik gebrauchen. Zweitens der Unterschied zwischen Beobachterwechsel und Koordinatentransformation, was in vielen Büchern als gleichwertig abgetan wird. In diesem Zusammenhang schlagen wir dann auch die Brücke zur d’Alembert’schen Methode des Freischnittes mit Scheinkräften. Außerdem findet sich hier ein Zugang in die Wissenschaftsphilosophie in Gestalt des Begriffes und der Existenz des Inertialsystems der Mechanik. Drittens geben wir eine unserer Meinung nach logische Einführung in die Notwendigkeit der Einführung von *zwei* Paaren für die elektromagnetischen Feldgrößen und erläutern ihren Zusammenhang. Auch hier taucht der Begriff des Inertialsystems wieder auf, jedoch in über die Mechanik hinausgehender Form in Gestalt der sogenannten Maxwell-Lorentz-Äther-Relationen.

Das Buch ist mit zahlreichen Übungsaufgaben durchsetzt. Die Endlösungen oder Hinweise zur Lösung aus der Literatur sind angegeben aber der detaillierte Lösungsweg nicht. Nur selber lösen macht schlau. Den besten Lernerfolg wird man erzielen, wenn man alle Aufgaben bearbeitet. Aber um schneller voranzukommen, genügt es in einem ersten Schritt, sich wenigstens den Sinn des Gesagten klarzumachen.

Abschließend sei darauf hingewiesen, dass wenn jemand schon „offensichtlich“ sagt, und sei es Aristoteles persönlich, man davon ausgehen kann, dass es nicht offensichtlich ist. Genauso verhält es sich mit dem Begriff „Kontinuum“ in der Physik und eine der ersten Aufgaben wird es sein zu klären, was man sich unter diesem Kontinuum vorzustellen hat und wo mögliche Grenzen dieser Vorstellung liegen.

Und nicht zu vergessen, wollen wir Frau Ana Stanković und Herrn Jonas Eckardt für das Schreibfehlerfinden danken.

Berlin und Göteborg im Januar 2024

Wolfgang H. Müller und Elena N. Vilchevskaya

Internetseite der Verfasser:

<https://www.tu.berlin/lkm>

Internetseite der Verfasser zum Grundkurs der Mechanik:

<https://www.tu.berlin/lkm/studium-lehre/lehrveranstaltungen>

Inhalt

1	Tensorrechnung	1
1.1	Historie und Literaturhinweise	1
1.2	Tensoralgebra	3
1.2.1	Vektoren und Tensoren im dreidimensionalen Raum	3
1.2.1.1	Bezugsrahmen und Koordinatensysteme, polare und axiale Objekte	3
1.2.1.2	Skalare oder Tensoren nullter Stufe	4
1.2.1.3	Der Vektorraum oder Tensoren erster Stufe	4
1.2.1.4	Der Tensorraum oder Tensoren beliebiger Stufe	7
1.2.1.5	Vektor- und Tensorbasen sowie Tensor-Koordinaten	9
1.2.2	Operationen für Tensoren zweiter Stufe	11
1.2.2.1	Symmetrische und antisymmetrische Tensoren	11
1.2.2.2	Tensormultiplikation	12
1.2.2.3	Der Einheitstensor und der Levi-Civita-Tensor	17
1.2.2.4	Die Spur eines Tensors zweiter Stufe	20
1.2.2.5	Vektorinvariante und assoziierter Vektor	21
1.2.2.6	Lineare Zuordnungen	23
1.2.2.7	Determinante eines Tensors	23
1.2.2.8	Inverser Tensor und Cayley-Hamilton-Theorem	25
1.2.2.9	Norm eines Tensors zweiter Stufe sowie Tensorreihen	28
1.2.3	Orthogonale Drehungen	29
1.2.3.1	Der Rotationstensor	31
1.2.3.2	Projektoren und Spiegelungstensoren	37
1.2.3.3	Anschauliches zu Spiegelungen, polaren und axialen Vektoren	38
1.2.4	Zerlegung von Tensoren zweiter Stufe	40
1.2.4.1	Spektrale Zerlegung eines Tensors	40
1.2.4.2	Zerlegung eines Tensors in Kugel- und Deviatoranteil	43
1.2.4.3	Polare Zerlegung	45
1.2.5	Tensoren höherer Stufe	48
1.2.5.1	Grundlegende Tensoroperationen	48
1.2.5.2	Symmetrie von Tensoren und isotrope Tensoren	50
1.2.5.3	Tensoren vierter Stufe und spezielle Tensorbasen	53

1.3	Tensorfunktionen	56
1.3.1	Einleitende Bemerkungen	56
1.3.2	Isotrope Funktionen und Invarianten von Tensorsystemen	57
1.3.3	Differentialoperationen	60
1.3.3.1	Differentiation von Tensoren nach einem skalaren Argument	60
1.3.3.2	Differentiation einer skalarwertigen Funktion	62
1.3.3.3	Ableitung einer Skalarfunktion nach einem Tensorargument..	67
1.4	Tensorfelder	70
1.4.1	Krummlinige orthogonale Koordinaten	70
1.4.2	Hamiltons Nabla-Operator	72
1.4.3	Differentialoperationen an einem Produkt	75
1.4.4	Zweite Ableitungen	77
1.4.5	Orthogonale Koordinatensysteme	79
1.4.5.1	Zylinderkoordinaten	79
1.4.5.2	Kugelkoordinaten	81
1.4.6	Integralausdrücke.....	84
1.4.6.1	Umwandlung eines Volumenintegrals in ein Oberflächenintegral.....	84
1.4.6.2	Stokes'scher Satz	86
1.5	Nicht-orthogonale Koordinatensysteme	87
1.5.1	Haupt- und reziproke Basis.....	87
1.5.1.1	Basistransformationen	88
1.5.1.2	Metrik	89
1.5.2	Vektorprodukt und Tensordeterminante	91
1.5.3	Kovariante Differentiation	93
1.5.3.1	Der Nabla-Operator in nicht-orthogonaler Basis	93
1.5.3.2	Ableitungen von Basisvektoren und Christoffelsymbole	94
1.5.3.3	Umwandlung der Christoffelsymbole.....	97
1.5.3.4	Kovariante Differentiation eines Tensors zweiter Stufe	98
1.5.3.5	Differentialoperationen in krummlinigen Koordinaten	99
	Literatur	101
2	Grundbegriffe	103
2.1	Mathematische Beschreibung von Feldgrößen	103
2.1.1	Die Kontinuumshypothese	103
2.1.2	Raum, Zeit und Beobachter – Teil I	106
2.1.3	Räumliche oder Euler'sche Beschreibungsweise	109
2.1.4	Transporttheoreme volumetrischer Feldgrößen in räumlicher Darstellung.....	112

2.1.5	Transporttheoreme für Flussfeldgrößen in räumlicher Darstellung	116
2.1.6	Materielle oder Lagrange'sche Beschreibungsweise	119
2.2	Allgemeine Bilanzgleichungen	122
2.2.1	Bilanzen volumetrischer Feldgrößen – globale Formulierung	122
2.2.2	Bilanzen für Flußfeldgrößen – globale Formulierung	124
2.2.3	Bilanzen für Volumen und offene Flächen im singulären Fall	124
2.2.4	Materielle Zeitableitung	128
2.3	Raum, Zeit und Beobachter – Teil II	129
2.3.1	Das mathematische Pendel: eine Fundgrube zur Klärung der Begriffe Beobachter- und Koordinatenwechsel	129
2.3.2	Lösung im Inertialsystem und Koordinatensystemswechsel	130
2.3.3	Bezugssystemwechsel	134
2.3.4	Koordinaten- und Beobachterwechsel im Nichtinertialsystem	141
2.4	Die euklidische Beobachtertransformation	143
2.4.1	Begriffliches	143
2.4.2	Beobachter- vs. Koordinatenwechsel	144
2.4.3	Geschwindigkeit bei Beobachterwechsel	148
2.4.4	Beschleunigung bei Beobachterwechsel	153
	Literatur	155

3 Mechanik **157**

3.1	Zielsetzung der Kontinuumsmechanik	157
3.2	Bilanzen der Kontinuumsmechanik	158
3.2.1	Massenbilanz	158
3.2.2	Teilchenzahlbilanz	164
3.2.3	Impulsbilanz	166
3.2.4	Bilanz der kinetischen Energie	169
3.2.5	Bilanz des Drehimpulses (moment of momentum)	170
3.2.6	Bilanz des Gesamtdrehimpulses (angular momentum)	173
3.2.6.1	Vorbemerkungen	173
3.2.6.2	Die Begriffe des verallgemeinerten linearen Impulses und des Spins	174
3.2.6.3	Die Bilanz des verallgemeinerten linearen Impuls	178
3.2.6.4	Die Bilanz des Gesamtdrehimpulses	179
3.2.6.5	Die Bilanz des Bahndrehimpulses	179
3.2.6.6	Die Bilanz des dynamischen Spins	180
3.2.6.7	Die Bilanz der kinetischen Energie für mikropolare Kontinua	180
3.2.6.8	Ein Beispiel zu den Möglichkeiten des Koppeltensors \mathbf{B} und des Mikroträgheitstensors \mathbf{J}	181

3.3	Materialgleichungen einfacher Kontinua	183
3.3.1	Der linear-elastische Hooke'sche Festkörper	183
3.3.2	Das Navier-Stokes-Fourier-Fluid	186
3.4	Feldgleichungen der klassischen Kontinuumsmechanik	188
3.4.1	Vorbemerkungen	188
3.4.2	Die Navier-Lamé'schen partiellen Differentialgleichungen	189
3.4.3	Beispiel zu Navier-Lamé-Gleichungen	189
3.4.4	Bewegungsgleichungen für ein reibungsfreies Fluid (Eulerfall)	191
3.4.5	Beispiel zum reibungsfreien Eulerfluid	191
3.4.6	Die Navier-Stokes'schen partiellen Differentialgleichungen	194
3.4.7	Beispiel zu Navier-Stokes-Gleichungen	195
3.5	Materialgleichungen polarer Kontinua	196
3.5.1	Der lineare isotrope mikropolare Festkörper	196
3.5.2	Feldgleichungen für mikropolare Festkörper	198
3.5.3	Beispiel für den mikropolaren Festkörper	199
3.5.4	Viskose Fluide mit Momentenspannungen	201
3.5.5	Feldgleichungen für polare Fluide	203
3.5.6	Beispiel für polare Fluide	203
3.6	Mechanische Felder und euklidischer Beobachterwechsel	206
3.6.1	Der Distanzvektor	206
3.6.2	Nochmals polare und axiale Vektoren und Tensoren	209
3.6.3	Der Gradient oder Nabla-Operator	216
3.6.4	Der Geschwindigkeitsgradient und seine Varianten	216
3.6.5	Das Feld der Dichte und die Massenbilanz	218
3.6.6	Volumen-, Oberflächenkraft und Spannungstensor	220
3.6.7	Felder der Spinbilanz	221
3.6.8	Die Impulsbilanz	222
3.6.9	Hooke'sches Gesetz	223
3.6.10	Navier-Stokes-Materialgleichung	224
3.6.11	Momentenspannungstensor	224
	Literatur	225
4	Thermodynamik	227
4.1	Energiebilanzen	227
4.1.1	Bilanz der Gesamtenergie für klassische Kontinua	227
4.1.2	Bilanz der inneren Energie	229
4.1.3	Bilanz der Gesamtenergie für mikropolare Kontinua	230
4.1.4	Bilanz der inneren Energie für mikropolare Kontinua	230

4.2	Entropie	231
4.2.1	Ein erster Zugang zur Entropie nach Eckart	232
4.2.2	Entropiebilanz und 2. Hauptsatz der Thermodynamik	243
4.3	Auswertung der Entropieungleichung	244
4.3.1	Thermodynamik irreversibler Prozesse: die Kraft-Fluss-Methode	244
4.3.1.1	Vorbemerkungen	244
4.3.1.2	Thermodynamische Kräfte und Flüsse	245
4.3.1.3	Kritik der Kraft-Fluss-Methode	250
4.3.1.4	Kraft-Fluss-Methode und Stabilität	250
4.3.1.5	Thermodynamische Stabilität	254
4.3.2	Das Verfahren nach Coleman-Noll	260
4.3.2.1	Vorbemerkungen	260
4.3.2.2	Der Fall des linear-elastischen Festkörpers	260
4.3.2.3	Der Fall der Navier-Stokes-Fourier-Flüssigkeit	264
4.3.3	Die Methode der Lagrange'schen Multiplikatoren	266
4.3.3.1	Vorbemerkungen	266
4.3.3.2	Zustandsraum und Darstellung der Materialfunktionen, Isotropieprinzip	266
4.3.3.3	Formulierung des Entropieprinzips und ergänzende Bemerkungen	271
4.3.3.4	Die Auswertung des Entropieprinzips	273
4.3.4	Die Methode der reduzierten Energiebilanz nach Zhilin	281
4.3.4.1	Vorbemerkungen	281
4.3.4.2	Materielle Zeitableitungen und integrierender Faktor	283
4.3.4.3	Legendretransformationen und die freie Energie	288
4.3.4.4	Der 2. Hauptsatz der Thermodynamik in verschärfter Form ..	289
4.3.5	Materialgleichungen für mikropolare Medien	290
4.3.5.1	Reduzierte Form der Bilanz für die innere Energie	290
4.3.5.2	Cauchy-Green-Beziehungen für mikropolare Medien	292
4.3.5.3	Fourier- und Planck-Ungleichungen für mikropolare Medien	292
4.4	Thermodynamische Felder und euklidischer Beobachterwechsel	293
4.4.1	Euklidische Skalare	293
4.4.2	Euklidische Vektoren	293
4.4.3	Bilanz der inneren Energie	293
Literatur	294

5	Elektrodynamik	297
5.1	Das Induktionsgesetz oder der erste Satz der Maxwell'schen Gleichungen	298
5.1.1	Experimentelle Beobachtungen	298
5.1.2	Mathematische Verallgemeinerung	302
5.2	Ladungserhaltung oder der zweite Satz der Maxwell'schen Gleichungen	316
5.2.1	Der experimentelle Nachweis	316
5.2.2	Ladungs- und Strompotential	318
5.3	Dimensionen und Einheiten der elektromagnetischen Felder	327
5.3.1	Die Maxwell-Lorentz-Äther-Beziehungen	327
5.3.2	Das Coulomb'sche und das Biot-Savart'sche Gesetz neu betrachtet	328
5.4	Transformationseigenschaften der elektromagnetischen Felder	338
5.4.1	Weltensornotation der Maxwell-Gleichungen	338
5.4.2	Euklidische Transformationen und objektive Tensoren des Elektromagnetismus	342
5.4.3	The Maxwell-Lorentz-Äther-Beziehungen und die Lorentz-Transformationen	345
5.5	Polarisation und Magnetisierung	352
5.5.1	Additive Zerlegung von Ladungs- und Stromdichten	352
5.5.2	Einfachste Materialgleichungen für Polarisation und Magnetisierung..	354
5.6	Unstetigkeiten bei elektromagnetischen Feldern	357
5.6.1	Bilanzen für Volumen und offene Flächen, die von singulären Flächen und singulären Linien durchquert werden	357
5.6.2	Sprungbilanzen der elektromagnetischen Felder in der Physik	359
5.7	Der Äther, verschiedene Arten der Zeitdifferentiation und andere kuriose Dinge aus der Elektrodynamik	361
5.7.1	Der Äther	361
5.7.2	Verschiedene Arten der Zeitableitung	367
	Literatur	370
	Abbildungsverzeichnis	376
	Index	379

1

Tensorrechnung

■ 1.1 Historie und Literaturhinweise

Die historischen Vorläufer der Tensoren waren Spalten- und Zeilenvektoren, Matrizen und Systeme der linearen Algebra mit Indizes, die in Algebra, Geometrie, Oberflächentheorie, Mechanik und anderen Wissenschaftsgebieten verwendet wurden. Die zugehörigen Operationen waren sehr umständlich und erforderten schließlich die Entwicklung eines neuen abstrakten mathematischen Apparats. So präsentierte Mitte des 19. Jahrhunderts der Amerikaner Josiah Willard Gibbs eine Vektoralgebra mit Additionsoperationen, Skalar- und Vektormultiplikation und Vektoranalysis eine Theorie der Differentialrechnung mit Vektorfeldern [Gi1901]. Ungefähr zur gleichen Zeit erschien das Buch von Heaviside [He1893], in dem der Differentialoperator Nabla zum ersten Mal auftritt und wo für die abstrakte Notation ebenfalls eine Lanze gebrochen wird. Bald darauf verallgemeinerte der Italiener Gregorio Ricci-Curbastro und sein Student, der später berühmte Mathematiker Tullio Levi-Civita, die Vektorrechnung auf Systeme mit beliebig vielen Indizes. Mitte des 20. Jahrhunderts hatte sich die Tensorrechnung zu einem effektiven mathematischen Apparat entwickelt, der in verschiedenen Bereichen der Wissenschaft weit verbreitet war: in der Mechanik, der Differentialgeometrie, der Elektrodynamik, der Relativitätstheorie und vielen anderen. Eine ausführlichere Beschreibung der Entwicklungsgeschichte des Tensorkalküls findet sich beispielsweise in den modernen Lehrbüchern [Di2013], [Zh2001].

Derzeit gibt es zwei Hauptansätze für die Darstellung der Tensortheorie: der koordinatenbasierte und der abstrakte Zugang, manchmal auch „direkte Notation“ genannt. Im Koordinatenansatz ist ein Tensor eine Matrix, deren Komponenten beim Übergang von einer Koordinatenbasis zu einer anderen nach bestimmten Formeln transformiert werden (siehe z. B. [Ra1964], [Ko1965], [Di2013], [Er2018]). Beim abstrakten Ansatz wird der Tensor als ein Element eines linearen Raums behandelt, das man durch eine spezielle Multiplikation von Vektorräumen erhält. In diesem Fall sind keine Koordinatensysteme beteiligt und die Tensoren selbst hängen nicht von der Wahl des Koordinatensystems ab.

Von der direkten Notation eines Tensors ist es einfach, zu seiner Koordinatendarstellung überzugehen, indem man eine Basis im Tensorraum einführt. Aus rein mathematischer Sicht sind also beide Ansätze gleichwertig. Dennoch ist es die Sprache der direkten Tensorrechnung, die das Wesen der grundlegenden Konzepte und Ideen der Kontinuumstheorie am besten widerspiegelt und sich daher gut für die Probleme der Elastizitätstheorie, der Dynamik starrer Körper, der Hydrodynamik, der Theorie der Plastizität, der Thermodynamik und der Elektrodynamik eignet.

Eine große Anzahl grundlegender Monographien und Lehrbücher ist der Theorie der Tensoren gewidmet (siehe z. B. [Ve1978], [Di2013], [So1951]). Ohne einen detaillierten Literaturüberblick geben zu wollen, erwähnen wir hier für Studierende die Bücher von [Po1986], [Re2008], [Zu2006], die Anfänger in die Grundlagen der Tensorrechnung einführen, das Buch

von McConnell ([Mc2014]) für Anwendungen von Tensormethoden in der analytischen und der Differentialgeometrie, das aber auch für die Festkörperdynamik, die Strömungsdynamik und die elektromagnetischen Feldtheorie gut ist. Die Werke von Eremeyev und Koautoren [Le2010], [Er2018]) behandeln Tensoranwendungen in der Elastizitätstheorie und der Platten- und Schalentheorie. Besondere Erwähnung verdienen die Bücher von Lurie ([Lu2010], [Lu2012]), wo in der Sprache der direkten Tensorrechnung grundlegende Definitionen und Formeln zur Tensoralgebra und der Tensoranalysis zu finden sind, die man für das Studium der Elastizitätstheorie benötigt. Das Buch von Zhilin [Zh2001] enthält eine Darstellung der Vektor- und Tensorrechnung mit Anwendungen zur Beschreibung von Körperbewegungen, der Symmetrie von Tensoren, Tensorfunktionen, der Einführung von axialen Objekten und vieles mehr. Schließlich sei noch das Buch von Palmov erwähnt [Pa2008], in dem die Grundlagen der Tensoralgebra und der Tensoranalysis in zugänglicher Form einfach und verständlich dargestellt werden. Die Zweckmäßigkeit und Kompaktheit der mithilfe der direkten Tensorkalkulation abgeleiteten Gleichungen der Mechanik werden dort demonstriert und die Invarianz der Tensorbeziehungen diskutiert.

Die Ausführungen in unserem Lehrbuch stützen sich in erster Linie auf [Lu2012], [Lu2012], [Zu2006], [Zh2001], [Pa2008]. Es werden nachfolgend die wichtigsten Aussagen der Tensoralgebra, die Theorie der Tensorfunktionen und der Tensoranalysis behandelt sowie die Theorie der Symmetrie von Tensoren und Tensorfunktionen vorgestellt. Der größte Teil des Materials in unserem Lehrbuch wird vom Standpunkt der direkten Tensorrechnung aus präsentiert, wodurch es möglich wird, die Koordinatennotation bei der Ableitung und Analyse der wichtigsten Gleichungen der Kontinuumsmechanik zu vermeiden, was die Formeln in Multi-Indexnotation oft umständlich erscheinen lässt, die das Verständnis der betreffenden Phänomene erschwert. Dennoch ist die Koordinatenschreibweise manchmal bequemer, um Zwischenableitungen beim Nachweis von Tensorrelationen vorzunehmen. In diesem Fall ist es sinnvoll, das einfache kartesische Koordinatensystem zu verwenden und nach Erhalt des Endergebnisses zur invarianten Schreibweise zurückzukehren. In der letzten Phase der Problemstellung werden auch Koordinaten eingeführt, wobei die Wahl des Koordinatensystems durch die Besonderheiten eines bestimmten Problems bestimmt wird.

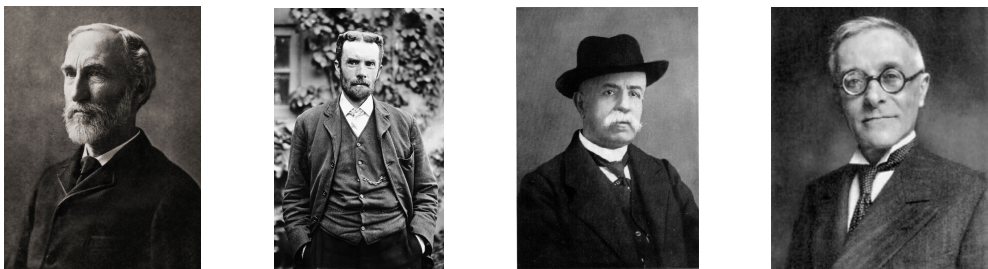


Bild 1.1 Pioniere der Vektor- und Tensorrechnung: Josiah Willard Gibbs (1839–1903), Oliver Heaviside (1850–1925), Gregorio Ricci-Curbastro (1853–1925), Tullio Levi-Civita (1873–1941)

Die meisten klassischen Arbeiten zur Kontinuumsmechanik verwenden „materielle“ Koordinaten, die im Körper „eingefroren“ sind, so dass man die Änderung der inneren Geometrie des Körpers auf natürliche Weise mit seiner Verformung in Verbindung bringen kann (siehe [Er1980], [Ma1970], [Tr2004]). Diese Koordinaten führen zu einer nicht-orthogonalen Basis, die wiederum die Einführung einer reziproken Basis, kovarianter und kontravarianter Komponen-

ten, Christoffel-Symbole usw. nach sich zieht. Die grundlegenden Konzepte und Operationen der Tensoralgebra und der Tensoranalysis in einer solchen nicht-orthogonalen Basis werden im letzten Abschnitt dieses Kapitels behandelt.

■ 1.2 Tensoralgebra

1.2.1 Vektoren und Tensoren im dreidimensionalen Raum

1.2.1.1 Bezugsrahmen und Koordinatensysteme, polare und axiale Objekte

In der Begriffswelt der direkten Tensorrechnung ist der Begriff des Vektors und des Tensors einer beliebigen Stufe außerhalb eines *Bezugsrahmens* oder *Bezugssystems* bedeutungslos (vgl. auch [Abschnitt 2.3](#)). Dabei ist der Bezugsrahmen eher ein philosophisches Konzept, dessen Existenz nicht bewiesen, sondern nur postuliert werden kann. Einen Bezugsrahmen zu definieren, bedeutet insbesondere, ein Modell des absoluten Raums zu konstruieren, bei dem alle Punkte durch die Einführung von drei unabhängigen Richtungen und einer Längenskala im gegebenen Bezugsrahmen parametrisiert sind.

Die klassische Mechanik postuliert die Existenz einer unendlichen Anzahl gleicher Bezugsrahmen, und alle physikalischen Gesetze müssen diesbezüglich invariant sein, d. h. ihre Form bleibt beim Übergang von einem Rahmen zum anderen erhalten. Man spricht von *Forminvarianz* oder manchmal auch vom *Kovarianzprinzip*. Außerdem kann die Position eines beliebigen Punktes in einem bestimmten Bezugssystem durch ein Zahlentripel angegeben werden. Die Art und Weise, wie jeder Punkt in einem Bezugssystem in eine Eins-zu-Eins-Korrespondenz mit einem Zahlentripel gebracht wird, wird als Wahl des Koordinatensystems bezeichnet. In einem Bezugsrahmen können viele verschiedene Koordinatensystemen eingerichtet werden, die alle gleichwertig sind. Der Unterschied zwischen einem Bezugsrahmen und einem Koordinatensystem muss klar verstanden werden. Insbesondere hängen viele physikalische Größen (Geschwindigkeit, Beschleunigung, kinetische Energie usw.) von der Wahl des Bezugssystems ab, aber keine physikalische Größe hängt von der Wahl des Koordinatensystems in einem bestimmten Bezugssystem ab.

In dem gewählten Bezugssystem muss eine zusätzliche Vereinbarung darüber getroffen werden, welche Drehungen als positiv zu betrachten sind, d. h. es muss die Ausrichtung des Raums gewählt werden. Ein Bezugssystem wird *rechtsorientiert* genannt, wenn eine Drehung *gegen den Uhrzeigersinn* als positiv, und *linksorientiert*, wenn eine *Drehung im Uhrzeigersinn* als positiv angesehen wird.

Alle physischen Objekte werden hinsichtlich der Wahl der Orientierung im Bezugssystem in zwei Typen unterteilt (siehe auch [Abschnitt 3.6.2](#)). Objekte, die nicht von der Ausrichtung des Bezugssystems abhängen, werden als *polar* bezeichnet. Objekte, die mit dem Faktor -1 multipliziert werden, wenn die Ausrichtung des Bezugssystems umgekehrt wird, werden als *axial* bezeichnet. Zum Beispiel sind Temperatur, Verschiebung und Translationsgeschwindigkeit polare Objekte. Axiale Objekte beziehen sich in der Regel auf die Ausrichtung von Körpern im Raum. Typische Beispiele für axiale Objekte sind das Drehmoment, der Rotationsvektor, die Winkelgeschwindigkeit und die Winkelbeschleunigung.

Es ist zu beachten, dass die Ausrichtung des Bezugsrahmens erfolgt, bevor irgendwelche Operationen an Objekten im Rahmen durchgeführt werden, und dass keine weiteren Operationen an Objekten die ursprünglich gewählte Ausrichtung ändern. Insbesondere bleibt die Orientierung des Raums bei Spiegelungen erhalten.

1.2.1.2 Skalare oder Tensoren nullter Stufe



Definition: Ein Skalar oder Tensor nullter Stufe ist eine physikalische Größe, die von der Wahl des Koordinatensystems unabhängig ist und durch eine einzige reelle Zahl definiert wird.

Beispiele für Skalare in der Physik sind physikalische Größen wie Temperatur, Dichte, Energie, Ladung, usw. Nicht alle Zahlen können als Skalare bezeichnet werden. So sind beispielsweise Vektorkoordinaten keine Skalare, da sie von der Wahl des Koordinatensystems abhängen. Es ist zu beachten, dass skalare Größen oft gleich bleiben aber sich manchmal auch ändern können, wenn man das Bezugssystem ändert. So ändern sich Temperatur, Dichte und innere Energie nicht, wenn man in einen anderen Bezugsrahmen wechselt, während die kinetische Energie von der Wahl des Bezugsrahmens abhängt, weil sich dieser gegenüber dem ursprünglichen Rahmen mit einer anderen Geschwindigkeit bewegen kann. Skalare können Funktionen von Raumpunkten in einem Bezugssystem sein, z. B. die Temperaturverteilung in einem Körper. In diesem Fall handelt es sich um ein skalares *Feld*.

Betrachten wir die Menge der Skalare als Elemente der Menge der reellen Zahlen, also $\mathcal{T}_0 \equiv \mathbb{R}$,* auf denen die Operationen der Addition, Multiplikation und Division nach den Regeln der elementaren Arithmetik eingeführt werden. Als physikalische Größen haben Skalare Dimensionen. Nur skalare Größen desselben Typs, die dieselben Dimensionen und Einheiten haben, können direkt addiert und subtrahiert werden. Andererseits können Skalare verschiedener Dimensionen geteilt und multipliziert werden.

1.2.1.3 Der Vektorraum oder Tensoren erster Stufe

Das Grundelement des Vektorraums ist ein Vektor oder Tensor erster Stufe, der als „gerichteter Pfeil“ verstanden und durch seine Länge und Richtung definiert wird. Ein Beispiel für solche Vektorgrößen in der Mechanik sind Verschiebung, Translations- und Winkelgeschwindigkeit sowie der Rotationsvektor. Wir nennen einen Nullvektor einen Vektor, dessen Länge gleich Null ist. Die Richtung des Nullvektors spielt natürlich keine Rolle.

Folgende vier Regeln werden auf der Menge der Vektoren erklärt:



1. **Vektoradditionsregel:** Sie setzt in eindeutiger Weise zwei Vektoren \mathbf{a} und \mathbf{b} desselben Typs mit einem dritten Vektor \mathbf{c} desselben Typs gemäß der Parallelogramm- oder Dreiecksregel in Verbindung. Die folgenden Eigenschaften der Additionsoperation gilt es festzuhalten:

* Das Symbol \mathcal{T} weist auf Tensorraum hin, der nachfolgende Index kennzeichnet die Stufe.

- Kommutativität: $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$,
 - Assoziativität: $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$,
 - Existenz eines Nullvektors: $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{a} = \mathbf{a}$,
 - Existenz des Gegenvektors: $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$.
2. Die Regel der **Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar**: Jedem Vektor \mathbf{a} und Skalar α kann eindeutig ein Vektor $\mathbf{b} = \alpha \mathbf{a}$ zugeordnet werden, der die Länge $|\alpha| |\mathbf{a}|$ und die Richtung hat, die mit der Richtung von \mathbf{a} übereinstimmt, wenn $\alpha > 0$ und entgegengesetzt ist, wenn $\alpha < 0$. Diese Vorschrift hat folgende Eigenschaften:

$$(\alpha + \beta)\mathbf{a} = \alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{a}, \quad \alpha(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \alpha \mathbf{a} + \alpha \mathbf{b}, \quad \alpha(\beta \mathbf{a}) = (\alpha \beta)\mathbf{a}. \quad (1.1)$$

Der Vektortyp bleibt bei der Multiplikation mit einem polaren Skalar erhalten und wird bei der Multiplikation mit einem axialen Skalar umgekehrt.

Die Menge der Vektoren, für welche die beiden oben genannten Bildungsgesetze gelten, heißt *linearer Vektorraum*.

3. **Skalarmultiplikation von Vektoren**: Die Skalarmultiplikation setzt jedes Paar von Vektoren \mathbf{a} und \mathbf{b} zu einem Skalar $\alpha = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ in Beziehung und hat die folgenden Eigenschaften:

- Kommutativität: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$,
- Distributivität: $(\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \alpha(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) + \beta(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$,
- Positivdefinitheit: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \geq 0$, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a} = \mathbf{0}$.

Das Ergebnis der Skalarmultiplikation ist ein polarer Skalar, wenn die beteiligten Vektoren den gleichen Typ haben, und ein axialer Skalar, wenn die Vektortypen unterschiedlich sind.

Die **Norm eines Vektors** ist seine Länge:

$$|\mathbf{a}| = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a})^{1/2}. \quad (1.2)$$

Die Menge der Vektoren, für welche die drei oben genannten Kompositionsgesetze gelten, heißt *linear normierter Raum* oder *euklidischer Raum*.

Zwei Vektoren, die nicht Null sind, werden *orthogonal* genannt, wenn ihr Skalarprodukt Null ist.

Der *Einheitsvektor* eines Vektors \mathbf{a} zeigt dessen Richtung an und hat die Länge 1:

$$\mathbf{e}_a = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}, \quad |\mathbf{a}| \neq 0. \quad (1.3)$$

Die *Projektion* eines Vektors \mathbf{a} auf die Richtung von \mathbf{b} ist der Vektor

$$\mathbf{a}_b = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{e}_b. \quad (1.4)$$

Oft hat die Projektion eines Vektors \mathbf{a} auf einen Vektor \mathbf{b} die Länge

$$|\mathbf{a}_b| = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_b). \quad (1.5)$$

4. **Vektorielle Multiplikation oder Kreuzprodukt** von Vektoren. Im Gegensatz zu den vorangegangenen Gesetzen ist dieses Bildungsgesetz nur in einem orientierten Bezugsrahmen sinnvoll. Das Vektorprodukt der Vektoren \mathbf{a} und \mathbf{b} ist ein Vektor $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$, dessen Länge gegeben ist durch $|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ und dessen Richtung orthogonal zu der über die Vektoren \mathbf{a} und \mathbf{b} aufgespannten Ebene ist. Vom Ende des Vektors \mathbf{c} aus betrachtet, entsteht dieser im rechtsorientierten Bezugssystem durch kürzeste Drehung vom ersten auf den zweiten Vektor gegen den Uhrzeigersinn, im linksorientierten Bezugssystem im Uhrzeigersinn. Der Typ des Vektors \mathbf{c} hängt vom Typ der Vektoren \mathbf{a} und \mathbf{b} ab. Wenn beide Quellvektoren vom gleichen Typ sind, dann ist \mathbf{c} ein Axialvektor. Wenn einer der Vektoren polar und der andere axial ist, dann ist der Vektor \mathbf{c} polar.

Eigenschaften des Vektorprodukts sind:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}, \quad (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}. \quad (1.6)$$

Folgende Produkte dreier Vektoren werden häufig verwendet, das sog. *gemischte* (oder *Spatprodukt*), $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$, und das *doppelte Vektorprodukt*, $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$. Der Betrag des gemischten Produkts ist gleich dem Volumen des Parallelepipeds, das aus den gegebenen Vektoren gebildet wird. Man beachte, dass ein gemischtes Produkt ein Axialskalar ist, wenn alle Vektoren, die es enthält, vom gleichen Typ sind oder zwei von ihnen axial sind.

Erinnert sei in diesem Zusammenhang an die folgenden Identitäten:



Spat- und doppeltes Kreuzprodukt:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}); \quad (1.7)$$

dies ist sogenannte *Spatproduktregel*, da diese Größe das Volumen des von den drei Vektoren aufgespannten Volumens bestimmt.

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}); \quad (1.8)$$

dies ist die sogenannte *bazzap-Regel*, wobei sich der Name aus den Buchstaben der gewählten Vektoren erklärt.

Die eingeführte Menge gerichteter Segmente mit den obigen Bildungsgesetzen ist ein vektororientierter Raum \mathcal{T}_1 . Schließlich ist zu beachten, dass die Divisionsoperation nicht auf einer Vektormenge definiert ist, da sie nur auf Mengen definiert werden kann, in denen es ein einziges Einheitselement gibt. Beim Vektorraum ist das nicht der Fall, da er eine unendliche Anzahl von Einheitsvektoren unterschiedlicher Richtung enthält.



Übungsaufgabe Kreuzprodukt

1. Zeige, dass $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2$.
2. Beweise, dass $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{0}$.

1.2.1.4 Der Tensorraum oder Tensoren beliebiger Stufe

Skalare und Vektoren sind nur ein Teil der ganzen Vielfalt an Größen und Begriffen, welche die moderne Naturwissenschaft benötigt. Tensoren höherer Stufe entstehen in der Mechanik als Verallgemeinerung von Vektorräumen. Betrachten wir als Beispiel ein System, das aus drei Federn mit unterschiedlichen Federsteifigkeiten k_i besteht (Bild 1.2). Geben wir dem Mittelpunkt der Federbindung eine Verschiebung $\Delta \mathbf{r}$. Es liegt auf der Hand, dass die Rückstellkraft die Summe der in den Federn erzeugten elastischen Kräfte ist, $\mathbf{F} = F_1 \mathbf{e}_1 + F_2 \mathbf{e}_2 + F_3 \mathbf{e}_3$, wobei \mathbf{e}_i ein Einheitsvektor ist, der entlang der i -ten Feder zeigt, und die Größe der Kraft F_i proportional zur Projektion des Kopplungsmittelpunktes auf die entsprechende Einheitsrichtung ist, $F_i = -k_i \mathbf{e}_i \cdot \Delta \mathbf{r}$. Wir haben also $\mathbf{F} = -(k_1 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + k_2 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 + k_3 \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3) \cdot \Delta \mathbf{r} = -\mathbf{K} \cdot \Delta \mathbf{r}$, wobei der Tensor \mathbf{K} , der sich aus der Summe von drei Paaren von Vektoren multipliziert mit den entsprechenden Federsteifigkeiten ergibt, als Tensorsteifigkeit des Federsystems interpretiert werden kann. Man beachte, dass in diesem Fall die soeben verwendeten Vektorpaare $\mathbf{e}_i \mathbf{e}_i$, $i = 1, 2, 3$ als Ganzes wirken, wobei der erste Vektor dieses Paares die Richtung der Feder und der zweite Vektor die Richtung der Kraft angibt, die beide in diesem Problem zusammenfallen. Um diesen Unterschied zu verdeutlichen, untersuchen wir, wie der Spannungszustand in einem verformbaren Körper beschrieben wird.



Bild 1.2 Steifigkeitstensor eines Federsystems

Schneiden wir den Körper gedanklich durch die Fläche ΔS in zwei Teile und betrachten einen der Teile. Bezeichnen wir mit \mathbf{n} die äußere Normale zur Oberfläche. Auf die Fläche $\Delta \mathbf{f}(\mathbf{n})$ wirkt von der Seite des deformierten Teils eine Kraft ΔS , die von der Ausrichtung der Fläche abhängt (Bild 1.3). Der *Spannungsvektor* in einem Punkt M , der auf ein infinitesimales Flächenelement ΔS wirkt, ist der Grenzwert des Verhältnisses

$$\mathbf{t}(\mathbf{n}) = \lim_{d \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{f}}{\Delta S}, \tag{1.9}$$

wobei d der größte Durchmesser des Bereichs ist.

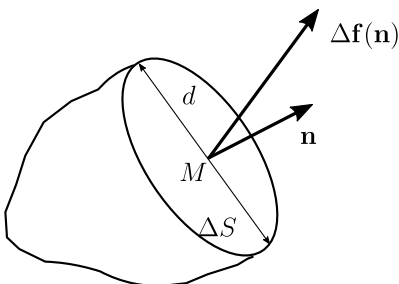


Bild 1.3 Zum Spannungstensor

Um die Spannung im Punkt M zu bestimmen, ist es also notwendig, eine orientierte Fläche zu definieren, die durch die Normale \mathbf{n} und den auf diese Fläche wirkenden Spannungsvektor definiert ist. Der *Spannungstensor* ist also ein geordnetes Paar von Vektoren \mathbf{n} und \mathbf{t} , von denen der erste die Fläche und der zweite die auf diese Fläche wirkende Kraft definiert. Die Reihenfolge der Faktoren ist dabei von grundlegender Bedeutung und darf – einmal festgelegt – nicht geändert werden. Man beachte in diesem Zusammenhang, dass die Paare \mathbf{nt} und \mathbf{tn} unterschiedlich sind. Um den Spannungszustand im Punkt M vollständig zu beschreiben, müssen die Spannungsvektoren in allen Ebenen, die durch M verlaufen, angegeben werden. Es gibt eine unendliche Anzahl solcher Ebenen. Mit einer Standardargumentation, siehe z. B. [Pa2008], kann gezeigt werden, dass der Spannungszustand an einem Punkt vollständig definiert ist, wenn eine ungeordnete Menge von drei geordneten Vektorpaaren gegeben ist.

Das formale Produkt zweier Vektoren \mathbf{a} und \mathbf{b} , die zu der Menge \mathcal{T}_1 gehören, heißt *Tensormultiplikation* oder *dyadisches Produkt*. Es sei erwähnt, dass in der Literatur häufig ein spezielles Zeichen für diese Tensormultiplikation, nämlich $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$, verwendet wird, das auch in diesem Lehrbuch gelegentlich zum Einsatz kommt. Der Begriff Tensormultiplikation zeigt an, dass diese Operation einige Eigenschaften einer gewöhnlichen Multiplikationsoperation hat.

Man betrachte die endliche Summe der Dyaden:

$$\mathbf{A} = \mathbf{ab} + \mathbf{cd} + \mathbf{ef} + \dots \quad (1.10)$$

Die Elemente von \mathbf{A} werden als Tensoren zweiter Stufe bezeichnet, wenn folgende Äquivalenzbedingungen erfüllt sind (α ist ein Skalar):

$$\begin{aligned} \mathbf{ab} + \mathbf{cd} &= \mathbf{cd} + \mathbf{ab}, \quad \mathbf{a}(\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{ab} + \mathbf{ac}, \\ (\mathbf{a} + \mathbf{b})\mathbf{c} &= \mathbf{ac} + \mathbf{bc}, \quad (\alpha \mathbf{a})\mathbf{b} = \alpha(\mathbf{ab}). \end{aligned} \quad (1.11)$$

Ein Tensor zweiter Stufe ist also eine ungeordnete Menge von geordneten Dyaden.

Bezeichnen wir die Menge der Tensoren zweiter Stufe, die man durch Tensorprodukt dreidimensionaler linearer Räume $\mathcal{T}_1\mathcal{T}_1$ erhält, mit \mathcal{T}_2 . Wir führen auf der Menge \mathcal{T}_2 die Operationen der Addition und Multiplikation mit einer Zahl ein, so dass die Grenzen der Menge nicht überschritten werden:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{ab} + \mathbf{cd}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{de} + \mathbf{gh}, \\ \mathbf{S} &= \mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{ab} + \mathbf{cd} + \mathbf{de} + \mathbf{gh}, \\ \alpha \mathbf{A} &= (\alpha \mathbf{a})\mathbf{b} + (\alpha \mathbf{c})\mathbf{d} = \alpha(\mathbf{ab}) + \alpha(\mathbf{cd}). \end{aligned} \quad (1.12)$$

Eine wichtige Eigenschaft des linearen Raums ist das Vorhandensein eines Null- und eines Gegentensors:

Der *Nulltensor* der Stufe 2 ist der Tensor $\mathbf{0} = \mathbf{oo}$, der über eine Dyade zweier Nullvektoren (hier zur Unterscheidung mit \mathbf{o} bezeichnet) entsteht. Wenn wir den Nullvektor in der Form $\mathbf{o} = \mathbf{0a}$ darstellen, erhalten wir eine alternative Darstellung des Nulltensors:

$$\mathbf{0} = \mathbf{oa} = \mathbf{ao}. \quad (1.13)$$

Der *Gegentensor* ist derjenige Tensor, der bei Summation zu einem Nulltensor führt.

$$\mathbf{\Pi} = (-1)\mathbf{A}. \quad (1.14)$$

Tensoren noch höherer Stufe werden auf die gleiche Weise eingeführt. Wir definieren das Tensorprodukt von k Vektorräumen: $\mathcal{T}_k = \underbrace{\mathcal{T}_1 \mathcal{T}_1 \dots \mathcal{T}_1}_k$. Wir nennen die geordnete Menge aufsteigender Tensoren k -ter Stufe auch: **ab**-Dyade, **abc**-Triade und **abcd**-Tetrade.

Die Elemente der Menge \mathcal{T}_k , für die die entsprechenden Äquivalenzbeziehungen erfüllt sind, heißen Tensoren k -ter Stufe und werden, wenn es nicht aus dem Kontext hervorgeht, in dem Symbol ${}^k\mathbf{A}$ erfasst. Somit bezeichnet z. B. ${}^2\mathbf{A} \equiv \mathbf{A}$ einen Tensor zweiter Stufe.

Da der Raum der Tensoren k -ter Stufe \mathcal{T}_k ein linearer Raum ist, definiert man Additions- und Multiplikationsoperationen mit einer Zahl wie folgt:

$$\alpha \left({}^k\mathbf{A} + {}^k\mathbf{B} \right) = \alpha \cdot {}^k\mathbf{A} + \alpha \cdot {}^k\mathbf{B}. \quad (1.15)$$

Man beachte, dass die Summe von Tensoren nur für Tensoren gleichen Ranges definiert ist.

1.2.1.5 Vektor- und Tensorbasen sowie Tensor-Koordinaten

Die Dreidimensionalität des Bezugssystems bedeutet, dass es im eingeführten Raum \mathcal{T}_1 Dreiergruppen linear unabhängiger Vektoren gibt, aber vier (und mehr) beliebige Vektoren erweisen sich als linear abhängig.



Definition: Jedes Triplet linear unabhängiger Vektoren wird als **Basis** bezeichnet.

Man beachte, dass alle Operationen mit Tensoren invariant sind und nicht von der gewählten Basis abhängen. Der Einfachheit halber wählen wir daher drei beliebig orientierte orthogonale Einheitsvektoren $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$.*

$$\mathbf{e}_m \cdot \mathbf{e}_n = \delta_{mn} = \begin{cases} 1, & m = n; \\ 0, & m \neq n, \end{cases} \quad (1.16)$$

wobei δ_{mn} das sogenannte *Kroneckersymbol* ist. Eine Basis, welche die [Gleichung \(1.16\)](#) erfüllt, heißt *orthonormal*.

Für jeden Vektor \mathbf{a} gibt es eine einzige Menge von Zahlen $a_1, a_2, a_3 \in \mathcal{T}_0$, die man Koordinaten des Vektors in der gewählten Basis nennt:

$$\mathbf{a} = a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3 = a_i \mathbf{e}_i, \quad a_i = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_i. \quad (1.17)$$

Hier und im Folgenden wird nach der *Einstein'schen Summenkonvention* vorgegangen, d. h. bei zweimal wiederholten Indizes** wird automatisch von 1 bis 3 summiert.

Die skalare Multiplikation der Vektoren $\mathbf{a} = a_m \mathbf{e}_m$ und $\mathbf{b} = b_n \mathbf{e}_n$ in Koordinatenschreibweise hat die Form:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_m b_n \delta_{mn} = a_n b_n. \quad (1.18)$$

Wir ordnen nun die Basisvektoren so an, dass sie das rechte Tripel der Vektoren $(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{e}_3 = 1$ bilden und betrachten das Vektorprodukt zwischen \mathbf{e}_i und \mathbf{e}_j ,

$$\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j = \epsilon_{ijk} \mathbf{e}_k \equiv \epsilon_{kij} \mathbf{e}_k, \quad (1.19)$$

* Die nicht-orthogonale Basis wird in [Abschnitt 1.5](#) betrachtet.

** Für eine nicht-orthogonale Basis wird diese Regel modifiziert (siehe [Abschnitt 1.5](#)).

wobei ϵ_{ijk} das sog. *Levi-Civita-Symbol* bezeichnet. Die Werte von ϵ_{ijk} sind gleich Null, wenn es sich wiederholende Indizes ijk gibt, gleich 1 für die Sequenz der Indizes 123 und Sequenzen, die durch zyklische Permutation daraus erhalten werden, und schließlich gleich -1 , wenn diese Ordnung gebrochen ist, d. h. für Sequenzen 132, 213 und 321. Diese Regeln haben wir im letzten Schritt in [Gleichung \(1.19\)](#) bereits angewandt.

Multipliziert man [Gleichung \(1.19\)](#) skalar mit \mathbf{e}_n , erhält man eine nützliche Formel zur Bestimmung der Komponenten des Levi-Civita-Tensors,

$$\epsilon_{ijk} = (\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j) \cdot \mathbf{e}_k. \quad (1.20)$$

Betrachten wir nun die Tensormultiplikation von Vektoren. Jede Dyade \mathbf{ab} kann in folgender Form dargestellt werden:

$$\mathbf{ab} = (a_m \mathbf{e}_m)(b_n \mathbf{e}_n) = a_m b_n \mathbf{e}_m \mathbf{e}_n. \quad (1.21)$$

Stellt man in ähnlicher Form alle im Tensorausdruck enthaltenen Dyaden dar, so erhält man, dass jeder Tensor zweiter Stufe durch folgende Erweiterung dargestellt werden kann:

$$\mathbf{A} = A_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j, \quad A_{mn} = \mathbf{e}_m \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_n. \quad (1.22)$$

Die Kombinationen $\mathbf{e}_m \mathbf{e}_n$ werden als Elemente der Tensorbasis bezeichnet, und Werte von A_{mn} sind die Tensorkoordinaten in Bezug auf die eingeführte Tensorbasis. Der Tensor des zweiten Ranges kann also als Summe von neun Dyaden dargestellt werden.



Satz: Die Dimensionalität des Raumes \mathcal{T}_2 ist 9, d. h. die Elemente der Tensorbasis $\mathbf{e}_m \mathbf{e}_n$ sind linear unabhängig.

Beweis: Lineare Unabhängigkeit der Tensorbasiselemente bedeutet, dass

$$\alpha_{mn} \mathbf{e}_m \mathbf{e}_n = \mathbf{0} \quad (1.23)$$

dann und nur dann möglich ist, wenn $\alpha_{mn} = 0$ gilt. Durch skalare Multiplikation der [Gleichung \(1.23\)](#) mit \mathbf{e}_k erhalten wir: $\alpha_{mn} \mathbf{e}_m \delta_{nk} = \alpha_{mk} \mathbf{e}_m = \mathbf{0}$, $k = 1, 2, 3$. Aufgrund der linearen Unabhängigkeit der Vektorbasiselemente ergibt sich also, dass $\alpha_{mn} = 0$. In einer festen Basis ist ein Tensor zweiter Stufe also vollständig durch seine Koordinatenmatrix der Ordnung 3×3 definiert. \square



Behauptung: Jeder Tensor zweiter Stufe kann als Summe von drei Dyaden dargestellt werden.

Beweis durch Konstruktion: Wenn man die Ausdrücke in der [Gleichung \(1.22\)](#) zusammenfasst, erhält man

$$\mathbf{A} = (A_{m1} \mathbf{e}_m) \mathbf{e}_1 + (A_{m2} \mathbf{e}_m) \mathbf{e}_2 + (A_{m3} \mathbf{e}_m) \mathbf{e}_3 = \mathbf{a}_1 \mathbf{e}_1 + \mathbf{a}_2 \mathbf{e}_2 + \mathbf{a}_3 \mathbf{e}_3. \quad \square \quad (1.24)$$

Man beachte, dass, obwohl jede Dyade ein Tensor zweiter Stufe ist, ein beliebiger Tensor zweiter Stufe nur in Ausnahmefällen auf eine einzelne Dyade reduziert werden kann.

Index

A

Abbildungsgeschwindigkeit 111
Ableitung eines Tensors 60
Absolutbeschleunigung 154
Absolutgeschwindigkeit 150
additive Dekomposition 185
adiabatische Abschottung 329
aktuellen Platzierung 110
Ampère-Øersted'sches Gesetz 318
Anisotropie 185, 265
antisymmetrischer Tensor 12
Assoziativität 4
assoziierter Vektor des Tensors 22
Ausdehnung 184
äußere Differentialformen 349
äußeres Skalarprodukt 15
axial 3, 38
axialer euklidischer Skalar 214

B

Bahndrehimpuls 173
Bakzap-Regel 6
Basis 87
Basisvektoren 107
Beobachter 108
Beobachterabhängigkeit 261
Beobachtungspunkt 110
Berechnung des inversen Tensors 26
Bernoulligleichung 194
Bewegung 299
Bezugsraum 107
Bezugssystem 3, 106, 108
Bild 136
Bildvektor bei Beobachterwechsel 137
Biot-Savart-Gesetz 329
body force 167
body of reference 107
Boltzmannkontinuum 174

Boostabstand 143
Boostbeschleunigung 154

C

Cauchy-Green-Beziehungen 286, 288, 289, 292
Cauchykontinuum 174
Cauchy'sches Tetraederargument 166
Cayley-Hamilton-Theorem 26
cgs-System 329
charakteristische Gleichung 41, 59
charakteristische Länge 200
chemisches Potential 166
Christoffelsymbole erster Art 95
Christoffelsymbole zweiter Art 94
Clausius-Duhem-Ungleichung 238, 264, 290
Clausius-Planck-Ungleichung 236, 282
coefficient of thermal expansion 185
coldness 277, 282
Coleman-Noll-Verfahren 260
constitutive equations 185
convected time-flux 313
Coriolisbeschleunigung 154
Corioliskraft 138
Cosseratkontinua 174
Cosseratpseudokontinuum 197
Coulomb-Eichung 362
Coulomb'sches Gesetz 329
current placement 110

D

Darstellungssatz 248, 265
Deformationsgradient 112, 183
Dehnungspotential 264
Determinante eines Tensors 23
Determinantenregeln 25
Deviator 44, 188
dielektrische Suszeptibilität 354

Differentialoperationen für krummlinige
 Koordinaten 99
 Dimension 328
 direkte Notation 1
 Dirichletbedingung 190, 196
 Dissipation 237
 Distributivität 5
 Divergenz 73, 159
 Divergenztheorem 85
 doppelte innere Vektormultiplikation 16
 doppeltes äußeres Vektorprodukt 15
 doppeltes Vektorprodukt 6
 Drall 173
 Drehimpuls 171
 Drehtensor 31, 144
 Drehwinkel 33
 Dreibein 106
 Duhamel-Neumann-Gesetz 185
 Duhamel-Neumann'sche Erweiterung 185
 Dyade 8, 9
 dyadisches Produkt 8
 dynamischer Spin 177
 dynamisches Kräftegleichgewicht 133

E

Eigensystemsbasis 42
 eigentliche Drehung 30
 Eigenvektoren 41
 Eigenwerte 41
 Einheit 328
 Einheitsvektor 5
 Einstein'sche Summenkonvention 9
 elastische Dehnungen 185
 Elastizitätsmodultensor 53
 elektrische Anregung 321
 elektrische Permittivität des Vakuums 332
 elektrische Spannung 303
 elektrisches Feld 298
 Elektromotor 303
 elektromotorische Kraft 301, 305
 elektrostatische Einheit 329
 empirische Temperatur 266
 Energieerhaltungssatz 228
 entarteter Tensor 24
 Enthalpie 256, 288
 Entropie 231

Entropiebilanz 243
 Entropiefluss 234
 Entropieproduktion 235, 244
 Entropieungleichung 238
 Entropieungleichung in lokaler Form regulär
 244
 Erhaltung des elektromagnetischen Fluss in
 Weltensorform 340
 Erhaltungsgröße 123, 170, 172, 229, 230, 244
 Erhaltungssatz 123
 erste Maxwell'sche Gleichung regulär 299
 erste Maxwell'sche Gleichung singulär 300
 1. Hauptsatz der Thermodynamik 230
 erstes Axiom der Elektrodynamik 305
 Eshelby tensor 289
 esu 329
 Euklidische Tensoren der Elektrodynamik
 344
 euklidische Transformation 143, 342
 euklidischer Raum 5
 euklidischer Tensor 208
 euklidischer Vektor 207
 Eulerbeschleunigung 153, 154
 Eulerfluid 186
 Eulerkraft 133
 Euler-Rodrigues-Formel 31
 Euler'sche Darstellung des Kontinuums 112
 Euler'sche materielle Beschreibung 120
 Exponentialfunktion eines Tensors 28
 exponentielles Wachstum 166
 externe Entropieproduktion 289
 externe Symmetrie 50

F

Faraday'scher Käfig 363
 Faraday'sches Induktionsgesetz 302
 Feld 4
 Feldgleichung 230
 Feldgleichungen der Kontinuumsmechanik
 157
 Fernwirkung 361
 fictitious forces 137
 Finger-Tensor 285
 Flüssigkeitsreibung 187
 Forminvarianz 3, 223
 Fourier'sche Ungleichung 283

Fourier'sches Wärmeleitungsgesetz 237, 249,
263, 265, 281
frame of reference 106, 108
freie Energie 256
freie Enthalpie 256, 263, 288
freie Momentendichte 179
freies Randwertproblem 194
Führungsbeschleunigung 154
Führungsgeschwindigkeit 150
Fundamentalmatrix 90
Funktionalgleichungen isotroper
Tensorfunktionen 268

G

Galilei'scher Inertialbeobachter 108
Galilei-Transformationen 343
Gasdynamik 115
Gauß-Ostrogradski Integralssatz 84
Gauß'sches Gesetz der Elektrostatik 319
Gauß'sches Gesetz für singuläre Punkte 358
Gauß-System 329
geführte Bewegung 134
Gegentensor 8
gemeinsame Invariante von Tensoren 59
gemischte Koordinaten 91
gemischtes Vektorprodukt 6
Generator 303
Gesamtdehnung 184
Gesamtstromdichte 318
Geschwindigkeit eines Beobachtungspunktes
299
Geschwindigkeitsgradient 187
Gewicht des Welttensors 339
Gibbs'sche freie Energie 256, 263, 288
Gibbs'sche Gleichung 234, 277, 281, 286
Gibbs'sche Gleichung für den
linear-elastischen Festkörper 262
Gibbs'sches Kreuz 21
Gleichgewichtsentropie 262
Gleichrichter 304
Gradiententheorien 105
Gravitationskonstante 361
Gravitationspotential 361
Grenzflächen 114

H

Hauptinvarianten 26, 41, 59
Hauptrichtung 41
Hauptwerte 41
heat supply 260
Heating 282
Heaviside 1
Heaviside-Lorentz-System 329
Homogenisierung 110
Hooke'sches Gesetz 185, 263
Hypothese des lokalen Gleichgewichts 186,
233, 236, 246

I

ideal gas relation 187
ideales Gas 187
Impulsbilanz global 167
Impulsbilanz lokal in regulären Punkten 167
Induktionsexperiments 301
Inertialbeobachter 108, 109
Inertialsystem 108, 327, 338
inkompressibel 159
innere Dissipation 283
innere Energie 170, 227, 228, 230
innere Entropie 235
innere Freiheitsgrade 105
innere Symmetrie 50
inneres Skalarprodukt 14
integrierender Faktor 233, 262
interne Entropieproduktion 290
Invarianten eines Tensors 26
inverser Tensor 25
invertierbarer Tensor 4. Stufe 54
irreversibel 237
Irreversibilität 231
isotrop 52
isotrope Funktion 57
Isotropie 265
Isotropieprinzip 267

J

Jacobian 113
Jacobideterminante 113

K

Kalorik 228
 Kältefunktion 277
 Kapazität 363
 Kapazität des Plattenkondensators 365
 Kelvin-Planck-Formulierung des
 2. Hauptsatzes 283
 Kommutativität 4, 5
 Kompressibilität 191, 253, 259
 Kompression 184
 Kompressionsmodul 263
 Kontinuitätsgleichung 159
 Kontinuumsannahme 105
 Kontinuumskartoffel 143
 kontravariante Koordinaten 89
 Kontrollvolumen 110
 konvektiver Transport 122
 Koordinaten 9
 Koordinatentransformation 132
 Koppelgrößen 268
 Koppeltensor 176
 Koppelzahl 200
 Kopplungskoeffizient 205
 Körperpunkt 181
 kovariante Ableitung 94
 kovariante Ableitung der kovarianten
 Koordinate 97
 kovariante Koordinaten 89
 Kovarianzprinzip 3
 Kraft-Fluss Konzept 246
 Kreuzprodukt 6
 Kroneckersymbol 9
 Kugelanteil 188
 Kugulkondensator 362
 Kugelkoordinaten 81
 Kugeltensor 44

L

Ladungserhaltung 317
 Ladungserhaltung in Welttensorform 341
 Ladungspotential gesamt 318
 Ladungspotential in polarisierbarer Materie
 353
 Ladungsstrompotentialtensor 342
 Lagrange multipliers 239

Lagrange Multiplikatoren 238
 Lagrange'sche Beschreibung 120
 Lagrange'sche Darstellung 183
 Lagrange'sche Multiplikatoren 266
 Lagrange'sche Schreibweise 119
 Laméoeffizienten 71
 Lamé'sche Elastizitätskonstanten 185, 253
 Laplace-Operator 77
 Legendretransformation 263, 288
 Lenz'sche Regel 301
 Levi-Civita-Symbol 10
 Levi-Civita-Tensor 19
 Lichtgeschwindigkeit 329
 lineare Elastizitätstheorie 157
 linearer Abbildungstensor 23
 linearer Dehnungstensor 184
 linearer Impuls 177
 linearer thermischer Ausdehnungskoeffizient
 185
 linearer Vektorraum 5
 linker Spintensor 61
 linker Winkelgeschwindigkeitstensor 151
 linker Winkelgeschwindigkeitsvektor 151
 Linksgradient 167
 logarithmischer Rotationstensor 35
 lokale Bilanz 125
 lokale Bilanz der kinetischen Energie regulär
 169
 lokale Bilanz des spezifischen Drehimpulses
 regulär 171
 lokale Bilanz für Flußdichten regulär
 materiell 127
 lokale Bilanz für Flußdichten regulär
 räumlich 127
 lokale Bilanz für Flußdichten singulär
 materiell 128
 lokale Bilanz für Flußdichten singulär
 räumlich 128
 lokale Bilanz regulär materiell 125
 lokale Bilanz regulär räumlich 125
 Lorentz-Boost-Geschwindigkeit 346
 Lorentzkraft 182, 333
 Lorentz-Kraftdichte 331
 Lorentz-Transformationen 345
 Lorenz-Eichbedingung 361

M

magnetische Feldlinien 298
 magnetische Induktion 298, 305
 magnetische Monopole 299
 magnetische Permeabilität des Vakuums 332
 magnetischer Fluss 299
 magnetisches Feld 298
 Makrorotation 196
 Makrorotationsvektor 196
 Massenbilanz 158
 Massenbilanz global 158
 Massenbilanz integriert 161
 Massenbilanz lokal in regulären Punkten 158
 Massenbilanz lokal in singulären Punkten 159
 Massendichte 161
 Massenträgheitstensor 176
 Materialfunktionen 267
 Materialgesetze 185
 materielle Schreibweise 119
 materielle Zeitableitung einer Feldgröße 128
 materieller Punkt 119
 materielles Teilchen 119
 materielles Volumen 119
 Maxwell-Lorentz-Äther-Beziehung 327
 Maxwell'scher Verschiebungsstrom 321
 Metrik 90
 Metriktensor 91
 Mikrokontinuum 105
 mikropolare Kontinua 174
 mikropolarer Längenskalenparameter 205
 Mikropolartheorie 105, 290
 Mikrorotation 196
 Mikrowinkelgeschwindigkeitsfeld 174
 Mikrowinkelgeschwindigkeitsvektor 221
 Minkowski-Magnetisierung 355
 Mohr'scher Kreis 184
 moment of momentum 173

N

Nabla-Operator 72
 Nahwirkung 361
 Nansonformel für Flächen 117
 Nansonformel für Volumina 113, 117
 Nansons 1. Formel 112

Nansons 2. Formel 117
 Navier-Stokes-Gesetz 187, 238, 249, 265, 281
 Neumann'sche Randbedingung 190, 196
 Newton'sche Lex Secunda 167
 Newton'sches Gravitationsgesetz 361
 Newton'sches Inertialsystem 108
 Nichtinertialsystem 135
 Norm eines Vektors 5
 Normaldehnungen 184
 Nulltensor 8

O

objektiver Tensor 207, 208
 observer 108
 offenes Volumen 110
 Onsager-Casimir'sche
 Reziprozitätsbeziehungen 247
 orthogonale Drehung 29
 orthogonale Gruppe 30
 orthogonale Transformation 50
 orthogonaler Tensor 29
 Orthogonalität von Vektoren 5
 Orthonormalbasis 9

P

Partialmassendichte 165
 Partialteilchenzahldichte 165
 perfect gas relation 187
 phänomenologische Gleichungen 247
 phänomenologische Koeffizienten 247
 Pillendosenargument 126
 Planck'sche Ungleichung 283
 Plattenkondensator 364
 Plattenkondensatorspannung 365
 PMO 268
 Poissongleichung 62
 Poissonrelation 149, 151
 polar 3, 38
 polare Medien 174, 290
 polares Zerlegungstheorem 46
 Positivdefinitheit 5
 Positivität der Entropieproduktion 232
 positiv-semidefinite Matrix
 phänomenologischer Koeffizienten 247
 Potentialcharakter der inneren Energie 286

Potentialfeld 73
 primitive Größe 266
 principle of material frame indifference 239
 Prinzip der materiellen Objektivität 138, 268
 Prinzip von d'Alembert 133
 Prinzips der materiellen Objektivität 349
 Projektor 37
 Pseudotensor 339

Q

quasistatische Prozessführung 186
 Quellstärke 159

R

Rangtensor 56
 räumliche Beschreibung 109
 räumliche Feldschreibung 112
 Raum-Zeit-Koordinaten 339
 Raum-Zeit-Transformation 339
 Rechenregeln Nabla-Operator 75
 Rechenregeln zweifache Anwendung des
 Nabla-Operators 78
 rechter Cauchy-Green-Tensor 285
 rechter Spintensor 61
 rechter Winkelgeschwindigkeitstensor 148
 rechter Winkelgeschwindigkeitsvektor 61
 rechter Winkelgeschwindigsvektor 149
 Rechtsgradient 72
 reduzierte Bilanz der inneren Energie 285,
 292
 reduzierte Energiebilanz 281
 reduzierte Wärme 235, 246
 reference placement 110
 Referenzplatzierung 110, 299
 Referenztemperatur 185
 Referenzvolumen 110
 Reflexionstensor 37
 Reihen 28
 Relativbeschleunigung 154
 relative Permeabilitätszahl 364
 Relativgeschwindigkeit 150
 Relativitätsprinzip 144
 repräsentatives Volumenelement 104, 110
 Restungleichung 263, 265, 274, 290
 reversibel 237

reziproke Basis 87
 Rotation 73
 rotationsfreies Vektorfeld 73
 Rotationstensor 30, 31
 Rotor in Zylinderkoordinaten 176

S

Satz von Cauchy 166
 Sätze über isotrope Tensorfunktionen 58
 Scheinkraft 133, 137, 338
 Scherdehnung 184
 Scherviskosität 188, 237
 Schiefheit 197
 Schockfront 114
 Schubmodul 253
 semiinverser Ansatz 189, 192, 195
 singuläre Fläche 124
 singulärer Tensor 24
 Skalar 4
 Skalarmultiplikation 5
 Skalarpotential elektrisches Feld 361
 solenoides Vektorfeld 78
 Spannung mechanisch 8
 Spannungspotential 262
 Spannungstensor 8
 Spannungsvektor 7, 167
 spatial description 109, 112
 Spatprodukt 6
 Spatproduktregel 6
 Spektraldarstellung 42
 spezifische Wärme 228
 Spiegelungstensor 37
 Spin 172, 173, 221
 Spintensor 61, 73
 Sprungbilanz Ampère-Øersted-Gesetz 359
 Sprungbilanz für das Induktionsgesetz 359
 Sprungbilanz für das totale Ladungspotential
 358
 Sprungbilanz Ladungsfluss 358
 Sprungklammer 115
 Spur eines Tensors zweiter Stufe 20
 starke Elliptizität 253
 Starrkörperrotationen 183
 Starrkörpertranslation 183
 Steifigkeitsmatrix 251
 Steifigkeitstensor 53

Steifigkeitstetrade 251
 Strahlungsterm 229
 stress power 282
 Stromlinie 194
 Strompotential gesamt 318
 Strompotential in Materie 354
 substantielle Zeitableitung 128
 Symmetriegruppe 51
 Symmetriegruppe der Tensorfunktion 57
 symmetrischer Tensor 12

T

Tangentialkraft 133
 Teilchenzahlbilanzen lokal 164
 Temperatur 228
 Tensor 0. Stufe 4
 Tensor 1. Stufe 4
 Tensor 2. Stufe 8
 Tensor, anschauliches Beispiel 7
 Tensorbasis 9
 Tensorbasis für transversal isotrope Tensoren 55
 Tensorexponential 28
 Tensorfeld 70
 Tensorfunktion 56
 Tensorinvariante 59
 Tensormultiplikation 8
 Tensornorm 28
 Tensorprodukt 9
 Tetrade 9
 thermische Dehnungen 185
 thermische Zustandsgleichung 186, 265
 Thermodynamik irreversibler Prozesse 236, 244
 thermodynamische Stabilitätsbedingungen 259
 thermodynamischer Zustandsraum 260
 thermoelastischer Festkörper bei kleinen Deformationen 260
 TIP 236, 244
 totale Dehnung 184
 totale Zeitableitung 111
 totale Zeitableitung in Euler'schen Gitterkoordinaten 128
 totale Zeitableitung materielle Schreibweise 128

Trägheitsbeschleunigung 343
 Trägheitskraft 133, 137
 Trägheitskraft der relativen Translation 138
 transponierter Tensor 11
 Transporttheorem für offene Flächen räumlich 117
 Transporttheorem bei Berücksichtigung der Massenbilanz 163
 Transporttheorem für volumetrische Größen 113
 transversal isotroper Tensor 55
 transversal-isotrop 52
 Triade 9
 tripod 106

U

unimodular 287

V

Vektor 4
 Vektoraddition 4
 Vektorbasis 107
 vektorielle Multiplikation 6
 Vektorinvariante des Tensors 21
 Vektorkoordinaten 9
 Vektorpotential elektromagnetisches Feld 361
 verallgemeinerte Orthogonalität 42
 Verdichtungsstöße 114
 Verschiebungsvektor 183
 Viskositätskoeffizienten 187
 vollständige orthogonale Gruppe 30
 Volt 304
 Voltmeter 363
 Volumenviskosität 188, 237
 volumetrische Felder 111
 vorticity 175

W

Wärmeenergie 170, 227
 Wärmeflussvektor 228
 Wärmeleitfähigkeit 237
 Wärmeleitfähigkeitstensor 247, 249
 Wechselspannung 304

Winkelgeschwindigkeitstensor [148](#)
Winkelgeschwindigkeitsvektor [61](#)
Wirbelstärke [175](#)
Wirbelstärkevektor [201](#)
Wirbelvektor [73](#)
Wirkungsgrad [283](#)
Working [282](#)
wryness [197](#)

Z

Zentrifugalbeschleunigung [154](#)
Zentrifugalkraft [133](#)
Zentripetalbeschleunigung [131](#)
Ziel der Kontinuumsmechanik [157](#)
Zirkulation eines Vektors [86](#)
Zufuhrterm [169](#), [171](#)
Zustandsraum [233](#), [269](#)
Zustandsvariablen [233](#)
2. Hauptsatz der Thermodynamik [231](#), [236](#),
[243](#), [244](#)
Zylinderkoordinaten [79](#)